И.В. Слезко
Тюменский государственный университет, г. Тюмень

Е.Б. Слезко
«Физико-математическая школа» Тюменской области, г. Тюмень

УДК 517.511, 004.928

ГРАФИК ФУНКЦИИ С ПАРАМЕТРОМ. АНИМАЦИОННАЯ ВИЗУАЛИЗАЦИЯ В СИСТЕМЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ MAPLE

Аннотация. В данной статье рассмотрен вопрос об особенностях построения и анализа графика функции, содержащей параметр, на основе линейной функции. В качестве приложения приводится решение нелинейного уравнения с параметром.

Ключевые слова: линейная функция, уравнение с параметром, график функции.

При описании различных процессов строится математическая модель, которая выражается в виде уравнения и/или системы уравнений. Как правило, такие уравнения содержат ряд параметров, которые характеризуют рассматриваемый реальный процесс. Рассматривать уравнения, функции, содержащие параметр в средней школе начинают в курсе математики в 5-6 классе. Заметим, что задания с параметром, включенные в ЕГЭ по математике в 11 классе традиционно вызывают трудности у выпускников.

Далее будем рассматривать линейную функцию и функции, заданные на ее основе, например, содержащие переменную и/или параметр под знаком модуля. Графическую и анимационную визуализацию будем проводить с помощью системы символьной математики Maple, используя встроенный пакет графики Plots [1]. При задании команд пакета, реализующих режим анимации, будем использовать специальную опцию «trace», которая позволяет каждой конкретной кривой оставлять след. При необходимости можно среди построенных кривых выделить только одну, или, «отмотав» назад, проследить обратный ход.

При построении графиков рассматриваемых функций особое внимание будем уделять тому, как происходит изменение положения («движение») графика при изменении параметра. Понимание этого факта помогает при решении уравнений и неравенств с параметром графическим методом, в частности, помогает выделить особые положения графиков, от которых зависит существование решений и их количество.

Как известно, уравнение линейной функции имеет вид $y = kx + b$, где k – угловой коэффициент, b – отрезок, отсекаемый на оси ординат. Зафиксируем угловой коэффициент k=2 и будем рассматривать функцию $y = 2x + a$, где a – параметр. Получим семейство параллельных прямых с заданным угловым коэффициентом, причем при изменении a от $-\infty$ до $+\infty$ эти прямые «движутся» справа налево, если же задать уравнение прямой в виде $y = kx - a$, то «движение» будет осуществляться в противоположном направлении (рис. 1).

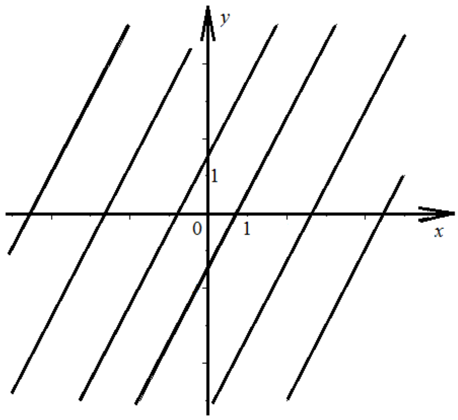

Рис. 1. Семейство параллельных прямых

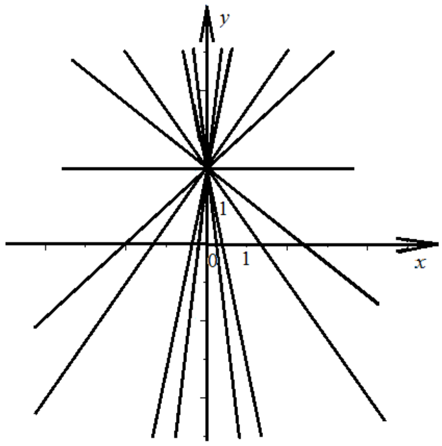

Рис. 2. Пучок прямых

Пусть теперь зафиксируем коэффициент b=2 и рассмотрим функцию $y = ax + 2$. Получим пучок прямых, центром которого является точка (0; 2). При изменении a от $-\infty$ до $+\infty$ вращение видим против хода часовой стрелки (рис. 2). Заметим, что уравнение $y = ax + b$ ни при каких значениях параметра не будет задавать вертикальную прямую, проходящую через центр пучка. Как известно, уравнение прямой с заданным угловым коэффициентом k, проходящей через заданную точку $(x_0; y_0)$ имеет вид $y = k(x - x_0) + y_0$. Таким образом, если уравнение линейной функции с параметром можно привести к виду $y = a(x - x_0) + y_0$, то оно будет задавать уравнение пучка прямых с центром в точке $(x_0; y_0)$ (без вертикали).

Если же ввести параметр в оба коэффициента, то увидеть закономерность в изменении положения графика функции будет сложнее.

Рассмотрим функцию $y = k|x - x_0| + y_0$ и введем параметр в $(x_0; y_0)$. Пусть зафиксируем $x_0 = 3$ и $y = |x - 3| + a$. Получим семейство ломаных (рис. 3), вершины которых «скользят» снизу вверх вдоль прямой x=3, то есть, в общем случае, вдоль прямой $x = x_0$.

Теперь зафиксируем $y_0 = -2$ и $y = |x - a| - 2$. Получим семейство ломаных (рис. 4), ветви которых параллельны и вершины «скользят» слева направо вдоль прямой y=3, то есть, в общем случае, вдоль прямой $y = y_0$.

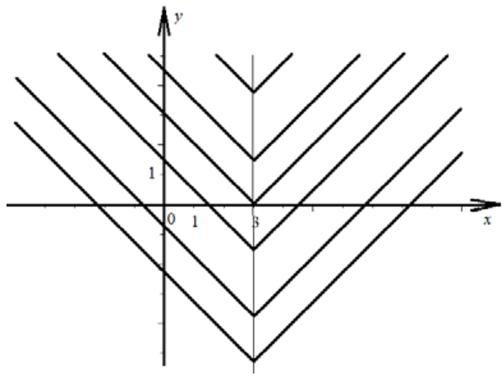

Рис. 3. Ломаные $\boldsymbol{y = |x-3| + a}$

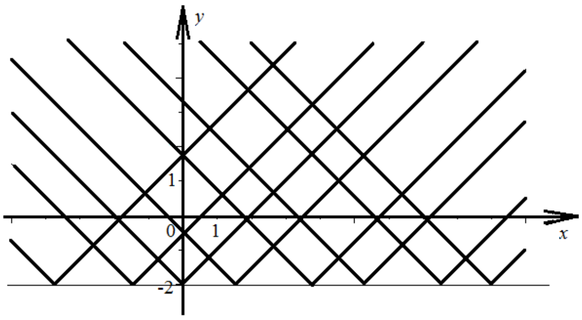

Рис.4. Ломаные $\boldsymbol{y = |x-a| - 2}$

Графиком функции $y = |x-a| + a$ является семейство ломаных, вершины которых «скользят» слева направо вдоль прямой $y = x$ и правые ветви накладываются друг на друга (рис. 5). Заметим, что подобная картина наблюдается, если рассматривать функцию $y = |x-ka| + ka$ Аналогично, для функции $y = |x-2a| + 3a$ (рис.6). Видим, что если коэффициенты при a различны, то вершины «скользят» вдоль прямой $y = \frac{3}{2}x$. Уравнение прямой, вдоль которой «скользят» вершины ломаных, в каждом конкретном случае можно получить, зная, например, координаты двух точек.

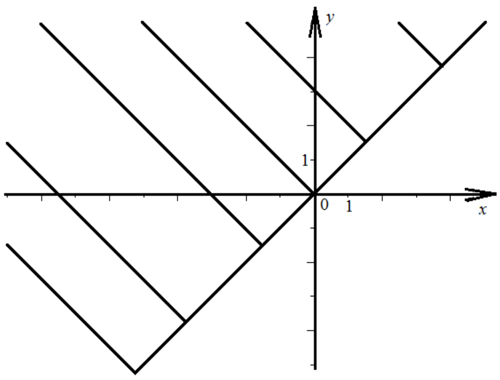

Рис. 5. Ломаные $\boldsymbol{y = |x-a| - a}$

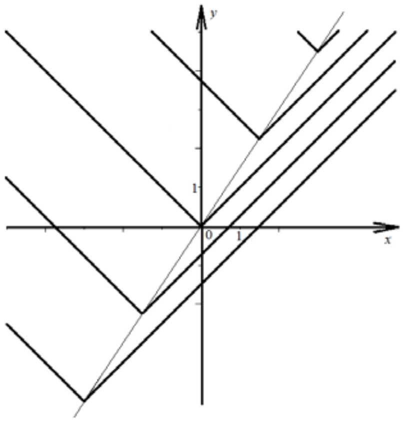

Рис. 6. Ломаные $\boldsymbol{y = |x - 2a| + 3a}$

Теперь рассмотрим функцию, уравнение которой содержит комбинацию двух модулей $y = |x + 2a| + |2x - 2| - 5$. Графиком функции при фиксированном значении параметра является ломаная, имеющая две точки «перелома». Одна из этих точек $x = 1$ – фиксирована, другая, $x = -2a$ – смещается вдоль некоторой прямой, уравнение которой можно задать, причем, при $a > 0$ – влево, при $a < 0$ – вправо (рис. 7). Если ввести параметр и во второй модуль, то обе точки «перелома» будут смещаться («разъезжаться»), каждая вдоль определенной прямой.

Заметим, что в каждом случае при включении анимации, график «оживает» и можно увидеть его движение.

Таким образом, имеем возможность строить и «оживлять» графики различных функций. Наглядное представление помогает понять как меняется поведение функции при изменении параметра.

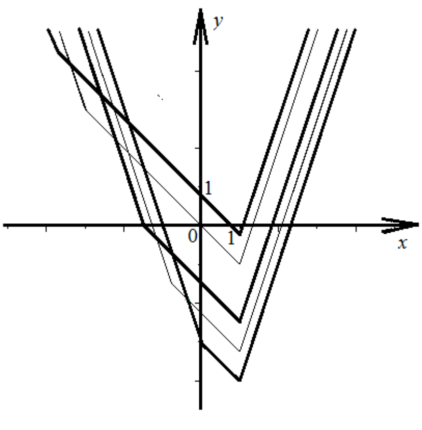

Рис.7.Ломаная $\boldsymbol{y = |x + 2a| + |2x - 2| - 5}$

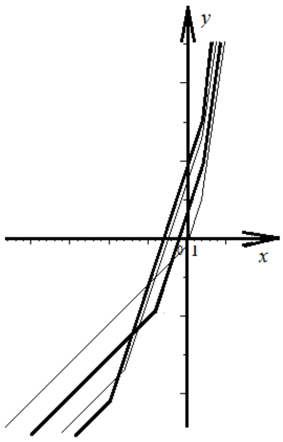

*Рис.8.*Ломаная $\boldsymbol{y = 4x + |x + 2a| + |2x - 4| - 5}$

Построим еще одну ломаную $y = 4x + |x + 2a| + |2x - 4| - 5$ (рис. 8). Видно, что функция возрастает на всей области определения. Это объясняется тем, что угловой коэффициент первого слагаемого превосходит по модулю сумму двух других коэффициентов, поэтому, при любой комбинации раскрытия модулей, угловой коэффициент полученной прямой будет положительным и это обеспечит возрастание функции. Аналогично можно проанализировать поведение функции, заданной в виде любой комбинации линейных функций.

Применим графический метод для решения задачи с параметром, подобные которой предлагаются на ЕГЭ по математике в 11 классе.

Задача. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$ax + \sqrt{5 - 4x - x^2} = 3a + 3 \qquad (1)$$

имеет единственный корень [2].

Решение:

Замечаем, что в уравнение входит линейная функция, содержащая параметр. Представим уравнение в виде $\sqrt{5 - 4x - x^2} = -a(x - 3) + 3$. Будем решать уравнение графически с использованием инструментов СКМ Maple. Заметим, что решением уравнения будет то значение переменной x, при котором графики функций пересекаются. Рассмотрим функции $y_1 = \sqrt{5 - 4x - x^2}$ и $y_2 = -a(x - 3) + 3$. Функция y_1 не содержит параметр, значит, ее график фиксирован. Вместе с тем, график функции y_2 – пучок прямых с центром в точке (3; 3). Так как угловой коэффициент $k = -a$, то вращение прямой при увеличении значений параметра будем совершаться по ходу часовой стрелки. Из всех прямых выберем только те положения прямой, которые существенно влияют на наличие решений и их количество (рис. 9).

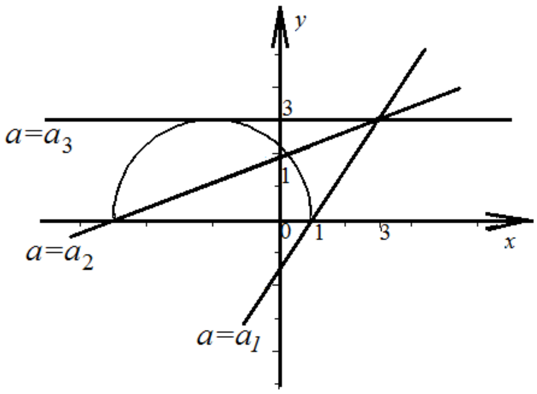

Рис. 9. Решение уравнения графическим методом

Проанализируем, что происходит при повороте прямой y_2 (учитываем, что поворот осуществляем по ходу часовой стрелки). Если значение параметра a изменять от $-\infty$, то впервые графики пересекутся при $a = a_1$ и уравнение (1) будет иметь единственное решение, как и требует условие задачи. При дальнейшем повороте графики функций y_1 и y_2 будут пересекаться в одной точке до тех пор, пока прямая y_2 не займет положение, соответствующее значению параметра $a = a_2$. В этом случае будем иметь две точки пересечения. Продолжая поворачивать прямую y_2 дальше, понимаем, что графики пересекаются дважды, пока прямая не займет положение $a = a_3$, при котором будем снова иметь единственную точку пересечения. При дальнейшем изменении параметра, вплоть до $+\infty$, графики не будут иметь точек пересечения.

Итак, определив значения параметра a_1, a_2, a_3, получим набор значений параметра, при каждом из которых уравнение (1) имеет единственное решение:

$$a \in [a_1; a_2) \cup \{a_3\}.$$

При $a = a_1$ прямая y_2 проходит через точку (1; 0), значит, ее координаты удовлетворяют уравнению прямой:

$$y_2 = -a(x-3)+3 \Rightarrow 0 = -a(1-3)+3 \;\Rightarrow\; a_1 = -\tfrac{3}{2}.$$

При $a = a_2$ прямая y_2 проходит через точку $(-5;\ 0)$, значит, ее координаты удовлетворяют уравнению прямой:

$$y_2 = -a(x-3)+3 \Rightarrow 0 = -a(-5-3)+3 \Rightarrow a_1 = -\frac{3}{8}.$$

При $a = a_3$ прямая y_2 занимает горизонтальное положение и уравнение имеет вид $y_2 = 3 \Rightarrow a_3 = 0$.

Окончательно получаем: $a \in \left[-\frac{3}{2}; -\frac{3}{8}\right) \cup \{0\}$.

Итак, при выполнении данной работы научились применять некоторые инструменты ССМ Maple для построения графиков функций, включая использование режима анимации, применительно, главным образом, к линейной функции и некоторым функциям, построенным на ее основе. Анимационная визуализация позволяет понять, как изменяется положение графика функции при изменении параметра. Эти навыки помогут при анализе заданий с параметром. Результаты данной работы могут использоваться на уроках алгебры в школе и будут актуальными для учащихся любой параллели 7-11 классов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сдвижков О.А. Математика на компьютере: Maple 8. — М.: СОЛОН-Пресс, 2003. — 176 с.

2. ЕГЭ. Математика. Профильный уровень: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов/под ред. И.В. Ященко. – М.: Изд-во «Национальное образование», 2016. – 256 с.