А.Ю. Торопыгин, А.П. Девятков
Тюменский государственный университет, г.Тюмень
УДК 532.546.2

ОПЕРАЦИИ ОБРАЗА И ПРООБРАЗА КАК МНОГОЗНАЧНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Аннотация. В статье представлены теоремы, позволяющие сделать вывод о принадлежности многозначных отображений к тому или иному борелевскому классу.

Ключевые слова: многозначные отображения, борелевские множества, борелевские отображения, непрерывные отображения.

Пусть $X, Y -$ топологические пространства. Обозначим через $2^X -$ множество всех замкнутых подмножеств пространства X. Пусть на множестве 2^X задана экспоненциальная топология. Напомним, что *экспоненциальной топологией* называется топология, порожденная множествами вида:

$$\{V \in 2^X | V \subseteq U\}, \{V \in 2^X | V \cap U \neq \emptyset\},$$

где $U -$открытое множество пространства X. [1]

Будем предполагать, что $X, Y -$ компактные метрические пространства. Тогда экспоненциальная топология совпадает с топологией, порождаемой метрикой Хаусдорфа.[1] Расстояние между непустыми множествами $M, N \in 2^X$ в метрике Хаусдорфа определяется формулой:

$$d_H(M, N) = \max\{sup_{x\in M}\rho(x, N), sup_{y\in N}\rho(y, M)\},$$

где $\rho(x, N) = inf_{z\in N}\rho(x, z) -$ расстояние от точки x до множества N. За расстояние между пустым и непустым множеством принимается $d_H(\emptyset, N) = diam\, X$.[2]

Обозначим через $cl(A)$ *замыкание* подмножества $A \subseteq X$, то есть наименьшее замкнутое множество, содержащее A.[7]

Будем рассматривать непрерывное отображение $f: X \to Y$, многозначные отображения $F: 2^X \to 2^Y$ и $G: 2^Y \to 2^X$, определяемые соответственно $F(M) = cl(f(M))$, для каждого $M \in 2^X$, $G(N) = cl(f^{-1}(N))$, для каждого

$N \in 2^Y$.

Семейство $\mathcal{A}$ подмножеств множества X называется *σ-алгеброй*, если

1. $\emptyset, X \in \mathcal{A}$
2. Если $A \in \mathcal{A}$, то и его дополнение $X \backslash A \in \mathcal{A}$.
3. Для любого счетного семейства $A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$, его объединение $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.[7]

Пусть X – топологическое пространство. Обозначим через $B(X)$ σ-алгебру, порожденную открытыми множествами пространства X, то есть наименьшую σ-алгебру, содержащую все открытые множества пространства X. Элементы $B(X)$ называются *борелевскими подмножествами* X.[7]

Отображение $f: X \to Y$, где X, Y – метрические пространства, называется *борелевским*, если прообраз борелевского подмножества в Y является борелевским подмножеством X.[7]

Многозначное отображение $F: Y \to 2^X$ называется *полунепрерывным сверху (снизу)*, если для любого открытого (замкнутого) множества $A \subset X$ прообраз $F^{-1}(2^A) = \{y \in Y | F(y) \subset A\}$, где 2^A – множество всех замкнутых подмножеств A, является открытым (замкнутым) в Y.[1]

Теорема 1.

Пусть X, Y – компактные метрические пространства и отображение $f: X \to Y$ – непрерывно. Тогда многозначное отображение $G: 2^Y \to 2^X$, определяемое как $G(N) = cl(f^{-1}(N))$ для каждого $N \in 2^Y$, полунепрерывно сверху и является борелевским отображением первого класса. [3]

Теорема 2.

Пусть задано однозначное отображение $f: X \to Y$, где X и Y – компактные метрические пространства. Рассмотрим многозначное отображение $F: 2^X \to 2^Y$, где $F(M) = cl\big(f(M)\big), M \in 2^X$.

Если f – отображение первого борелевского класса, то F – отображение второго борелевского класса. [3]

Теорема 3.

Пусть задано однозначное отображение $f: X \to Y$, где X и Y – компактные метрические пространства. Рассмотрим многозначное отображение $G: 2^Y \to 2^X$, где $G(N) = cl\left(f^{-1}(N)\right)$, $N \in 2^Y$.

Если f – отображение первого борелевского класса, то G – борелевское отображение.

Теорема 4.

Пусть задано однозначное отображение $f: X \to Y$, где $X = [0,1], Y = [0,1]$.

Рассмотрим функцию Дирихле

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ & 0, \text{иначе} \end{cases}$$

Если f – отображение второго борелевского класса, то многозначные отображения $F: 2^X \to 2^Y$ и $G: 2^Y \to 2^X$, где $F(M) = cl\left(f(M)\right)$, $M \in 2^X$ и $G(N) = cl\left(f^{-1}(N)\right)$, $N \in 2^Y$ соответственно, не являются борелевскими отображениями.

Докажем для $F: 2^X \to 2^Y$.

Рассмотрим функцию $f(x) = \begin{cases} x, x \in [0,\frac{1}{2}] \cap \mathbb{I} \\ x, x \in [\frac{1}{2},1] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$. Будем рассматривать отображение $F: 2^{[\frac{1}{2},1]} \to 2^{[0,1]}$. Возьмем замкнутые подмножества 2^Y, их образ попадает в $2^{[\frac{1}{2},1]}$ и не содержит иррациональных точек, в противном случае он попадет в $2^{[0,\frac{1}{2}]}$ и не будет подмножеством 2^Y.

Докажем для $G: 2^Y \to 2^X$.

Рассмотрим функцию $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ & 0, \text{иначе} \end{cases}$. Рассмотрим замкнутые подмножества Y. Пусть $N \in 2^Y$ и $0 \in N, 1 \in N$, тогда множество всех замкнутых подмножеств будет состоять из рациональных точек, а их прообраз будет включать в себя как рациональные, так и иррациональные точки. Следовательно, отображение не борелевское.

Из нижеуказанного контрпримера следует невозможность усиления Теоремы 1 и Теоремы 2 на класс борелевских множеств выше второго.

Теорема 5.

Пусть $2^{[0,1]}$ — пространство замкнутых подмножеств отрезка $[0,1]$ с экспоненциальной топологией.

Тогда множество $2^{\mathbb{Q}} = \{K \in 2^{[0,1]} | K \subseteq \mathbb{Q}\}$, где $\mathbb{Q} -$ множество рациональных чисел, не является борелевским.[4]

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куратовский К. Топология. Т 1. М.: Мир, 1966. 595 с.
2. Куратовский К. Топология. Т 2. М.: Мир, 1966. 625 с.
3. Лаврентьева И. Г. Операции над многозначными борелевскими функциями. ВКР. ТюмГУ, 2015.
4. Торопыгин А. Ю. Семейство всех замкнутых подмножеств $F_\sigma -$ множества не является борелевским в экспоненциальной топологии. ВКР. ТюмГУ, 2016.
5. Энгелькинг Р. Общая топология М.: Мир, 1986. 752 с.
6. Kechris A. Classical Descriptive Set Theory. Springer - Verlag New York, 1995. – 404 p.
7. Srivastava S. M. A Course on Borel Sets. Springer - Verlag New York, 1998. – 264 p.