Е.А. Мосина, М.А. Николайчук, Т.В. Салтанова

Тюменский государственный университет, г. Тюмень

УДК 539

ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦЫ ЖЕСТКОСТИ ДЛЯ ДВУХФАЗНОГО ТРЕУГОЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА

Аннотация. Для численной реализации кинематической модели, которая описывает избыточные остаточные поровые давления при длительной нагрузке водонасыщенного грунта, используется метод конечного элемента. Согласно методу построена матрица жёсткости, отвечающая избыточным остаточным поровым давлениям.

Ключевые слова: метод конечных элементов, водонасыщенное основание, уравнения типа Ляме, матрица жёсткости для двухфазного элемента.

В статье построена матрица жесткости для одного плоского треугольного элемента, вырезанного из водонасыщенного (скелет грунта + поровая вода) слоя единичной толщины, которая является основой метода конечных элементов (МКЭ).

Кинематическая модель в плоском варианте описывает избыточные остаточные поровые давления и представляет собой систему двух дифференциальных уравнений эллиптического типа с положительными постоянными коэффициентами [1]:

$$-\left(\left(G+\lambda\right)\frac{\partial\theta}{\partial x_i}+G\Delta u_i+b_i\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2}+c_i\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)=F_i\,, i=1,2 \qquad (1)$$

$$G=\frac{E_s}{2(1+\nu)}, \qquad \lambda=\frac{E_s\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \qquad b_i=\frac{E_{li}}{\aleph_i^2}, \qquad c_i=\frac{E_{li}}{\aleph_i h_i}, \qquad \theta = div\, u\,,$$

и граничными условиями

$$u\big|_{s_1}=0\,, \qquad t^{(v)}\big|_{s_2}=Q\,, \qquad t_i^{(\nu)}=\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{2}\left(\left(2G+b_i\right)\varepsilon_i+\lambda\varepsilon_{ik}+\sigma_{ik}\right)\cos\left(\nu,x_k\right)e_i\,,$$

где модуль деформации E_s и коэффициент ν, относятся к грунту, E_{li}

механическая постоянная поровой воды, $\aleph_i$ - безразмерная величина, определяемая из эксперимента, h_i - характеристика сжимаемой толщи.

Перепишем систему уравнений (1) в операторном виде и скалярно умножим уравнение на вектор возможных перемещений v:

$$-((A+B+C)u,v)=(F,v), \tag{2}$$

где $A=(G+\lambda)graddiv+G\Delta$ - оператор Ляме, операторы $B\left(b_1\frac{\partial^2}{\partial x_1^2},b_2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)$, $C\left(c_1\frac{\partial}{\partial x_1},c_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)$ описывают влияние жидкой фазы.

Отрицательные операторы A, B, C являются положительно определёнными [2]. В работе [2] также установлена связь между скалярными произведениями и полной энергии деформации, которая представляет собой сумму трёх слагаемых W^A, W^B, W^C, где

$$2W^A=c\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)+2\lambda\varepsilon_1\varepsilon_2+\frac{1}{2}(c-\lambda)\varepsilon_{12}^2=\varepsilon_1\sigma_1+\varepsilon_2\sigma_2+\gamma_{12}\tau_{12}, \qquad c=\frac{(1-\nu)E_s}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$2W^B=b_1\varepsilon_1^2+b_2\varepsilon_2^2.$$

В сумме $2W^A+2W^B$ можно сгруппировать слагаемые и вынести за скобки общие множители ε_1 и ε_2,

$$2W^A+2W^B=\varepsilon_1(\sigma_1+b_1\varepsilon_1)+\varepsilon_2(\sigma_2+b_2\varepsilon_2)+\gamma_{12}\tau_{12},$$

Слагаемые $\sigma_1+b_1\varepsilon_1$ и $\sigma_2+b_2\varepsilon_2$ можно представить следующим образом:

$$\sigma_1+b_1\varepsilon_1=c\varepsilon_1+a_1\varepsilon_2+b_1\varepsilon_1=(c+b_1)\varepsilon_1+a_1\varepsilon_2, \qquad \sigma_2+b_2\varepsilon_2=a_1\varepsilon_1+(c+b_2)\varepsilon_2,$$

где $a_1=\dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$,

что приводит к новой редакции закона Гука для скелета грунта.

$$\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon\}, \qquad \begin{pmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{(1-\nu)E_s}{(1+\nu)(1-2\nu)}+\frac{E_{l1}}{\aleph_1^2} & \frac{\nu E_s}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0\\ \frac{\nu E_s}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{(1-\nu)E_s}{(1+\nu)(1-2\nu)}+\frac{E_{l2}}{\aleph_2^2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{E_s}{2(1+\nu)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \gamma_{12}\end{pmatrix}, \tag{3}$$

Возникающие за счёт оператора B слагаемые $E_{li}/\aleph_i^2$ описывают изменения механических характеристик скелета грунта за счёт поровой воды.

Фигурными скобками обозначен вектор – столбец, квадратными скобками – полная матрица.

Введение стандартного конечного элемента треугольной формы (рис.1) в теории упругости, проводится по следующему алгоритму [3], при этом для объёмных сил F, приложенных только в узлах, сохраним прежние обозначения.

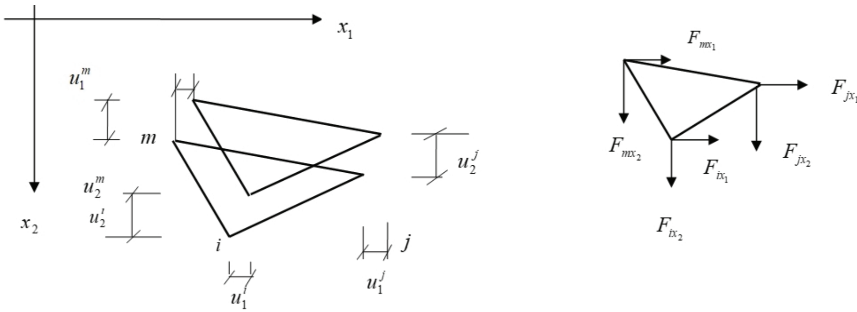

Рис. 1.

Искомыми величинами являются узловые перемещения $\{\delta\}$, поэтому перемещения u_k и другие характеристики внутри элемента записываются через искомые узловые перемещения:

$$u_k = \frac{1}{2\Delta}\left[\left(p_i + d_i x_1 + n_i x_2\right)u_k^i + \left(p_j + d_j x_1 + n_j x_2\right)u_k^j + \left(p_m + d_m x_1 + n_m x_2\right)u_k^m\right],\ k = 1{,}2 \quad (4)$$

$$p_i = x_1^j x_2^m - x_1^m x_2^j,\ n_i = x_1^m - x_2^j,\ d_i = x_2^j - x_2^m.$$

На основании уравнений Коши:

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{1}{2\Delta}\left(d_i u_1^i + d_j u_1^j + d_m u_1^m\right), \qquad \varepsilon_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{1}{2\Delta}\left(n_i u_2^i + n_j u_2^j + n_m u_2^m\right),$$

$$\gamma_{12} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \frac{1}{2\Delta}\left(n_i u_1^i + n_j u_1^j + n_m u_1^m + d_i u_2^i + d_j u_2^j + d_m u_2^m\right)$$

относительные деформации внутри конечного элемента площадью Δ выражаются через искомые узловые перемещения $\{\delta\}$:

$$\{\varepsilon\} = [N]\{\delta\}, \qquad \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\Delta}\begin{pmatrix} d_i & 0 & d_j & 0 & d_m & 0 \\ 0 & n_i & 0 & n_j & 0 & n_m \\ n_i & d_i & n_j & d_j & n_m & d_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1^i \\ u_2^i \\ u_1^j \\ u_2^j \\ u_1^m \\ u_2^m \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

Для составления системы линейных алгебраических уравнений используем первые два слагаемые выражения (2)$(-(A+B)u, v)$. Пусть вектор v описывает возможные узловые перемещения $\{\delta^*\}$. Допустим, что возможные перемещения совпадают с искомыми перемещениями $\{\delta\}$.

Запишем работу внешних сил $\{\delta\}^T[F]$ через удельную работу внутренних сил

$$2\left(W^A + W^B\right) = \{\varepsilon\}^T\{\sigma\}, \qquad \{\varepsilon\}^T = \{\delta\}^T[N]^T,$$

отвечающих скелету грунта.

От удельной работы перейдём к работе внутренних сил в пределах объёма элемента единичной толщины.

$$\int_S \{\varepsilon\}^T\{\sigma\}\cdot 1dS = \{\varepsilon\}^T\{\sigma\}\cdot\Delta\cdot 1, \qquad \int_S dS = \Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1^i & x_2^i \\ 1 & x_1^j & x_2^j \\ 1 & x_1^m & x_2^m \end{vmatrix},$$

Уравнение равенства работ внешних и внутренних сил запишем с помощью матриц: $\Delta\cdot\{\delta\}^T[N]^T\{\sigma\} = \{\delta\}^T\{F\}$. Сократим на $\{\delta\}^T$. Тогда выражение $-((A+B)u, u) = (F, u)$ получит матричную запись:

$$\Delta\cdot[N]^T[D]\cdot[N]\{\delta\} = \{F\}.$$

Произведение

$$\Delta\cdot[N]^T[D]\cdot[N] = [k_s] \qquad (6)$$

называют матрицей жёсткости для скелета грунта.

Скалярное произведение, соответствующее третьему оператору, имеет вид [2]:

$$(-Cu, u) = \int_S \left(\frac{E_{l1}}{\aleph_1 h_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}u_1 + \frac{E_{l2}}{\aleph_2 h_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}u_2\right)dS = \int_S P_l\cdot u dS, \qquad \{P_l\} = \begin{pmatrix} \dfrac{E_{l1}}{\aleph_1 h_1} & \dfrac{E_{l2}}{\aleph_2 h_2} \end{pmatrix}.$$

После аналогичных преобразований которого имеем:

$$\left(-Cu,u\right)=\{\delta\}^{T}\left[M\right]^{T}\{P_{l}\}^{T}\Delta. \qquad (7)$$

Добьемся одинаковой размерности $[M]^{T}$ с матрицей $[N]^{T}$ добавив нулевой столбец.

$$[N]^{T}=\frac{1}{2\Delta}\begin{pmatrix} d_i & 0 & n_i \\ 0 & n_i & d_i \\ d_j & 0 & n_j \\ 0 & n_j & d_j \\ d_m & 0 & n_m \\ 0 & n_m & d_m \end{pmatrix} \qquad [M]^{T}=\frac{1}{2\Delta}\begin{pmatrix} f_i & 0 & 0 \\ 0 & f_i & 0 \\ f_j & 0 & 0 \\ 0 & f_j & 0 \\ f_m & 0 & 0 \\ 0 & f_m & 0 \end{pmatrix},$$

$f_k = p_k + d_k x_c + n_k x_c$, x_c - центр тяжести треугольного элемента.

Аналогичным образом поступим с матрицей $\{P_l\}^{T}$.

$$\{P_l\}^{T}=\begin{pmatrix} \dfrac{E_{l1}}{\aleph_1 h_1}\varepsilon_1 \\ \dfrac{E_{l2}}{\aleph_2 h_2}\varepsilon_2 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{E_{l1}}{\aleph_1 h_1} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{E_{l2}}{\aleph_2 h_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{pmatrix}=[D_l]\{\varepsilon_s\}.$$

После подстановки полученных выражений в (7) получаем матрицу жёсткости для поровой воды:

$$[M]^{T}[D_l]\cdot[N]\Delta=[k_l]. \qquad (8)$$

Поскольку матричный сомножитель $[N]$ в матрице $[k_l]$сохраняется, то новое матричное слагаемое $[M]^{T}[D_l]$ надо сложить с известной для скелета грунта матрицей $[N]^{T}[D]$, что приведёт к новой матрице жёсткости для двухфазного треугольного элемента

$$[k_{sl}]=\left([N]^{T}[D]+[M]^{T}[D_l]\right)\cdot[N]\cdot\Delta.$$

Отличия полученной в статье матрицы жёсткости от известной в теории упругости заключается в том что

1. Введены слагаемые b_1 и b_2 в выражение (3).

2. К известной матрице жёсткости добавлена построенная матрица жёсткости (8), отвечающая учёту избыточных остаточных поровых давлений.

Описанная методика построения матрицы жёсткости для двухфазного элемента может быть перенесена на прямоугольный и другие конечные элементы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л.Е Мальцев, В.Ф. Бай, Т.В. Мальцева. Кинематическая модель грунта и биоматериалов. СПб.: Стройиздат, 2002. 320 с.
2. Т.В. Мальцева. Введение функционала для решения обобщённой системы уравнений Ляме// вестник Тюменского Государственного Университета. 2003. №5. с. 196 – 202.
3. С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер. Теория упругости. М.: Издательство «Наука», 1975.