В.Ф. Садриев, А.Н. Соснин

Тюменский государственный университет, г. Тюмень

УДК 517.9

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЛАНЖЕВЕНА ПО СХЕМЕ РУНГЕ-КУТТА

Аннотация. В статье представлено математическое описание численного решения уравнения Ланжевена по схеме Рунге-Кутта для трёх различных способов.

Ключевые слова: уравнение Ланжевена, схема Рунге-Кутта.

Уравнение Ланжевена применяется практически во всех областях физики конденсированных сред[1]. Для ряда практических задач численное решение данного уравнения должно выполняться в реальном времени и, кроме того, с определенной точностью и устойчивостью. Данные характеристики мы попробовали реализовать при помощи схемы Рунге-Кутта и исследовать как ведут себя различные схемы при изменении шага по координате.

Для решения уравнения был использован случай одномерного уравнения для явной схемы Рунге-Кутта, тогда следующее значение функции можно определить по формуле [2]:

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{1}{2}(k_0 + k_1)\,\Delta_n + \frac{1}{5}(3(s_1 + s_2) - s_0)\,\Delta W_n + \frac{1}{2}(s_1 - s_2)\left(3\sqrt{\Delta_n} - \frac{(\Delta W_n)^2}{\sqrt{\Delta_n}}\right), \tag{1}$$

где

$$k_0 = f(x_n, Y_n),\ s_0 = g(x_n, Y_n), k_1 = f(x_n + \Delta_n, Y_n + k_0\,\Delta + \Delta W_n s_0)$$

$$s_1 = g(x_n + \frac{5}{12}\Delta_n, Y_n + \frac{5}{12}k_0\,\Delta_n - \frac{1}{6}\frac{(\Delta W_n)^2}{\sqrt{\Delta_n}}s_0)$$

$$s_2 = g(x_n + \frac{5}{12}\Delta_n, Y_n + \frac{5}{12}k_0\,\Delta_n + \frac{1}{6}\frac{(\Delta W_n)^2}{\sqrt{\Delta_n}}s_0)$$

Результаты работы программы приведены на рис. 1.

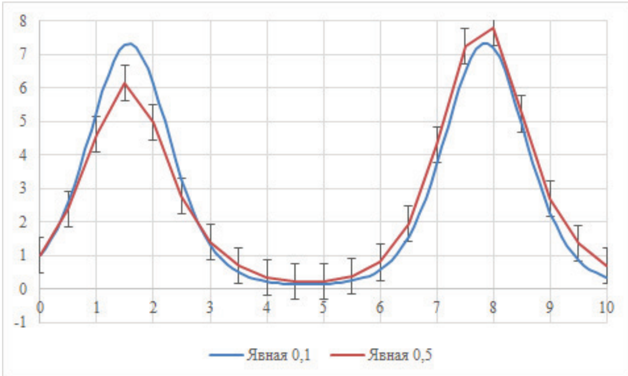

Рис. 1. Решение уравнения Ланжевена по явной схеме Рунге-Кутта.

Как показали результаты, увеличение шага по явной схемеприводит к значительному снижению точности и превышению величины статистической погрешности.

По Методу Рунге-Кутта 2 порядка точности решение уравнения определяется при помощи схемы[3]:

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{(K_1 + K_2)}{2}$$

где

$$K_1 = f(x, y)\mathrm{dh} + \left(\mathrm{dw} - \mathrm{sk}\sqrt{dh}\right)\mathrm{g(x, y)}$$

$$K_2 = f(x+1, y+K_1)\mathrm{dh} + \left(\mathrm{dw} + \mathrm{sk}\sqrt{dh}\right)\mathrm{g}(\mathrm{x}+1, \mathrm{y}+K_1)$$

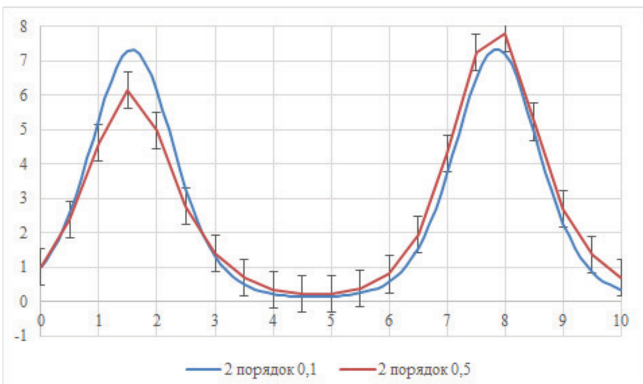

Рис. 2. Решение по схеме Рунге-Кутта 2 порядка точности.

Результаты работы программы (Рис. 2) аналогичны решению явным методом и выходят за рамки статистической погрешности.

Метод Рунге-Кутта 4 порядка точности позволяет решать уравнение при помощи следующей численной схемы[3]:

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{(K_n + G_n)}{6}$$

где

$$K_n = (K_1 + 2K_2 + K_3 + K_4)dh$$

$$G_n = (G_1 + 2G_2 + G_3 + G_4)dw$$

$$K_1 = f(x, y);\ G_1 = g(x, y)$$

$$K_2 = f(x + \frac{dh}{2}, y + \frac{K_1 dh}{2} + \frac{G_1 dw}{2})$$

$$G_2 = f(x + \frac{dh}{2}, y + \frac{K_1 dh}{2} + \frac{G_1 dw}{2})$$

$$K_3 = f(x + \frac{dh}{2}, y + \frac{K_2 dh}{2} + \frac{G_2 dw}{2})$$

$$G_3 = f(x + \frac{dh}{2}, y + \frac{K_2 dh}{2} + \frac{G_2 dw}{2})$$

$$K_4 = f(x + dh, y + K_3 dh + \frac{G_3 dw}{2})$$

$$G_4 = f(x + dh, y + K_3 dh + \frac{G_3 dw}{2})$$

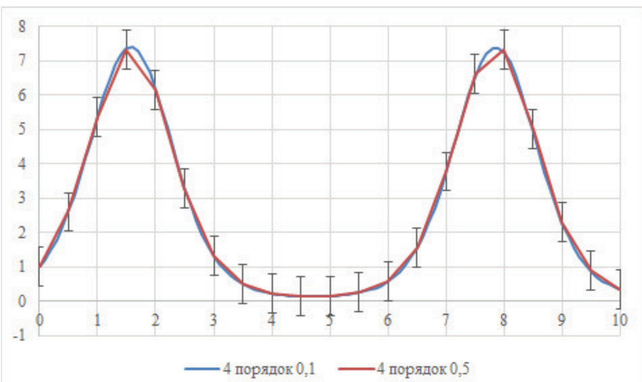

Рис. 3. Решение по схеме Рунге-Кутта 4 порядка точности.

Полученные результаты по схеме Рунге-Кутта 4 порядка (Рис. 3) в пределах статистических погрешностей не отличаются от результатов расчётов при увеличении шага вычислений в 5 раз.

Результаты работы говорят о том, что методы Рунге-Кутта возможно применять для решения уравнения Ланжевена. При этом, при малых шагах разные методы дают результаты одинаковой точности. Увеличение размера шага и снижения количества вычислений привело к увеличению погрешности в явном методе и методе Рунге-Кутта 2 порядка точности. Метод 4 порядка точности в данном случае показывает результаты, позволяющие применять его в случаях где требуется сокращение числа выполнения операций, так как при увеличении шага результаты находятся в пределах статистический погрешностей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фаткуллин Н.Ф. Метод проекционных операторов Цванцига - Мори: Обобщённое уравнение Ланжевена. Учебное пособие, Казань 1999, 54с.
2. Ерешко А.Ф., Филатова Д.В. Анализ явных численных медов решения стохастических дифференциальных уравнений // Труды ИСА РАН Т. 32 (2) – 2008. – С. 164-173.
3. Мышенков В.И., Мышенков Е.В. Численные методы. Ч. 2. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений: Учебное пособие для студентов специальности 073000. – М.:МГУЛ, 2005. – 109 с.