Д.Г. Рахимов, Ф.С.Рахимова
Ташкентский университет информационных технологий, г.Ташкент
УДК 517.948.67

О ВЫЧИСЛЕНИИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ Э. ШМИДТА МЕТОДОМ ЛОЖНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Аннотация. В работе методом ложных возмущений определяются кратные фредгольмовы собственные значения Э.Шмидта. Используется метод редукции для сведения кратных собственных значений к простому.

Ключевые слова: уравнение разветвления, оператор ложного возмущения, диаграмма Ньютона.

В работе [2] определяется фредгольмовость собственных значений Э.Шмидта и определяются обобщенные жордановые цепочки (ОЖЦ). Рассматривается численный метод, основанный на методе ложных возмущений для определения собственных значений Э.Шмидта и соответствующих им собственных элементов.

В данной работе исследуется возмущение спектра Э.Шмидта. Методами теории ветвления [4] строится уравнение разветвления собственного значения Э.Шмидта. Применяя метод диаграммы Ньютона к уравнению разветвления устанавливаются порядки зависимости собственного значения возмущенного оператора от возмущающего малого параметра ε. На основе результатов предыдущего параграфа строится алгоритм вычисления кратных фредгольмовых точек дискретного спектра Э. Шмидта методом ложных возмущений. Для упрощения вычислений используется метод редукции предложенный в работах [5,6].

1 Постановка задачи

Пусть $H-$ гильбертово пространство, и $B_0, A_0 : H \to H$ - линейные операторы.

Определение 1. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется собственным значением Э.Шмидта, если система уравнений

$$B_0\varphi = \lambda A_0\psi,\ B_0^*\psi = \lambda A_0\varphi \tag{1}$$

имеет нетривиальные решения (φ, ψ). Пару (φ, ψ) называют A_0 -собственным элементом Э.Шмидта соответствующим собственному значению λ.

В прямой сумме $H \bigoplus H$ равенства (1) можно написать в матричном виде

$$(\mathcal{B}_0 - \lambda \mathcal{A}_0) \oplus = \begin{pmatrix} -\lambda A_0^* & B_0^* \\ B_0 & -\lambda A_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = 0,$$

где

$$\mathcal{B}_0 = \begin{pmatrix} 0 & B_0^* \\ B_0 & 0 \end{pmatrix}, \; \mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} A_0^* & 0 \\ 0 & A_0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично определяются A_0^*-собственные элементы Э.Шмидта оператора B_0, отвечающие тем же собственным значениям λ

$$B_0 \tilde{\varphi} = \lambda A_0^* \tilde{\psi}, \; B_0^* \tilde{\psi} = \lambda A_0 \tilde{\varphi}$$

или

$$(\mathcal{B}_0^* - \lambda \mathcal{A}_0^*) \, \Psi = \left[\begin{pmatrix} 0 & B_0^* \\ B_0 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & A_0^* \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix} = 0.$$

Пусть $N(\mathcal{B}_0 - \lambda \mathcal{A}_0) = \{\Phi_i\}_1^n, \; N(\mathcal{B}_0^* - \lambda \mathcal{A}_0^*) = \{\Psi_i\}_1^m$.

Определение 2. Если $m = n$, то собственное значение λ называем фредгольмовым, в ином случае λ называется нетеровым.

Пусть λ_0 - фредгольмова точка спектра Шмидта оператор-функции $\mathcal{B}_0 - t\mathcal{A}_0$ с соответствующими $\mathcal{A}_0-$ и $\mathcal{A}_0^*-$ жордановыми цепочками с длинами $p_1 \le p_2 \le \dots \le p_n$:

$$(\mathcal{B}_0 - \lambda_0 \mathcal{A}_0) \, \Phi_{i0}^{(k)} = \mathcal{A}_0 \Phi_{i0}^{(k-1)}, \; (\mathcal{B}_0^* - \lambda_0 \mathcal{A}_0^*) \, \Psi_{i0}^{(k)} = \mathcal{A}_0^* \Psi_{i0}^{(k-1)}, \; k = \overline{2, p_i}, \; i = \overline{1, n},$$

$$K = det \left\| \langle \mathcal{A}_0 \Phi_{i0}^{(p_i)}, \Psi_{j0}^{(1)} \rangle \right\| \ne 0, \; L = det \, \|L_{ij}\| \ne 0, \; L_{ij} = det \left\| \langle \mathcal{A}_0 \Phi_{i0}^{(p_i+1-k)}, \Psi_{j0}^{(l)} \rangle \right\|,$$

$$k(l) = \overline{2, p_i(p_j)}, \; i(j) = \overline{1, n}.$$

Согласно [3] элементы $\Phi_{i0}^{(j)}, \Psi_{k0}^{(l)}, j(l) = \overline{2, p_i(p_k)}, i(k) = \overline{1, n}$ $\mathcal{A}_0$- и $\mathcal{A}_0^*$-жордановых наборов, отвечающих λ_0 оператор-функции $\mathcal{B}_0 - \lambda_0 \mathcal{A}_0$ могут быть выбраны так, чтобы выполнялись следующие соотношения биортогональности

$$\langle \Phi_{i0}^{(j)}, \Gamma_{k0}^{(l)} \rangle = \delta_{ik} \delta_{jl}, \; \langle Z_{i0}^{(j)}, \Psi_{k0}^{(l)} \rangle = \delta_{ik} \delta_{jl},$$

где $\Gamma_{k0}^{(l)} = \mathcal{A}_0^* \Psi_{k0}^{(p_k+1-l)}, \; Z_{i0}^{(j)} = \mathcal{A}_0 \Phi_{i0}^{(p_i+1-j)}$. Для нашей задачи эти соотношения имеют вид

$$\langle \Phi_{i0}^{(j)}, \Gamma_{k0}^{(l)} \rangle = \langle \varphi_{i0}^{(j)}, A_0^* \tilde{\varphi}_{k0}^{(p_k+1-l)} \rangle + \langle A_0 \psi_{i0}^{(j)}, \tilde{\psi}_{k0}^{(p_k+1-l)} \rangle = \delta_{ik} \delta_{jl},$$

$$\langle Z_{i0}^{(j)}, \Psi_{k0}^{(l)} \rangle = \langle \varphi_{i0}^{(p_i+1-j)}, A_0^* \tilde{\varphi}_{k0}^{(l)} \rangle + \langle A_0 \psi_{i0}^{(p_i+1-j)}, \tilde{\psi}_{k0}^{(l)} \rangle = \delta_{ik}\delta_{jl}.$$

Пусть $\varepsilon \subset \mathbb{C}-$ малый параметр, $|\varepsilon| \leq \varrho_0$ и $A(\varepsilon) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k \varepsilon^k : H \to H,$ возмущенная оператор-функция такая, что $A(0) = A_0$.

Ставится задача: найти собственные значения $\lambda_0 + \mu(\varepsilon)$ задачи

$$B_0 \varphi = \lambda A(\varepsilon) \psi, \ B_0^* \psi = \lambda A^*(\varepsilon) \varphi \tag{2}$$

такие, что $\mu(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, а также собственные элементы $\Phi_i(\varepsilon)$, отвечающие этим собственным значениям.

1.1 Построение уравнения разветвления.

Поставленную задачу запишем в матричной форме:

$$(\mathcal{B}_0 - \lambda_0 \mathcal{A}_0) \Phi = \mu \mathcal{A}(\varepsilon) \Phi + \lambda_0 \mathcal{A}_1(\varepsilon) \Phi$$

где

$$\mathcal{A}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} A^*(\varepsilon) & 0 \\ 0 & A(\varepsilon) \end{pmatrix}, \ \mathcal{A}_1(\varepsilon) = \mathcal{A}(\varepsilon) - \mathcal{A}_0.$$

Строим операторы

$$(\overline{\mathcal{B}_0 - \lambda \mathcal{A}(\varepsilon)})_i = \mathcal{B}_0 - \lambda \mathcal{A}(\varepsilon) + \sum_{j \neq i} \langle \cdot, \Gamma_{j0} \rangle Z_{j0}. \tag{3}$$

Теорема 2.1. При каждом $i = \overline{1, n}$ и достаточно малых ε существуют постоянные $c_{is}, d_{is}, s \neq i$ такие, что $\lambda_i(\varepsilon)$ является простым собственным значением оператора (2.3) с соответствующим собственным элементом $\tilde{\Phi}_i(\varepsilon) = \Phi_i + \sum\limits_{s \neq i} c_{is} \Phi_s$ и дефектным функционалом $\tilde{\Psi}_i(\varepsilon) = \Psi_i + \sum\limits_{s \neq i} d_{is} \Psi_s$.

Доказательство. Пусть $\lambda_i(\varepsilon)$ и $\tilde{\Phi}_i(\varepsilon)$ собственное значение с соответствующим собственным элементом оператора (2.3). Тогда

$$0 = (\overline{\mathcal{B}_0 - \lambda_i(\varepsilon) \mathcal{A}(\varepsilon)})_i \tilde{\Phi}_i(\varepsilon) =$$
$$= \sum_{j \neq i} c_{ij} (\mathcal{B}_0 - \lambda_i(\varepsilon) \mathcal{A}(\varepsilon)) \Phi_j(\varepsilon) + \sum_{j \neq i} \langle \Phi_i(\varepsilon), \Gamma_{j0} \rangle Z_{j0} + \sum_{j \neq i} \sum_{s \neq i} c_{is} \langle \Phi_s(\varepsilon), \Gamma_{j0} \rangle Z_{j0}$$

или после применения функционалов $\Psi_{k0}, k \neq i$ к обеим частям равенства

$$\sum_{j \neq i} c_{ij} \left[\langle \Phi_j(\varepsilon), \Gamma_{k0} \rangle + \langle (\mathcal{B}_0 - \lambda_i(\varepsilon) \mathcal{A}(\varepsilon)) \Phi_j(\varepsilon), \Psi_{k0} \rangle \right] = - \langle \Phi_i(\varepsilon), \Gamma_{k0} \rangle, k \neq i. \tag{4}$$

Здесь в силу разложений $\Phi_s(\varepsilon) = \Phi_{s0} + O(\varepsilon)$ и $\mathcal{A}(\lambda_i;\varepsilon) = \mathcal{A}(\lambda_0;0) + O(\varepsilon)$ имеем

$$(\mathcal{B}_0 - \lambda_i(\varepsilon)\mathcal{A}(\varepsilon))\,\Phi_s(\varepsilon) = (\mathcal{B}_0 - \lambda_i(\varepsilon)\mathcal{A}(\varepsilon))\,\Phi_i(\varepsilon) +$$
$$+ (\mathcal{B}_0 - \lambda_i(\varepsilon)\mathcal{A}(\varepsilon))\,(\Phi_s(\varepsilon) - \Phi_i(\varepsilon)) = (\mathcal{B}_0 - \lambda_i(\varepsilon)\mathcal{A}(\varepsilon))\,(\Phi_s(\varepsilon) - \Phi_i(\varepsilon)) =$$
$$= [(\mathcal{B}_0 - \lambda_0\mathcal{A}_0) + O(\varepsilon)]\,[\Phi_{s0} - \Phi_{i0} + O(\varepsilon)] = O(\varepsilon).$$

Так как $\langle \Phi_i(\varepsilon), \Gamma_{j0}\rangle = \langle \Phi_{i0} + O(\varepsilon), \Gamma_{j0}\rangle = \delta_{ij} + O(\varepsilon)$, то определитель системы (2.4) отличен от нуля и поэтому она имеет единственное решение. Единственность $\tilde{\Psi}_i(\varepsilon)$ доказывается аналогично.

Для каждого $i = \overline{1,n}$ уравнение $(\overline{\mathcal{B}_0 - \lambda_i(\varepsilon)\mathcal{A}(\varepsilon)})_i\tilde{\Phi}_i(\varepsilon) = 0$ записывается в виде

$$(\mathcal{B}_0 - \lambda_0\mathcal{A}_0)\,\tilde{\Phi}_i(\varepsilon) = \mu_i(\varepsilon)\mathcal{A}(\varepsilon)\tilde{\Phi}_i(\varepsilon) + \lambda_0\mathcal{A}_1(\varepsilon)\tilde{\Phi}_i(\varepsilon) - \sum_{j\neq i}\left\langle \tilde{\Phi}_i(\varepsilon), \Gamma_{j0}\right\rangle Z_{j0}.$$

С помощью регуляризатора Шмидта оно сводится к системе

$$\begin{cases} \tilde{\Phi}_i(\varepsilon) = \xi_i\,[I - \mu_i\Gamma\mathcal{A}(\varepsilon) - \lambda_0\Gamma\mathcal{A}_1(\varepsilon)]^{-1}\,\Phi_{i0}, \\ \xi_i = \langle\tilde{\Phi}_i(\varepsilon), \Gamma_{i0}\rangle, \end{cases} \tag{5}$$

где $\Gamma = \left[\mathcal{B}_0 - \lambda_0\mathcal{A}_0 + \sum\limits_{i=1}^{n}\langle\cdot,\Gamma_{i0}\rangle Z_{i0}\right]^{-1}$. Подставляя $\tilde{\Phi}_i(\varepsilon)$ во второе уравнение (2.5) строим уравнение разветвления:

$$\begin{aligned} &L_i(\mu_i,\varepsilon) \equiv \sum_{k+s=1}^{\infty} L_{ks}^{(i)}\mu_i^k\varepsilon^s \equiv \\ &\equiv \left\langle (\mu_i\mathcal{A}(\varepsilon) + \lambda_0\mathcal{A}_1(\varepsilon))\,[I - \mu_i\Gamma\mathcal{A}(\varepsilon) - \lambda_0\Gamma\mathcal{A}_1(\varepsilon)]^{-1}\,\Phi_{i0}, \Psi_{i0}\right\rangle = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

где в частности $L_{s0}^{(i)} = \left\langle \mathcal{A}_0\,(\Gamma\mathcal{A}_0)^{s-1}\,\Phi_{i0}, \Psi_{i0}\right\rangle$, $s = 1,2,...,$ $L_{0k}^{(i)} =$
$= \left\langle \sum\limits_{\alpha=1}^{k}\lambda_o^\alpha \sum\limits_{k_1+k_2+\dots+k_\alpha=k}\Gamma\mathcal{A}_{k_1}\dots\Gamma\mathcal{A}_{k_\alpha}\Phi_{i0}, \Gamma_{i0}\right\rangle$, $k = 1,2,....$

Теорема 2.2. Пусть $N(\mathcal{B}_0 - \lambda\mathcal{A}_0) = \{\Phi_i\}_1^n$, $N(\mathcal{B}_0^* - \lambda\mathcal{A}_0^*) = \{\Psi_i\}_1^n$. При отсутствии ОЖЦ для достаточно малых ε существует ровно n простых собственных значений $\lambda_i(\varepsilon)$ $(\lambda_i(0) = \lambda_0)$ с соответствующими собственными элементами $\tilde{\Phi}_i(\varepsilon)$ и дефектными функционалами $\tilde{\Psi}_i(\varepsilon)$, представимые в виде сходящегося ряда по целым степеням ε.

Доказательство. В силу условия теоремы $L_{10}^{(i)} = \langle\mathcal{A}_0\Phi_{i0}, \Psi_{i0}\rangle \neq 0$, $i = \overline{1,n}$. Если $L_{0q}^{(i)}$ первый отличный от нуля коэффициент из последовательности

$\{L_{0j}^{(i)}\}_1^{\infty}$, то применяя к (2.6) диаграмму Ньютона [4] определяем убывающую часть состоящую из отрезка соединяющего точки $(1,0)$ и $(0,q)$. Отсюда следует, что $\lambda_i(\varepsilon)$ и $\tilde{\Phi}_i(\varepsilon)$ представляются рядами по степеням ε^q.

Теорема 2.3. Если для каждого $i=\overline{1,n}$ ОЖЦ имеют длины p_i , причем $\left\langle \mathcal{A}_0\Phi_{i0}^{(p_i)}, \Psi_{i0}^{(1)} \right\rangle \neq 0$, то для достаточно малых ε существуют ровно $N=p_1+p_2+\cdots+p_n$ непрерывных по ε собственных значений $\lambda_i(\varepsilon)=\lambda_0+\mu_i(\varepsilon)$ с отвечающими им собственными элементами $\tilde{\Phi}_i(\varepsilon)$, представимые сходящимися рядами по целым степеням ε и по степеням $\varepsilon^{\frac{1}{p_i-1}}$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $L_{0j}^{(i)}=0$, $j=\overline{1,\infty}$, и $L_{11}^{(i)}\neq 0$. Тогда убывающая часть диаграммы Ньютона для уравнения разветвления (2.6) состоит из отрезка соединяющего точки $(1,1)$ и $(p_i,0)$. Отсюда следует, что $\lambda_i(\varepsilon)$ и $\tilde{\Phi}_i(\varepsilon)$ представляются сходящимися рядами по степеням $\varepsilon^{\frac{1}{p_i-1}}$, т.е. задача (2.2) имеет ровно $N=p_1+p_2+\cdots+p_n$ собственных значений, представимых сходящимися рядами по степеням $\varepsilon^{\frac{1}{p_i-1}}$.

Если же $L_{0j}^{(i)}=0$, $j=\overline{1,q_{i-1}}$, $L_{0q_{i-1}}^{(i)}\neq 0$ и $L_{11}^{(i)}\neq 0$, то убывающая часть диаграммы Ньютона состоит из двух отрезков, один из которых соединяет точки $(1,1)$ и $(p_i,0)$, а второй точки $(1,1)$ и $(0,q_i)$. Первому отрезку отвечает показатель $\frac{1}{p_i-1}$, а второму отрезку в любом случае - целочисленный показатель. Следовательно, задача (2.2) имеет n собственных значений, представимых сходящимися рядами по целым степеням ε и $N-n$ собственных значений,представимых сходящимися рядами по степеням $\varepsilon^{\frac{1}{p_i-1}}$. Каждому $\lambda_i(\varepsilon)$ отвечает собственный элемент $\tilde{\Phi}_i(\varepsilon)$, представимый сходящимся рядом по тем же степеням ε, что и соответствующий ему $\lambda_i(\varepsilon)$.

Замечание 1. Условие теоремы $\left\langle \mathcal{A}_0\Phi_{i0}^{(p_i)}, \Psi_{i0}^{(1)} \right\rangle \neq 0$ допускает возможность неполноты обобщенного жорданова набора [4].

Замечание 2. Полученные результаты обобщаются на банаховы пространства E_1, E_2 с операторами $B_0, A_0(A(\varepsilon))\in L(E_1,E_2)$, при плотном вложении $E_1\subset E_2\subset H$.

2 Уточнение собственных значений Э. Шмидта методом ложных возмущений

Теперь на основе метода регуляризации рассмотрим уточнение приближенно заданных собственных значений Шмидта и соответствующих им элементов ОЖЦ методом ложных возмущений. Результаты представлены в гильбертовых пространствах для упрощения изложения (см. замечание 2).

В прямой сумме $H \oplus H$ рассмотрим спектральную задачу Э. Шмидта (2.1). Пусть для n-кратного собственного числа Шмидта λ и отвечающих ему собственных и присоединенных элементов Шмидта $\{\varphi_k^{(j)}, \psi_k^{(j)}\}_{k=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,p_k}}$, $\{\tilde{\varphi}_k^{(j)}, \tilde{\psi}_k^{(j)}\}_{k=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,p_k}}$ известны достаточно хорошие приближения $|\lambda-\lambda_0| \leq \varepsilon, \|\varphi_i^{(j)}-\varphi_{i0}^{(j)}\| \leq \varepsilon, \|\psi_i^{(j)}-\psi_{i0}^{(j)}\| \leq \varepsilon, \|\tilde{\varphi}_i^{(j)}-\tilde{\varphi}_{i0}^{(j)}\| \leq \varepsilon, \|\tilde{\psi}_i^{(j)}-\tilde{\psi}_{i0}^{(j)}\| \leq \varepsilon$. Тем самым определены достаточно хорошие приближения $\lambda_0, \Phi_{k0}^{(j)}, \Psi_{k0}^{(j)}$ к собственному числу λ и элементам ОЖЦ $\Phi_k^{(j)}, \Psi_k^{(j)}, k=\overline{1,n}, j=\overline{1,p_k}$ соответствующих спектральных задач в прямых суммах гильбертовых пространств.

Справедлива (см. [2], [3])

Лемма. Переходя к линейным комбинациям, определяем системы

$$\{\Gamma_{k0}^{(l)}\}_{k=\overline{1,n}}^{l=\overline{1,p_k}},\ \Gamma_{k0}^{(l)}=A^*\Psi_{k0}^{(p_k+1-l)},\ \{Z_{k0}^{(l)}\}_{k=\overline{1,n}}^{l=\overline{1,p_k}},\ Z_{k0}^{(l)}=A\Phi_{k0}^{(p_k+1-l)},$$

удовлетворяющие соотношениям биортогональности

$$\langle \Phi_{i0}^{(j)}, \Gamma_{k0}^{(l)}\rangle = \delta_{ik}\delta_{jl},\ \ \langle Z_{i0}^{(j)}, \Psi_{k0}^{(l)}\rangle = \delta_{ik}\delta_{jl}.$$

Производим регуляризацию

$$\overline{\mathcal{B}-t\mathcal{A}} = \mathcal{B}-t\mathcal{A}+\sum_{k=2}^{p_1}\left\langle \cdot, \Gamma_{10}^{(k)}\right\rangle Z_{10}^{(p_1+1-k)}+\sum_{i=2}^{n}\sum_{k=1}^{p_i}\left\langle \cdot, \Gamma_{i0}^{(k)}\right\rangle Z_{i0}^{(p_1+1-k)}. \tag{7}$$

Согласно теореме 2.1 искомое собственное значение λ является простым фредгольмовым собственным значением оператор-функции (3.1). Более того, существуют постоянные $c_{is}, d_{is}, s=\overline{1,p_i}, i=\overline{1,n}$, такие, что соответствующие собственный элемент и дефектный функционал будут иметь вид

$$\widetilde{\Phi} = \Phi_1^{(p_1)}+\sum_{i=1}^{n} c_{i1}\Phi_i+\sum_{i=2}^{n}\sum_{s=2}^{p_i} c_{is}\Phi_i^{(s)}+\sum_{s=1}^{p_1-1} c_{1s}\Phi_1^{(s)},$$

$$\widetilde{\Psi} = \Psi_1+\sum_{i=2}^{n} d_{i1}\Psi_i+\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=2}^{p_i} d_{is}\Psi_i^{(s)}. \tag{8}$$

В качестве начальных приближений к $\widetilde{\Phi}, \widetilde{\Psi}$ выбираем элементы $\widetilde{\Phi}_0 = \Phi_{10}^{(p_1)} - \Phi_{10}^{(p_1-1)}$, $\widetilde{\Psi}_0 = \Psi_{10}$. За начальное приближение к собственному значению λ берем решение уравнения $\left\langle (\mathcal{B} - t\mathcal{A})\widetilde{\Phi}_0, \widetilde{\Psi}_0 \right\rangle = 0$, т.е. $\lambda_0 = \frac{\left\langle \mathcal{B}\widetilde{\Phi}_0, \widetilde{\Psi}_0 \right\rangle}{\left\langle \mathcal{A}\widetilde{\Phi}_0, \widetilde{\Psi}_0 \right\rangle}$.

Так как $\widetilde{k}_0 = \left\langle \mathcal{A}\widetilde{\Phi}_0, \widetilde{\Psi}_0 \right\rangle = \left\langle \mathcal{A}\Phi_{10}^{(p_1)}, \Psi_{10} \right\rangle - \left\langle \mathcal{A}\Phi_{10}^{(p_1-1)}, \Psi_{10} \right\rangle = \left\langle \mathcal{A}\Phi_{10}^{(p_1)}, \Psi_{10} \right\rangle \neq 0$, то биортогональные элементы к $\widetilde{\Phi}_0, \widetilde{\Psi}_0$ можно выбрать в виде $\widetilde{\Gamma}_0 = \frac{1}{\widetilde{k}_0}\mathcal{A}^*\Psi_{10}$, $\widetilde{Z}_0 = \frac{1}{\widetilde{k}_0}\mathcal{A}\widetilde{\Phi}_0$.

Оператор ложного возмущения определим следующим образом:

$$\mathcal{D}_0 x = \left\langle x, \widetilde{\Gamma}_0 \right\rangle (\overline{\mathcal{B} - \lambda_0\mathcal{A}})\widetilde{\Phi}_0 + \left\langle x, (\overline{\mathcal{B}^* - \lambda_0\mathcal{A}^*})\widetilde{\Psi}_0 \right\rangle \widetilde{Z}_0,$$

$$\mathcal{D}_0^* y = \left\langle (\overline{\mathcal{B} - \lambda_0\mathcal{A}})\widetilde{\Phi}_0, y \right\rangle \widetilde{\Gamma}_0 + \left\langle \widetilde{Z}_0, y \right\rangle (\overline{\mathcal{B}^* - \lambda_0\mathcal{A}^*})\widetilde{\Psi}_0.$$

Тогда $\mathcal{D}_0\widetilde{\Phi}_0 = (\overline{\mathcal{B} - \lambda_0\mathcal{A}})\widetilde{\Phi}_0$, $\mathcal{D}_0^*\widetilde{\Psi}_0 = (\overline{\mathcal{B}^* - \lambda_0\mathcal{A}^*})\widetilde{\Psi}_0$, т.е. $N(\overline{\mathcal{B} - \lambda_0\mathcal{A}}) = \{\widetilde{\Phi}_0\}, N(\overline{\mathcal{B}^* - \lambda_0\mathcal{A}^*}) = \{\widetilde{\Psi}_0\}$.

Используя регуляризатор Шмидта уравнение $(\overline{\mathcal{B} - t\mathcal{A}})x = 0$ сводится к системе

$$\begin{cases} x = \xi \left[I + \overline{}_0 \left(\mathcal{D}_0 - (t - \lambda_0)\mathcal{A}\right)\right]^{-1} \widetilde{\Phi}_0, \\ \xi = \langle x, \widetilde{\Gamma}_0 \rangle. \end{cases} \tag{9}$$

где $\overline{}_0 = \left[\overline{\mathcal{B} - \lambda_0\mathcal{A}} - \mathcal{D}_0 + \langle \cdot, \widetilde{\Gamma}_0 \rangle \widetilde{Z}_0\right]^{-1}$.

Подстановка первого равенства во второе дает уравнение разветвления

$$F(t) \equiv 1 - \left\langle \left[I + \overline{\Gamma}_0 \left(\mathcal{D}_0 - (t - \lambda_0)\mathcal{A}\right)\right]^{-1} \widetilde{\Phi}_0, \widetilde{\Gamma}_0 \right\rangle = 0, \tag{10}$$

Искомое λ является простым корнем уравнения разветвления.

Тогда согласно теореме 2.1 работы [6] при достаточно хороших начальных приближений уравнение (3.4) имеет единственное решение, которое можно определить модифицированным методом Ньютона:

$$\lambda_{m+1} = \lambda_m - \left[F'(\lambda_0)\right]^{-1} F(\lambda_m), \ m = 0, 1, 2, \ldots,$$

Заметим, что на каждом шаге необходимо решать одно операторное уравнение

$$\left[\overline{\mathcal{B} - \lambda_m\mathcal{A}} + \langle \cdot, \widetilde{\Gamma}_0 \rangle \widetilde{Z}_0\right] x = \widetilde{Z}_0.$$

Элементы ОЖЦ $\Phi_i^{(j)}, \Psi_k^{(l)}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, p_i}, l = \overline{1, p_k}, k = \overline{1, m}$ определяются из следующих рекуррентных уравнений:

$$\left[\mathcal{B} - \lambda\mathcal{A} + \sum_{s=1}^{n} \langle \cdot, \Gamma_{s0} \rangle Z_{s0}\right] X = Z_{i0}, \ \left[\mathcal{B}^* - \lambda\mathcal{A}^* + \sum_{s=1}^{n} \langle Z_{s0}, \cdot \rangle \Gamma_{s0}\right] Y = \Gamma_{i0},$$

$$\left[\mathcal{B} - \lambda\mathcal{A} + \sum_{s=1}^{n}\langle\cdot, \Gamma_{s0}\rangle Z_{s0}\right] X_{j,i} = \mathcal{A}X_{j-1,i} + Z_{i0},\ X_{1i} = \Phi_i,\ X_{j,i} = \Phi_i^{(j)};$$

$$j = \overline{1, p_i},\ i = \overline{1, n};$$

$$\left[\mathcal{B}^* - \lambda\mathcal{A}^* + \sum_{s=1}^{n}\langle Z_{s0}, \cdot\rangle \Gamma_{s0}\right] Y_{j,i} = \mathcal{A}^*Y_{j-1,i} + \Gamma_{i0},\ Y_{1i} = \Psi_i,\ Y_{j,i} = \Psi_i^{(j)};$$

$$j = \overline{1, p_i},\ i = \overline{1, m}.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Логинов Б.В. О нахождении собственных чисел и фундаментальных элементов Шмидта вполне непрерывных операторов в гильбертовом пространстве, ДАН УзССР, 1965, № 10, 5-8.

[2] Логинов Б.В., Макеева О.В. Метод ложных возмущений в применении к спектральным задачам Э.Шмидта, Вестник СамГУ, серия "Математическая Самара, 2007, № 1(5), с. 65-74.

[3] Макеева О.В. Метод ложных возмущений в обобщенной задаче на собственные значения. Кандидатская диссертация, Ульяновск, 2007, с. 142.

[4] Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М., Наука, 1969.

[5] Рахимов Д.Г. О вычислении кратных собственных значений редукционным методом ложных возмущений, Жур. СВМО, 2010, № 3, стр. 106-112.

[6] Рахимов Д.Г. О регуляризации кратных собственных значений редукционным методом ложных возмущений. Вестник Самарского Государственного Университета, Естественнонаучная серия, 2012, № 6(97), стр. 35-41.

[7] Гавурин М. К. О методе ложных возмущений для нахождения собственных значений, Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1961, т.1, № 5, стр. 751-770.