И.В. Слезко, В.Г. Шармин, Д.В. Шармин
Тюменский государственный университет, г. Тюмень

УДК 514.7

ГАУССОВА КРИВИЗНА НОРМАЛЬНОГО ОБРАЗА ПЛОСКОГО ТОРА В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Аннотация. В статье дано определение нормального отображения двумерной поверхности в гиперплоскость в E^4. Доказаны некоторые свойства плоского тора в E^4, в том числе показано, что он является поверхностью без кручения. Найдена гауссова кривизна нормального образа плоского тора.

Ключевые слова: поверхность без кручения, нормальное отображение поверхности, плоский тор, гауссова кривизна.

Основные определения и теоремы. Пусть регулярная поверхность F^2 класса C^3 задана в E^4 вектор-функцией $\vec{r} = \vec{r}(u_1, u_2) \in C^3$. Так как поверхность F^2 регулярная, то во всех точках этой поверхности существуют касательная и нормальная плоскости.

Зададим в каждой нормальной плоскости ортонормированный базис, состоящий из векторов $\vec{n} = \{n_1, n_2, n_3, n_4\}$ и $\vec{m} = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$. В результате на поверхности F^2 появятся два векторных поля $\vec{n}(u_1, u_2)$ и $\vec{m}(u_1, u_2)$. Пусть эти поля принадлежат классу C^2 и при этом $n_4(u_1, u_2) \neq 0$ и не является постоянной функцией.

Будем использовать следующие обозначения для коэффициентов первой и вторых квадратичных форм поверхности F^2:

1) $g_{ij} = \vec{r}_{u_i} \cdot \vec{r}_{u_j}$ – коэффициенты первой квадратичной формы;
2) $B_{ij} = \vec{r}_{u_i u_j} \cdot \vec{n}$ – коэффициенты второй квадратичной формы, соответствующей единичному вектору нормали $\vec{n}$;
3) $b_{ij} = \vec{r}_{u_i u_j} \cdot \vec{m}$ – коэффициенты второй квадратичной формы, соответствующей вектору $\vec{m}$.

Гауссова кривизна поверхности F^2 вычисляется по формуле

$$K = K_1 + K_2, \tag{1}$$

$$K_1 = \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}, K_2 = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}, \tag{2}$$

причем значение K не зависит от выбора базиса $\vec{n}, \vec{m}$ [3].

Базис $\vec{n}, \vec{m}$ называется *канонический нормальным базисом для F^2 в E^4*, если выполняется условие:

$$B_{11}b_{22} - 2B_{12}b_{12} + B_{22}b_{11} = 0. \tag{3}$$

Величины

$$p = (\vec{n})_u \cdot \vec{m}, \qquad q = (\vec{n})_v \cdot \vec{m} \tag{4}$$

называют *коэффициентами кручения поверхности, вычисленными в нормалях $\vec{n}, \vec{m}$* [4; 38-39].

Нормальный базис $\vec{n}, \vec{m}$, в котором коэффициенты кручения p, q тождественно равны нулю, называется *системой нормалей без кручения*. Поверхность F^2, у которой система нормалей без кручения является канонической, называется *поверхностью без кручения* [4; 39].

Используя определения сферического и нормального отображений поверхности, приведенные в [1; 207-208], дадим следующее определение.

Рассмотрим отображение

$$\psi_1 : F^2 \to E_N^3, \tag{5}$$

которое каждой точке M поверхности F^2 ставит в соответствие точку M' гиперплоскости E_N^3, являющейся касательной гиперплоскостью в точке N к единичной гиперсфере S^3 с центром в точке O, такую, что $\overrightarrow{OM''} = \vec{n}(M)$, где $M'' = S^3 \cap OM'$, а вектор $\vec{n}(M)$ принадлежит векторному полю $\vec{n}$ и является нормальным вектором к F^2 в точке M.

Аналогично можно рассмотреть отображение $\psi_2 : F^2 \to E_N^3$.

Отображения ψ_1 и ψ_2 будем называть *нормальными отображениями поверхности F^2 в E_N^3*.

В статье [5] доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть регулярная поверхность F^2 класса C^3 в E^4, заданная вектор-функцией $\vec{r} = \vec{r}(u_1, u_2)$, обладает следующими свойствами: a) поля нормалей $\vec{n}(u_1, u_2)$ и $\vec{m}(u_1, u_2)$ есть система нормалей без кручения; b) коэффициенты квадратичных форм поверхности g_{ij} и B_{ij} пропорциональны *(*$i, j = 1,2$*);* c) координатные линии на поверхности ортогональны. Пусть также ранг матрицы Якоби нормального отображения $\psi_1 : F^2 \to E_N^3$ равен двум в каждой точке поверхности F^2. Тогда гауссова кривизна поверхности $\psi_1(F^2)$ вычисляется по формуле

$$\tilde{K} = \frac{\det(P_{ij}) - \gamma C K_1 (P_{11} g_{22} + P_{22} g_{11}) + \gamma^2 g_{11} g_{22} (C^2 K_1^2 + K_1 K_2)}{\gamma^2 \alpha^2 (\gamma_{u_1}^2 g_{22} + \gamma_{u_2}^2 g_{11}) + \gamma^4 K_1^2 g_{11} g_{22}}, \qquad (6)$$

где K_1, K_2, α зависят только от коэффициентов первой и вторых квадратичных форм исходной поверхности F^2, а P_{ij}, C зависят от этих коэффициентов и от $\gamma(u_1, u_2) = \frac{1}{n_4(u_1, u_2)} \neq 0$ следующим образом:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{B_{11}}{g_{11}} = \frac{B_{22}}{g_{22}} = \alpha; \qquad (7)$$

$$C = \frac{\gamma B_{11} B_{22}}{\sqrt{\gamma_{u_1}^2 B_{22}^2 g_{11} + \gamma_{u_2}^2 B_{11}^2 g_{22} + \gamma^2 B_{11}^2 B_{22}^2}}; \qquad (8)$$

$$P_{ij} = \gamma_{u_i} \gamma_{u_j} C - A_j \gamma_{u_i} \alpha_j g_{jj} - A_i (\gamma \alpha_i)_{u_j} g_{ii} - Q_{ij}, \text{где} \qquad (9)$$

$$Q_{ij} = \begin{cases} A_1 \gamma \alpha_i \dfrac{(g_{ij})_{u_1}}{2} - A_2 \gamma \alpha_i \dfrac{(g_{ij})_{u_2}}{2}, i = j, \\ -A_i \gamma \alpha_i \dfrac{(g_{ii})_{u_j}}{2} - A_j \gamma \alpha_i \dfrac{(g_{jj})_{u_i}}{2}, i \neq j; \end{cases} \qquad (10)$$

$$A_1 = \frac{\gamma_{u_1} B_{22}}{\sqrt{\gamma_{u_1}^2 B_{22}^2 g_{11} + \gamma_{u_2}^2 B_{11}^2 g_{22} + \gamma^2 B_{11}^2 B_{22}^2}}; \qquad (11)$$

$$A_2 = \frac{\gamma_{u_2} B_{11}}{\sqrt{\gamma_{u_1}^2 B_{22}^2 g_{11} + \gamma_{u_2}^2 B_{11}^2 g_{22} + \gamma^2 B_{11}^2 B_{22}^2}}. \qquad (12)$$

Теорема 2. Пусть поверхность F^2 является поверхностью без кручения. Для того чтобы поверхность $\psi_1(F^2)$ была поверхностью без кручения необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$P_{11}\alpha_2 b_{22} - P_{12}\alpha_2 b_{21} - P_{21}\alpha_1 b_{12} + P_{22}\alpha_1 b_{11} = 0, \qquad (13)$$

$$K_2 = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = 0. \qquad (14)$$

Постановка задачи. В трехмерном евклидовом пространстве на торе имеются точки, в которых гауссова кривизна равна нулю, и точки, в которых она отлична от нуля. При этом интегральная кривизна тора (поверхностный интеграл функции кривизны по площади) равна нулю. В четырехмерном евклидовом пространстве тор может быть задан так, что во всех его точках гауссова кривизна равна 0. Такой тор получил название плоского тора. Он задается вектор-функцией

$$\vec{r} = \vec{r}(\varphi, \psi) = \{\cos\varphi, \sin\varphi, \cos\psi, \sin\psi\}, 0 \le \varphi < 2\pi, 0 \le \psi < 2\pi. \qquad (15)$$

В 1950-х годах Николас Кейпер и нобелевский лауреат Джон Нэш доказали существование плоского тора в трехмерном евклидовом пространстве, то есть существование поверхности, топологически эквивалентной квадрату с отождествленными противоположными сторонами и имеющей нулевую гауссову кривизну в каждой своей точке. Н. Кейпер и Д. Нэш, доказав существование такой поверхности, не смогли визуализировать ее. Впервые изображение плоского тора в E^3 удалось получить в 2012 году группе французских ученых. Опираясь на результаты, полученные в 1970-е годы М. Громовым, они разработали алгоритм и с его помощью построили трехмерную компьютерную модель поверхности (рис. 1). Как видно из рисунка, поверхность, хотя и напоминает тор, имеет необычные свойства. В частности, поверхность является периодичной (самоподобной), и представляет собой нечто среднее между обычными поверхностями и фракталами, оставаясь при этом гладкой [6].

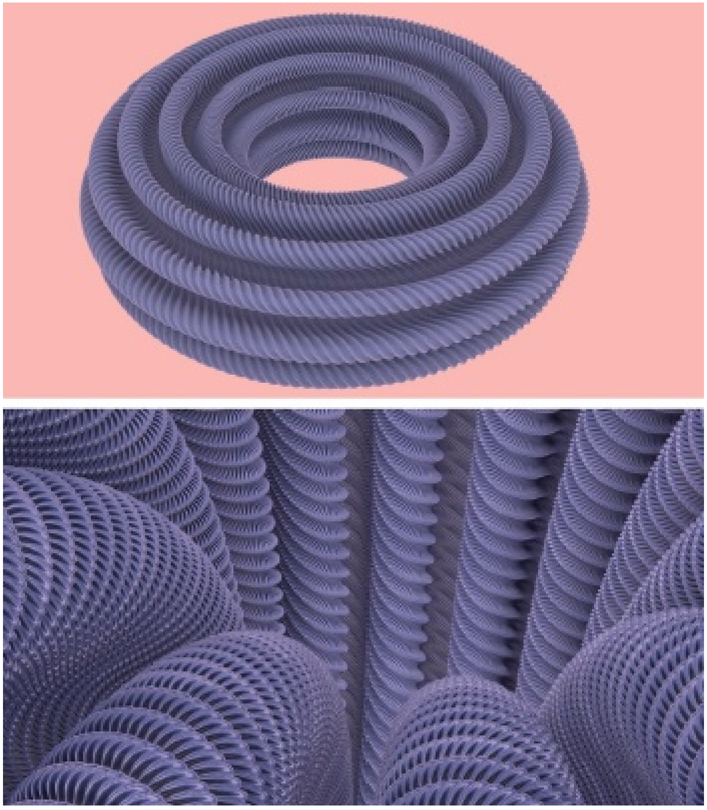

Рис. 1. Плоский тор (вид снаружи и изнутри)

Требуется показать, что поверхность, заданная вектор-функцией (15), удовлетворяет условиям теорем 1 и 2, и найти гауссову кривизну $\widetilde{K}$ нормального образа плоского тора.

Решение задачи. Очевидно, что

$$\vec{r}_\varphi = \{-\sin\varphi, \cos\varphi, 0,0\}, \qquad \vec{r}_\psi = \{0,0, -\sin\psi, \cos\psi\},$$
$$\vec{r}_{\varphi\varphi} = \{-\cos\varphi, -\sin\varphi, 0,0\}, \qquad \vec{r}_{\psi\psi} = \{0,0, -\cos\psi, -\sin\psi\}, \tag{16}$$
$$\vec{r}_{\varphi\psi} = \{0,0,0,0\}.$$

Рассмотрим векторы $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\cos\varphi, \sin\varphi, \cos\psi, \sin\psi\}$ и $\vec{m} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{-\cos\varphi, -\sin\varphi, \cos\psi, \sin\psi\}$.

Легко проверить, что $\vec{n}\cdot\vec{r}_\varphi = 0$, $\vec{n}\cdot\vec{r}_\psi = 0$, $\vec{m}\cdot\vec{r}_\varphi = 0$, $\vec{m}\cdot\vec{r}_\psi = 0$, $\vec{n}\cdot\vec{m} = 0$, а также $|\vec{n}| = 1$, $|\vec{m}| = 1$. Значит, единичные векторы $\vec{n}$ и $\vec{m}$ образуют базис нормальной плоскости поверхности, заданной уравнением (15).

Так как $\vec{r}_\varphi \cdot \vec{r}_\psi = 0$, то координатные линии на поверхности плоского тора ортогональны, то есть выполнено условие c) теоремы 1.

Вычислим коэффициенты первой и вторых квадратичных форм плоского тора:

$$g_{11}=\vec{r}_{\varphi}^{\,2}=1, g_{12}=\vec{r}_{\varphi}\cdot\vec{r}_{\psi}=0, g_{22}=\vec{r}_{\psi}^{\,2}=1,$$
$$B_{11}=\vec{r}_{\varphi\varphi}\cdot\vec{n}=-\frac{1}{\sqrt{2}}, B_{12}=\vec{r}_{\varphi\psi}\cdot\vec{n}=0, B_{22}=\vec{r}_{\psi\psi}\cdot\vec{n}=-\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad (17)$$
$$b_{11}=\vec{r}_{\varphi\varphi}\cdot\vec{m}=\frac{1}{\sqrt{2}}, b_{12}=\vec{r}_{\varphi\psi}\cdot\vec{m}=0, b_{22}=\vec{r}_{\psi\psi}\cdot\vec{m}=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Из (17) можем заключить, что плоский тор удовлетворят условию b) теоремы 1, так как $\frac{B_{11}}{g_{11}}=\frac{B_{12}}{g_{12}}=\frac{B_{22}}{g_{22}}$.

$$\vec{n}_{\varphi}=\frac{1}{\sqrt{2}}\{-\sin\varphi,\cos\varphi,0,0\}, \qquad \vec{n}_{\psi}=\frac{1}{\sqrt{2}}\{0,0,-\sin\psi,\cos\psi\}. \qquad (18)$$

Используя (4), найдем коэффициенты кручения плоского тора в нормалях $\vec{n}$ и $\vec{m}$. Получим

$$p_1=\vec{n}_{\varphi}\cdot\vec{m}=0, \qquad p_2=\vec{n}_{\psi}\cdot\vec{m}=0. \qquad (19)$$

Из (19) вытекает, что поля нормалей $\vec{n},\vec{m}$ есть система нормалей без кручения, то есть выполнено условие a) теоремы 1.

Из (3) и (17) следует, что базис $\vec{n},\vec{m}$ является каноническим, поскольку

$$B_{11}b_{22}-2B_{12}b_{12}+B_{22}b_{11}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-0+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}=0. \qquad (20)$$

Таким образом, плоский тор в E^4, заданный вектор-функцией (15), удовлетворяет всем условиям теоремы 1. Кроме того, он представляет собой поверхность без кручения, то есть удовлетворяет условию теоремы 2.

Используя теорему 1, найдем гауссову кривизну $\widetilde{K}$ нормального образа плоского тора (15).

По формулам (2) и (7) с учетом (17) имеем

$$K_1=\frac{1}{2}, \qquad K_2=-\frac{1}{2}, \qquad \alpha=-\frac{1}{\sqrt{2}}. \qquad (21)$$

Так как

$$\gamma(\varphi,\psi)=\frac{\sqrt{2}}{\sin\psi}, \qquad (22)$$

то

$$\gamma_\varphi = 0, \qquad \gamma_\psi = -\frac{\sqrt{2}\cos\psi}{\sin^2\psi}. \tag{23}$$

Используем формулы (11), (12), (17), (22) и (23). Получим

$$A_1 = \frac{\gamma_\varphi B_{22}}{\sqrt{\gamma_\varphi^2 B_{22}^2 g_{11} + \gamma_\psi^2 B_{11}^2 g_{22} + \gamma^2 B_{11}^2 B_{22}^2}} = 0, \tag{24}$$

$$A_2 = \frac{\gamma_\psi B_{11}}{\sqrt{\gamma_\varphi^2 B_{22}^2 g_{11} + \gamma_\psi^2 B_{11}^2 g_{22} + \gamma^2 B_{11}^2 B_{22}^2}} = \frac{\sqrt{2}\cos\psi}{\sqrt{1+\cos^2\psi}}, \tag{25}$$

$$C = \frac{\sin\psi}{\sqrt{1+\cos^2\psi}}. \tag{26}$$

Поскольку $g_{11} = g_{22} = 1, g_{12} = 0$, то согласно (10) $Q_{ij} = 0$ при $i,j = 1,2$. С учетом этого и используя формулы (9), (17), (21), (23), (24), (25), (26), найдем P_{11}, P_{12}, P_{22}:

$$P_{11} = \gamma_\varphi^2 C - A_1\gamma_\varphi \alpha g_{11} - A_1 \gamma_\varphi \alpha g_{11} = 0, \tag{27}$$

$$P_{12} = \gamma_\varphi \gamma_\psi C - A_2 \gamma_\varphi \alpha g_{22} - A_1 \gamma_\psi \alpha g_{11} = 0, \tag{28}$$

$$P_{22} = \gamma_\psi^2 C - A_2 \gamma_\psi \alpha g_{22} - A_2 \gamma_\psi \alpha g_{22} = \frac{2\cos^2\psi\left(1-\sqrt{2}\sin\psi\right)}{\sin^3\psi\sqrt{1+\cos^2\psi}}. \tag{29}$$

Так как $P_{11} = 0, P_{12} = 0$, то

$$\det\left(P_{ij}\right) = 0. \tag{30}$$

Подставим теперь (17), (21), (22), (23), (26), (27), (29), (30) в (6) и преобразуем полученное выражение:

$$\widetilde{K} = \frac{-\gamma C K_1 P_{22} g_{11} + \gamma^2 g_{11} g_{22} (C^2 K_1^2 + K_1 K_2)}{\gamma^2 \alpha^2 \gamma_\psi^2 g_{11} + \gamma^4 K_1^2 g_{11} g_{22}} = \frac{-\frac{1}{2}\gamma C P_{22} + \gamma^2\left(\frac{1}{4}C^2 - \frac{1}{4}\right)}{\frac{1}{2}\gamma^2\gamma_\psi^2 + \frac{1}{4}\gamma^4} =$$

$$= \frac{-2CP_{22} + \gamma(C^2 - 1)}{2\gamma\gamma_\psi^2 + \gamma^3} =$$

$$= \frac{-2\frac{\sin\psi}{\sqrt{1+\cos^2\psi}}\frac{2\cos^2\psi(1-\sqrt{2}\sin\psi)}{\sin^3\psi\sqrt{1+\cos^2\psi}}+\frac{\sqrt{2}}{\sin\psi}\left(\frac{\sin^2\psi}{1+\cos^2\psi}-1\right)}{2\frac{\sqrt{2}}{\sin\psi}\frac{2\cos^2\psi}{\sin^4\psi}+\frac{2\sqrt{2}}{\sin^3\psi}} =$$

$$= \frac{\cos^2\psi(\sin\psi-\sqrt{2})\sin^3\psi}{(1+\cos^2\psi)^2}.$$

Таким образом, гауссова кривизна нормального образа плоского тора

$$\widetilde{K} = \frac{\cos^2\psi\sin^3\psi(\sin\psi-\sqrt{2})}{(1+\cos^2\psi)^2}. \quad (31)$$

Из полученной формулы видно, что $\widetilde{K}$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Ее знак зависит от знака $\sin\psi$. Кроме того, с учетом наложенного при выводе формулы (31) ограничения ($\sin\psi \neq 0$), можно утверждать, что $\widetilde{K} = 0$ при $\psi = \frac{\pi}{2}$ и $\psi = \frac{3\pi}{2}$.

Легко убедиться, что согласно (2) и (21) кривизна самого плоского тора в любой точке поверхности $K = K_1 + K_2 = 0$.

Заметим, что $\widetilde{K}$ зависит только от одного параметра ψ. Этот результат не является неожиданным. Например, для обычного тора в E^3, заданного параметрическими уравнениями $x = (a + b\cos u)\cos v, y = (a + b\cos u)\sin v$, $z = b\sin u$, гауссова кривизна

$$K = \frac{\cos u}{b(a + b\cos u)},$$

то есть также зависит лишь от одного параметра u [2; 229].

Основной результат. Таким образом, установлено, что двумерный плоский тор в E^4, который задается вектор-функцией (15), удовлетворяет условиям теорем 1 и 2, в частности, является поверхностью без кручения. Найдена гауссова кривизна нормального образа плоского тора. Выяснено, что она зависит только от одного параметра ψ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бакельман, И.Я. Введение в дифференциальную геометрию в «целом» / И.Я. Бакельман, А.Л. Вернер, Б.Е. Кантор. – М.: Изд-во «Наука», 1973. − 440 с.
2. Белько, И.В. Сборник задач по дифференциальной геометрии / И.В. Белько, В.И. Ведерников, В.Т. Воднев и др.; под ред. А.С. Феденко. – М.: Изд-во «Наука», 1979. − 272 с.
3. Рамазанова, К.Ш. Теория кривизны X_2 в E_4 / К.Ш. Рамазанова // Известия вузов. Математика. – 1966. – № 6. – С. 137-143.
4. Фирсов, А.И. Канонические нормали поверхностей большой коразмерности / А.И. Фирсов // Вестник МГУ. – 1976. – № 2. – С. 37-42.
5. Шармин, В.Г. Свойства нормального образа поверхности специального вида в E^4 / В.Г. Шармин, Д.В. Шармин // Вестник БГУ. Математика, информатика. – Улан-Удэ. – 2017. – Выпуск 1. – С. 3-9.
6. Borrelli, V. Flat tori in three-dimensional space and convex integration / Vincent Borrelli, Said Jabrane, Francis Lazarus, Boris Thibert // Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. – May 8, 2012. – vol. 109. – no. 19. – P. 7218-7223. – Режим доступа: http://www.pnas.org/content/109/19/7218.full.pdf (дата обращения 20.02.2017).