

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУМЕРНОЙ ОДНОФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ (НА ПРИМЕРЕ ТНЦ)

Аннотация. В статье представлено математическое описание двумерного процесса однофазной фильтрации сжимаемой жидкости.

Ключевые слова: однофазная фильтрация, фильтрация сжимаемой жидкости.

Моделирование двумерной однофазной фильтрации сжимаемой жидкости необходимо для построения карт изобар. Этот способ разработки позволяет повысить точность построения карт учитывая сжимаемость жидкости и породы. Что не учитывается в существующих аналогах.

Для нахождения давления необходимо:

1. Разработать математическую модель. Получить уравнение учитывающее изменение давления.
2. Дискретизировать полученное уравнение и найти коэффициенты СЛАУ
3. Представить СЛАУ в матричной форме

Разработка математической модели

Рассмотрим процесс построения карт изобар с учетом двумерной фильтрации сжимаемой жидкости. Который описывается уравнением неразрывности, уравнением движения и уравнениями описывающими сжимаемость жидкости и скелета породы.

Для начала рассмотрим уравнение неразрывности(материального баланса). С инженерной точки зрения условие материального баланса - это выражение сохранения массы во всей системе.

Уравнение неразрывности (материального баланса) выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial m\rho}{\partial t} + \text{div}(\rho v) + \rho q = 0 \quad (1)$$

где ρ – плотность,

m – пористость,

q – объёмная плотность,

t – время,

v – скорость,

div – дивергенция.

Далее рассмотрим - закон Дарси. Он выражает линейную зависимость скорости фильтрации от градиента давления.

Уравнение движения (закон Дарси) выглядит следующим образом:

$$v = -\frac{k}{\mu} grad(P) \quad (2)$$

где k – проницаемость,

μ – вязкость,

$grad(P)$ – градиент давления P

Важным параметром при моделировании динамических процессов является коэффициент сжимаемости породы, который характеризует изменение пористости в зависимости от давления.

Уравнения описывающие сжимаемость жидкости и скелета породы выглядит так:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho^b [1 + \beta_{жс} (P - P^b)] \\ m &= m^b + \beta_r (P - P^b) \end{aligned} \quad (3)$$

где ρ^b и m^b - пористость и плотность замеренная при давлении P^b ,

$\beta_{жс}, \beta_r$ – сжимаемость жидкости и скелета породы.

Составим систему для выражения давления:

$$\begin{cases} \frac{\partial m \rho}{\partial t} + div(\rho v) + \rho q = 0 \\ v = -\frac{k}{\mu} grad(P) \\ \rho = \rho^b [1 + \beta_{жс} (P - P^b)] \\ m = m^b + \beta_r (P - P^b) \end{cases} \quad (4)$$

Чаще всего начальным условием для пласта принимается состояние статического равновесия, при котором скорости всех фаз равны нулю.

$$\text{Начальные условия} - P(x, y)|_{t=0} = P^0(x, y)$$

Граничные условия отражают взаимодействие нефтяного пласта с окружающей областью

$$\text{Граничные условия} - P(x, y, t)|_{\text{контур}} = P_K$$

Для того, чтобы привести систему к уравнению, выполним ряд преобразований. Найдем значение произведения $m\rho$

$$m\rho = m^b \rho^b + (\rho^b \beta_r + m^b \rho^b \beta_{\text{жс}})(P - P^b) + \rho^b \beta_{\text{жс}} \beta_r (P - P^b)^2 \quad (5)$$

Последним слагаемым в виду его малости можно пренебречь.

$$m\rho = m^b \rho^b + \rho^b (\beta_r + m^b \beta_{\text{жс}})(P - P^b) = m^b \rho^b \left[1 + (\beta_r + m^b \beta_{\text{жс}}) \frac{(P - P^b)}{m^b} \right] \quad (6)$$

Продифференцируем первое слагаемое первого уравнения системы (4)

$$\begin{aligned} \frac{\partial m\rho}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} [m^b \rho^b + \rho^b (\beta_r + m^b \beta_{\text{жс}})(P - P^b)] = \frac{\partial}{\partial t} [m^b \rho^b + \rho^b (\beta_r + m^b \beta_{\text{жс}})P - \rho^b (\beta_r + m^b \beta_{\text{жс}})P^b] \\ &= \rho^b (\beta_r + m^b \beta_{\text{жс}}) \frac{\partial P}{\partial t} \end{aligned} \quad (7)$$

Преобразуем второе слагаемое первого уравнения системы (4), предварительно заменив скорости фаз законом Дарси. Пренебрегая выражением $\beta_{\text{жс}}(P - P^b)$ по сравнению с единицей, получаем:

$$\text{div}(\rho v) = -\text{div} \left[\rho^b \left(1 + \beta_{\text{жс}}(P - P^b) \right) \frac{k}{\mu} \text{grad}(P) \right] = -\rho^b \text{div} \left[\frac{k}{\mu} \text{grad}(P) \right] \quad (8)$$

Таким образом первое уравнение системы (4) можно представить, предварительно разделив на плотность, в следующем виде:

$$\left(\beta_r + m^b \beta_{\text{жс}} \right) \frac{\partial P}{\partial t} - \text{div} \left[\frac{k}{\mu} \text{grad}(P) \right] + q = 0 \quad (9)$$

Обозначим

$$B = \beta_r + m^b \beta_{\text{жс}} \quad (10)$$

После преобразований получим уравнение учитывающее изменение давления за счет: перераспределения гидродинамических потоков, сжимаемости системы, отборов/закачки

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{k_x}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{k_y}{\mu} \frac{\partial P}{\partial y} \right] = q + B \frac{\partial P}{\partial t} \quad (11)$$

Дискретизация

Гидродинамические задачи, возникающие при разработке месторождений углеводородов, слишком сложны для того, чтобы допускать аналитические решения, поэтому важным аспектом моделирования является применение численных методов, позволяющих получать приближенные решения соответствующих задач.

$$\begin{aligned} & \frac{\left[\frac{k_x}{\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \right]_{e,i,j} - \left[\frac{k_x}{\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \right]_{w,i,j}}{\Delta x} + \frac{\left[\frac{k_y}{\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial y} \right]_{n,i,j} - \left[\frac{k_y}{\mu} \cdot \frac{\partial P}{\partial y} \right]_{s,i,j}}{\Delta y} = \\ & = B_{i,j}^n \cdot \frac{P_{i,j}^{n+1} - P_{i,j}^n}{\Delta t} + q_{i,j}^n \\ & \frac{\left[\frac{k_x}{\mu} \cdot \frac{P_{i+1,j}^{n+1} - P_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} \right]_{e,i,j} - \left[\frac{k_x}{\mu} \cdot \frac{P_{i,j}^{n+1} - P_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x} \right]_{w,i,j}}{\Delta x} + \\ & \frac{\left[\frac{k_y}{\mu} \cdot \frac{P_{i,j+1}^{n+1} - P_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} \right]_{n,i,j} - \left[\frac{k_y}{\mu} \cdot \frac{P_{i,j}^{n+1} - P_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y} \right]_{s,i,j}}{\Delta y} = B_{i,j}^n \cdot \frac{P_{i,j}^{n+1} - P_{i,j}^n}{\Delta t} + q_{i,j}^n \\ & \left[\frac{k_x}{\mu} \cdot \frac{1}{\Delta x^2} \right]_{e,i,j} (P_{i+1,j}^{n+1} - P_{i,j}^{n+1}) - \left[\frac{k_x}{\mu} \cdot \frac{1}{\Delta x^2} \right]_{w,i,j} (P_{i,j}^{n+1} - P_{i-1,j}^{n+1}) + \\ & \left[\frac{k_y}{\mu} \cdot \frac{1}{\Delta y^2} \right]_{n,i,j} (P_{i,j+1}^{n+1} - P_{i,j}^{n+1}) - \left[\frac{k_y}{\mu} \cdot \frac{1}{\Delta y^2} \right]_{s,i,j} (P_{i,j}^{n+1} - P_{i,j-1}^{n+1}) = \frac{B_{i,j}^n}{\Delta t} P_{i,j}^{n+1} - \frac{B_{i,j}^n}{\Delta t} P_{i,j}^n + q_{i,j}^n \end{aligned}$$

Сгруппируем слагаемые при P.

$$\begin{aligned} & \frac{k_{xe,i,j}}{\mu_{e,i,j}} \cdot \frac{1}{\Delta x^2} P_{i+1,j}^{n+1} + \frac{k_{xw,i,j}}{\mu_{w,i,j}} \cdot \frac{1}{\Delta x^2} P_{i-1,j}^{n+1} - \left[\frac{k_{xe,i,j}}{\mu_{e,i,j}} \cdot \frac{1}{\Delta x^2} + \right. \\ & \left. + \frac{k_{xw,i,j}}{\mu_{w,i,j}} \cdot \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{k_{yn,i,j}}{\mu_{n,i,j}} \cdot \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{k_{ys,i,j}}{\mu_{s,i,j}} \cdot \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{B_{i,j}^n}{\Delta t} \right] P_{i,j}^{n+1} \\ & + \frac{k_{yn,i,j}}{\mu_{n,i,j}} \cdot \frac{1}{\Delta y^2} P_{i,j+1}^{n+1} + \frac{k_{ys,i,j}}{\mu_{s,i,j}} \cdot \frac{1}{\Delta y^2} P_{i,j-1}^{n+1} = -\frac{B_{i,j}^n}{\Delta t} P_{i,j}^n + q_{i,j}^n \end{aligned}$$

Умножаем на -1 и на объем $V = \Delta x \Delta y \Delta z$

$$\begin{aligned} & -\frac{k_{xe,i,j}}{\mu_{e,i,j}} \cdot \frac{\Delta y \Delta z}{\Delta x} P_{i+1,j}^{n+1} - \frac{k_{xw,i,j}}{\mu_{w,i,j}} \cdot \frac{\Delta y \Delta z}{\Delta x} P_{i-1,j}^{n+1} + \left[\frac{k_{xe,i,j}}{\mu_{e,i,j}} \cdot \frac{\Delta y \Delta z}{\Delta x} + \right. \\ & \left. + \frac{k_{xw,i,j}}{\mu_{w,i,j}} \cdot \frac{\Delta y \Delta z}{\Delta x} + \frac{k_{yn,i,j}}{\mu_{n,i,j}} \cdot \frac{\Delta x \Delta z}{\Delta y} + \frac{k_{ys,i,j}}{\mu_{s,i,j}} \cdot \frac{\Delta x \Delta z}{\Delta y} + \frac{B_{i,j}^n V}{\Delta t} \right] P_{i,j}^{n+1} \\ & - \frac{k_{yn,i,j}}{\mu_{n,i,j}} \cdot \frac{\Delta x \Delta z}{\Delta y} P_{i,j+1}^{n+1} - \frac{k_{ys,i,j}}{\mu_{s,i,j}} \cdot \frac{\Delta x \Delta z}{\Delta y} P_{i,j-1}^{n+1} = -\frac{B_{i,j}^n V}{\Delta t} P_{i,j}^n + Q_{i,j}^n \end{aligned}$$

Обозначим M_{well} – множество скважин

Сгруппируем слагаемые:

$$a_{e,i,j}^n P_{i+1,j}^{n+1} + a_{w,i,j}^n P_{i-1,j}^{n+1} + a_{n,i,j}^n P_{i,j}^{n+1} + a_{s,i,j}^n P_{i,j+1}^{n+1} + a_{s,i,j}^n P_{i,j-1}^{n+1} = b_{i,j}^n$$

СЛАУ в матричной форме

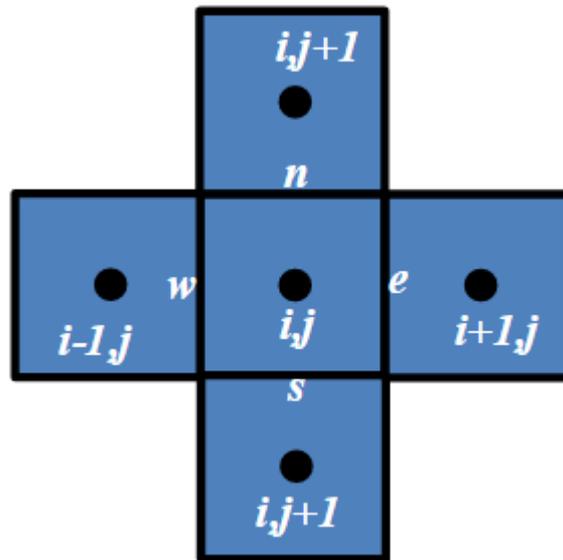


Рис. 1. Разностная сетка, где центры ячеек – i,j , грани ячеек – e,n,w,s

Где коэффициенты СЛАУ выглядят следующим образом:

$$a_{e,i,j}^n = \begin{cases} -\frac{k_{x,i,j} \cdot k_{x,i+1,j}}{k_{x,i,j} \partial x_{i+1-,j} + k_{x,i+1,j} \partial x_{i+,j}} A_{e,i,j}, & \text{если } i < Nx \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$a_{w,i,j}^n = \begin{cases} -\frac{k_{x,i,j} \cdot k_{x,i-1,j}}{k_{x,i,j} \partial x_{i-1+,j} + k_{x,i-1,j} \partial x_{i-,j}} A_{w,i,j}, & \text{если } i > 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$a_{n,i,j}^n = \begin{cases} -\frac{k_{y,i,j} \cdot k_{y,i,j+1}}{k_{y,i,j} \partial y_{i,j+1-} + k_{y,j+1} \partial y_{i,j+}} A_{n,i,j}, & \text{если } j < Ny \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$a_{s,i,j}^n = \begin{cases} -\frac{k_{y,i,j} \cdot k_{y,i,j-1}}{k_{y,i,j} \partial y_{i,j-1+} + k_{y,j-1} \partial y_{i,j-}} A_{s,i,j}, & \text{если } j > 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$B_{i,j}^n = \beta_r + m^b \beta_{жс}$$

$$a_{i,j}^n = -\left(a_{e,i,j}^n + a_{w,i,j}^n + a_{n,i,j}^n + a_{s,i,j}^n - \frac{B_{i,j}^n V}{\Delta t} \right)$$

$$b_{i,j}^n = \begin{cases} \frac{B_{i,j}^n V}{\Delta t} P_{i,j}^n - Q_{i,j}^n, & \text{если } (i, j) \in (Mwell) \\ 1, & \text{если } (i, j) \text{ – ячейка имеет замер} \\ \frac{B_{i,j}^n V}{\Delta t} P_{i,j}^n, & \text{иначе} \end{cases}$$

Заполнение матрицы A СЛАУ

$$A^n(g, g) = a_{i,j}^n, \quad g = 1 \dots Nx \cdot Ny$$

$$A^n(g, g+1) = a_{e,i,j}^n, \quad g = 1 \dots Nx \cdot Ny - 1$$

$$A^n(g, g-1) = a_{w,i,j}^n, \quad g = 2 \dots Nx \cdot Ny$$

$$A^n(g, g-Nx) = a_{s,i,j}^n, \quad g = Nx+1 \dots Nx \cdot Ny$$

$$A^n(g, g+Nx) = a_{n,i,j}^n, \quad g = 1 \dots Nx \cdot Ny - Nx$$

Матрица СЛАУ выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} a_{i,j} & a_{e,i,j} & & a_{n,i,j} \\ a_{w,i,j} & a_{i,j} & a_{e,i,j} & & a_{n,i,j} \\ & a_{w,i,j} & 1 & a_{e,i,j} & \\ a_{s,i,j} & & a_{w,i,j} & a_{i,j} & a_{e,i,j} \\ & a_{s,i,j} & & a_{w,i,j} & a_{i,j} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_{i,j} \\ P_{i,j} \\ P_{i,j} \\ P_{i,j} \\ P_{i,j} \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} b_{i,j} \\ b_{i,j} \\ b_{i,j} \\ b_{i,j} \\ b_{i,j} \end{pmatrix}^n$$

Учет скважин

$$Q_{o,i,j}^n = \begin{cases} WI \cdot \frac{1}{\mu_o} (P_{i,j}^n - P_w), & \text{если } i, j - \text{я ячейка содержит скважину} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$Q_{w,i,j}^n = \begin{cases} WI \cdot \frac{1}{\mu_w} (P_{i,j}^n - P_w), & \text{если } i, j - \text{я ячейка содержит скважину} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$Q_{i,j}^n = Q_{o,i,j}^n + Q_{w,i,j}^n$$

$$\text{Где } WI = \frac{2\pi \sqrt{k_x k_y} \Delta z}{\ln\left(\frac{r_b}{r_w}\right)}$$

$$r_b = 0,28 \frac{\sqrt{\sqrt{\frac{k_y}{k_x} \Delta x^2 + \sqrt{\frac{k_x}{k_y} \Delta y^2}}}}{\left(\frac{k_y}{k_x}\right)^{\frac{1}{4}} + \left(\frac{k_x}{k_y}\right)^{\frac{1}{4}}}$$

r_w - радиус скважины.

В результате вычислений, получим значения давлений для всей поверхности месторождения, и построим карту изобар. Этот метод позволит нам получить более точные значения давлений и получить прирост по дополнительной добыче, что принесет дополнительные деньги компании.

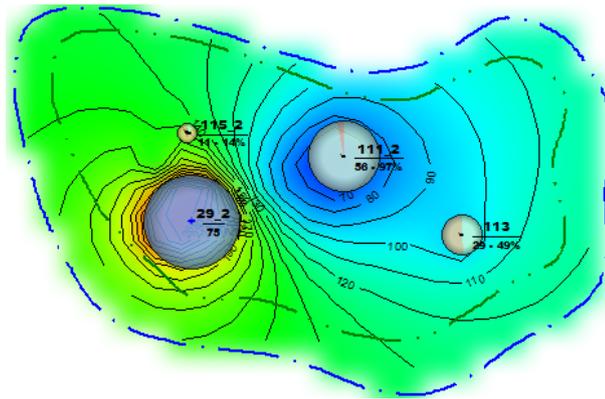


Рис.2. Карта, построенная существующим аналогом (2D фильтрация однофазной несжимаемой жидкости)

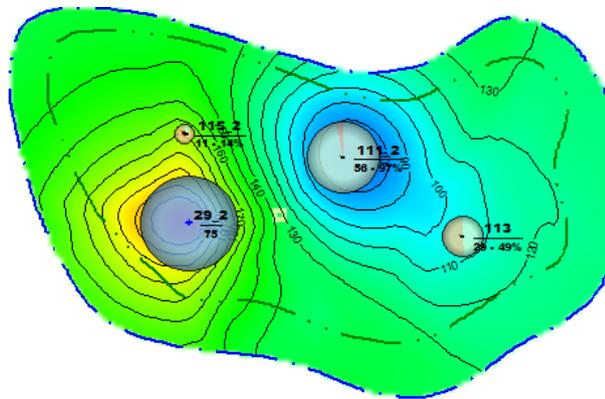


Рис.3. Карта, построенная предложенным методом (фильтрация сжимаемой жидкости)

Сжимаемость вносит существенное значение в распределение пластового давления в межскважном пространстве. Показано, что не учет сжимаемости при построении карт изобар может вносить значительную погрешность определения пластового давления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984.
2. Канаевская Р.Д. Математическое моделирование гидродинамических процессов разработки месторождений углеводородов. М.: Институт компьютерных исследований, 2002.
3. Вержбицкий В. М. Основы численных методов. М.: Высшая школа, 2009.