Д.Е. Васильев, В.Е. Мосягин
Тюменский государственный университет, г. Тюмень

УДК 519.16

О СОВМЕСТНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ МОМЕНТОВ СКАЧКОВ ПУАССОНОВСКОГО ПРОЦЕССА

Аннотация. В статье представлены основные понятия, связанные с случайным процессом Пуассона, сформулированы и доказаны теоремы о совместном распределении моментов скачков и о их связи с совместным распределением членов вариационного ряда, построенном по выборке из равномерного распределения.

Ключевые слова. Пуассоновский процесс, совместное распределение моментов скачков пуассоновского процесса.

Для того, чтобы сформулировать теоремы, введём основные понятия, необходимые для дальнейшего использования.

Пусть $\pi(t)$ обозначает пуассоновский процесс с параметром λ, $\pi(t)\epsilon\Pi_{\lambda t}$:

$$P(\pi(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} \tag{1}$$

где $t \geq 0$, *k=0,1…* - количество событий (скачков), $\lambda > 0$ – интенсивность процесса [2].

Рассмотрим величину $\tau_n -$ расстояние между *n*-ым и *n-1*-ым скачками. Тогда время *n*-го скачка

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \tau_i \tag{2}$$

Заметим, что $\{\tau_n\}$ независимые случайные величины, распределённые по экспоненциальному закону, $\tau_1, \dots, \tau_n \epsilon \mathrm{E}_\lambda$. Причём $\{S_n\}$, как сумма независимых случайных величин, распределённых по экспоненциальному закону, имеют гамма-распределение, то есть $S_1, \dots, S_n \epsilon \Gamma_{\lambda,n}$.[2]

Теорема 1. *При любых x_k, удовлетворяющих условиям*

$$0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \leq x \tag{3}$$

для условного совместного распределения моментов скачков пуассоновского процесса справедливо равенство [1]

$$P\left(\bigcap_{m=1}^{n}\{S_m \leq x_m\} \,/\, \pi(x) = n\right) = \frac{n!}{x^n}\int_0^{x_1}\int_{u_1}^{x_2}\ldots\int_{u_{n-1}}^{x_n} du_1 \ldots du_n \tag{4}$$

Доказательство: Пусть A- совместного распределения моментов скачков пуассоновского процесса:

$$A = \{\bigcap_{m=1}^{n} \{S_m \le x_m\}\}. \tag{5}$$

Событие, состоящее в том, что на интервале $[0, x]$ появится ровно n событий, обозначим, как

$$B = \{\pi(x) = n\}. \tag{6}$$

Тогда, в таких обозначениях, доказательство теоремы сводится к вычислению

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \tag{7}$$

Разобьём доказательство на этапы. Вычислим на первом этапе вероятность $P(A \cap B)$.

$$P(A \cap B) = P(\cap_{m=1}^{n} \{S_m \le x_m\}; \pi(x) = n) = P(S_1 \le x_1; S_2 \le x_2; \dots; S_n \le x_n; S_{n+1} \ge x)$$

.

Воспользуемся интегральной формой вероятности [2] и найдём сперва совместное распределение моментов скачков.

$$P(\bigcap_{m=1}^{n} \{S_m \le x_m\}) = P(\tau_1 \le x_1; \tau_1 + \tau_2 \le x_2; \dots; \tau_1 + \tau_2 + \cdots \tau_n \le x_n)$$

$$= \int_0^{x_1} P(\tau_1 \in dt_1; \tau_1 + \tau_2 \le x_2; \dots; \tau_1 + \tau_2 + \cdots \tau_n \le x_n)$$

$$= \int_0^{x_1} P(\tau_2 \le x_2 - t_1; \dots; \tau_1 + \tau_2 + \cdots \tau_n \le x_n) P(\tau_1 \in dt)$$

$$= \int_0^{x_1} P(\tau_2 \le x_2 - t_1; \dots; \tau_1 + \tau_2 + \cdots \tau_n \le x_n) * f_{\tau_1}(t_1) dt_1$$

$$= \int_0^{x_1} \int_0^{x_2 - t_1} P(\tau_3 \le x_3 - t_1 - t_2; \dots; \tau_1 + \tau_2 + \cdots \tau_n \le x_n)$$

$$* f_{\tau_1}(t_1) f_{\tau_2}(t_2) dt_1 dt_2 = \cdots$$

$$= \int_0^{x_1} \int_0^{x_2 - t_1} \dots \int_0^{x_n - \sum_{i=1}^{n-1} t_i} (\prod_{i=1}^{n} f_{\tau_n}(t_n))\, dt_1 dt_2 \dots dt_n$$

$$= \int_0^{x_1} \int_0^{x_2 - t_1} \dots \int_0^{x_n - \sum_{i=1}^{n-1} t_i} (\prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda t_i})\, dt_1 dt_2 \dots dt_n$$

$$= \int_0^{x_1} \int_0^{x_2 - t_1} \dots \int_0^{x_n - \sum_{i=1}^{n-1} t_i} \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} t_i} dt_1 dt_2 \dots dt_n$$

Если в полученном выражении для упрощения записи и удобства использования сделать замену переменных

$$u_1 = t_1$$

$$u_2 = t_1 + t_2$$

$$.$$

$$.$$

$$.$$

$$u_n = t_1 + \cdots t_n$$

То последнее выражение примет вид

$$P(\bigcap_{m=1}^{n} \{S_m \le x_m\}; \pi(x) = n) = P(S_1 \le x_1; S_2 \le x_2; \dots; S_n \le x_n; S_{n+1} \ge x)$$
$$= \int_0^{x_1} \int_{u_1}^{x_2} \dots \int_{u_{n-1}}^{x_n} \lambda^n e^{-\lambda u_n} e^{-\lambda(x-u_n)}\, du_1 du_2 \dots du_n$$
$$= \int_0^{x_1} \int_{u_1}^{x_2} \dots \int_{u_{n-1}}^{x_n} \lambda^n e^{-\lambda x} du_1 du_2 \dots du_n$$
$$= \lambda^n e^{-\lambda x} \int_0^{x_1} \int_{u_1}^{x_2} \dots \int_{u_{n-1}}^{x_n} du_1 du_2 \dots du_n$$

То есть вероятность совместного распределения скачков, при условии, что их было ровно *n*, представляется в интегральной форме:

$$P(\bigcap_{m=1}^{n} \{S_m \le x_m\}; \pi(x) = n) = \lambda^n e^{-\lambda x} \int_0^{x_1} \int_{u_1}^{x_2} \dots \int_{u_{n-1}}^{x_n} du_1 du_2 \dots du_n \quad (8)$$

Учитывая, что

$$P(B) = P(\pi(x) = n) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda x}}{n!} \quad (9)$$

И подставив (8) и (9) в (7), находим искомую условную вероятность

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\bigcap_{m=1}^{n}\{S_m \le x_m\}; \pi(x) = n)}{P(\pi(x) = n)}$$
$$= \frac{\lambda^n e^{-\lambda x} \int_0^{x_1} \int_{u_1}^{x_2} \dots \int_{u_{n-1}}^{x_n} du_1 du_2 \dots du_n}{\frac{(\lambda x)^n e^{-\lambda x}}{n!}}$$
$$= \frac{n!}{x^n} \int_0^{x_1} \int_{u_1}^{x_2} \dots \int_{u_{n-1}}^{x_n} du_1 du_2 \dots du_n$$

■

Теорема 2. *Пусть* $X_{(1)} \le X_{(2)} \le \dots \le X_{(n)}$ *члены вариационного ряда для выборки независимых равномерно распределённых случайных величин на отрезке [0,x], то есть* $X_1, X_2, \dots, X_n \in \mathbb{U}[0,x]$. *[1]*

Тогда

$$P(\bigcap_{m=1}^{n} \{X_{(m)} \le x_m\}) = \frac{n!}{x^n} \int_0^{x_1} \int_{u_1}^{x_2} \dots \int_{u_{n-1}}^{x_n} du_1 \dots du_n$$

Доказательство: Пусть $f^*(x_1, .., x_n)$ плотность совместного распределения порядковых статистик, где $X_1, .., X_n \in \mathbb{U}[0,1]$.

Тогда найдём совместное распределение порядковых статистик, используя приём перехода к интегральной форме вероятности аналогично доказательству *теоремы 1*.

$$P\left(\bigcap_{m=1}^{n} \{X_{(m)} \le x_m\}\right) = \int_0^{x_n - \sum_{i=1}^{n-1} t_i} \dots \int_0^{x_1} f^*(x_1, .., x_n) dx_1 \dots dx_n$$

Учитывая независимость и одинаковую распределённость случайных величин, а также упорядоченность выборки (число всевозможных перестановок от *1* до *n* равно *n!*). Сделав замену $u_k = \sum_{i=1}^{k} t_i, k = 1,2, \dots, n.$, при вычислении, получим

$$\int_0^{x_n-\sum_{i=1}^{n-1}t_i} \dots \int_0^{x_1} f^*(x_1,..,x_n)dx_1 \dots dx_n$$
$$= n! \int_0^{x_n-\sum_{i=1}^{n-1}t_i} \dots \int_0^{x_1} f^n(x_1,..,x_n)dx_1 \dots dx_n$$
$$= \frac{n!}{x^n} \int_0^{x_1} \int_{u_1}^{x_2} \dots \int_{u_{n-1}}^{x_n} du_1 \dots du_n$$

То есть

$$P\left(\bigcap_{m=1}^{n} \{X_{(m)} \le x_m\}\right) = \frac{n!}{x^n} \int_0^{x_1} \int_{u_1}^{x_2} \dots \int_{u_{n-1}}^{x_n} du_1 \dots du_n \qquad (10)$$

■

На основе доказанных теорем можно сформулировать следствие.

Следствие 1: *Совместное распределение моментов скачков пуассоновского процесса при условии, что на интервале [0;x] произошло ровно n скачков, совпадает с совместным распределением порядковых статистик объёма n равномерного распределения на интервале [0;x].[1]*

Доказательство этого следствия непосредственно вытекает из результатов, доказанных в т*еореме 1* и в т*еореме 2*.

Теорема 3. *При любом* $u_0 \ge 0$ *и* $\forall\, x \ge 1$ *справедливо равенство:*

$$\int_{u_0}^{x-n} \int_{u_1}^{x-n+1} \dots \int_{u_{n-1}}^{x-1} du_1 \dots du_n = \frac{(x-u_0)^n}{n!} - \frac{(x-u_0)^{n-1}}{(n-1)!},\ n = 1,..,[x] \qquad (11)$$

где $[x]$ – целая часть числа x. *[1]*

Доказательство: Проведём доказательство, используя метод математической индукции.

База индукции: Для *n=1* формула справедлива, так как

$$\int_0^{x-1} du_1 = x - 1 = \frac{(x-0)^1}{1!} - \frac{(x-0)^0}{0!}$$

Предположим, что утверждение верно для *n*:

$$\int_{u_0}^{x-n} \int_{u_1}^{x-n+1} \dots \int_{u_{n-1}}^{x-1} du_1 \dots du_n = \frac{(x-u_0)^n}{n!} - \frac{(x-u_0)^{n-1}}{(n-1)!} \qquad (12)$$

Совершим индукционный переход и докажем справедливость данной формулы для случая *n+1*.

$$\int_{u_0}^{x-n-1}\int_{u_1}^{x-n}\dots\int_{u_n}^{x-1}du_1\dots du_n du_{n+1}=\int_{u_0}^{x-n-1}\frac{(x-u_1)^n}{n!}-\frac{(x-u_1)^{n-1}}{(n-1)!}du_1$$
$$=\left(-\frac{(x-u_1)^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{(x-u_1)^n}{n!}\right)|_1^{x-n-1}$$
$$=-\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{(n+1)^n}{n!}+\frac{(x-u_0)^{n+1}}{(n+1)!}-\frac{(x-u_0)^n}{n!}$$
$$=\frac{(x-u_0)^{n+1}}{(n+1)!}-\frac{(x-u_0)^n}{n!}$$

Следовательно, формула (12) справедлива для любых натуральных n.

■

Рассмотрим частный случай формулы (12).

Следствие 2. *При* $u_0=0$, *для любых* $x\geq 1$ *и* $n=1,..,[x]$ *верна формула*

$$\int_0^{x-n}\int_{u_1}^{x-n+1}\dots\int_{u_{n-1}}^{x-1}du_1\dots du_n=\frac{(x)^n}{n!}-\frac{(x)^{n-1}}{(n-1)!} \tag{13}$$

Теорема 4. *Для* $X_{(1)}\leq X_{(2)}\leq\ldots\leq X_{(n)}$*- членов вариационного ряда, построенного по выборке объёма n из равномерного распределения* $\mathbb{U}[0,x]$ и $S_1\leq S_2\leq\ldots\leq S_n$ *-последовательных моментов скачков пуассоновского процесса справедливо:*

$$P\left(X_{(1)}\leq x-n,..,X_{(n)}\leq x-1\right)=$$
$$P(S_1\leq x-n,..,S_n\leq x-1|\pi(x)=n)=1-\frac{n}{x} \tag{14}$$

Доказательство: Используя *следствия 1-2*, доказательство сводится к прямому и очевидному выводу формулы.

$$P\left(X_{(1)}\leq x-n,..,X_{(n)}\leq x-1\right)=P(S_1\leq x-n,..,S_n\leq x-1/\pi(x)=n)=$$
$$\frac{n!}{x^n}\int_0^{x-n}\int_{u_1}^{x-n+1}\dots\int_{u_{n-1}}^{x-1}du_1\dots du_n=\frac{n!}{x^n}\left(\frac{(x)^n}{n!}-\frac{(x)^{n-1}}{(n-1)!}\right)=1-\frac{n}{x}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карлин С. Основы теории случайных процессов. Мир, Москва, 1971.

2. Феллер В. «Введение в теорию вероятностей и ее приложения» (Том 2), Мир, Москва, 1967 год.