Н.А. Сорокина, Д.В. Шармин

Тюменский государственный университет, г. Тюмень

УДК 372.851

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ

Аннотация. В статье рассматриваются основные методы решения планиметрических задач в школьном курсе геометрии и приводятся примеры решения таких задач.

Ключевые слова: геометрия, планиметрическая задача, методы решения планиметрических задач.

Геометрическая линия является одной из центральных линий курса математики. Она предполагает систематическое изучение геометрических фигур на плоскости и в пространстве, развитие логического мышления и воспитывает потребность доказывать то, что утверждается в качестве истины. Итак, геометрия – это раздел математики, а планиметрия – это часть геометрии, изучающая фигуры на плоскости. Научиться решать задачи по геометрии значительно сложнее, чем по алгебре. Это связано с обилием различных типов геометрических задач и многообразием методов их решения.

В настоящее время качество геометрических знаний и умений учащихся остается невысоким. Это объясняется тем, что геометрия по сравнению с другими дисциплинами математического цикла является относительно сложным предметом и на ее изучение традиционно отводится небольшое количество времени.

Итак, если познакомить школьников и отработать с ними решение как можно большего количества планиметрических задач с использованием разнообразных методов, то это поможет выбрать им наиболее рациональный способ решения задачи и сэкономить время на экзаменах. Умение решать планиметрическую задачу несколькими способами - один из залогов успешного самоконтроля и самопроверки.

В нашей работе рассмотрим классификацию методов решения планиметрических задач (рис. 1), предложенную В.А. Гусевым и В.Н. Литвиненко [3], так как считаем ее наиболее богатой и обобщенной, включающей методы, выделенные другими учеными.

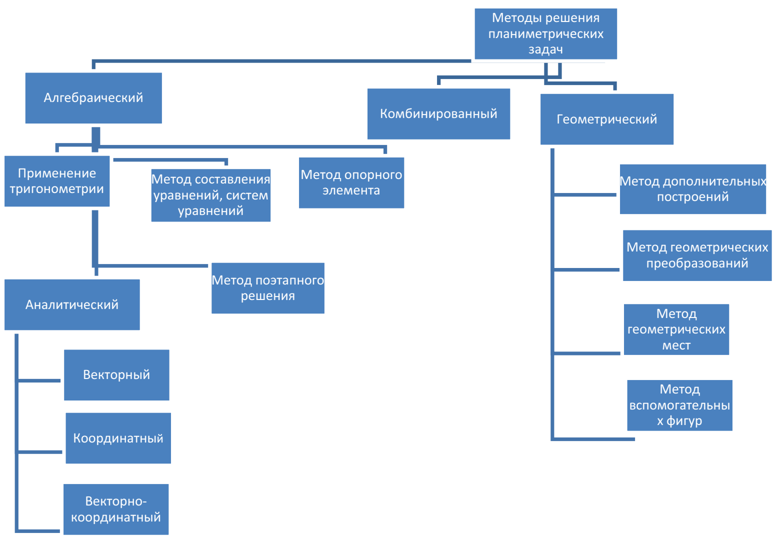

Рис. 1. Методы решения планиметрических задач.

Все методы решения планиметрических задач делятся на 3 категории: алгебраический, геометрический и комбинированный методы. Рассмотрим каждую категорию отдельно и начнем с основного метода решения планиметрических задач представленного в школьном курсе, каковым является *алгебраический метод*. Выделяют следующие его разновидности:

1. метод поэтапного решения;
2. метод составления уравнений, систем уравнений;

3. метод опорного элемента;
4. метод применения тригонометрии;
5. аналитический метод.

Аналитический метод включает в себе векторный, координатный и векторно-координатный методы.

Сущность метода поэтапного решения состоит в следующем: величины, заданные в условии задачи и те, которые нужно найти, связываются цепочкой промежуточных величин, каждая из которых последовательно определяется через предыдущие.

В том случае, когда нельзя последовательно определить промежуточные величины используют метод составления уравнений, где данные и искомые величины связываются уравнением или системой уравнений.

Следующим методом является метод опорного элемента. Его сущность состоит в следующем: один и тот же элемент выражается через известные и неизвестные величины двумя разными способами, и полученные выражения приравниваются.

Сущность метода применения тригонометрии заключается в следующем: величины, заданные в условии задачи и те, которые нужно найти, связываются между собой при помощи тригонометрии.

В случае, когда опорным элементом является длина вектора или расстояние между двумя точками, говорят о применении аналитического метода, разновидностью которого является векторный. Данный метод основан на использовании аппарата векторной алгебры, что обеспечивает его большую общность и универсальность. Сущность векторного метода заключается в следующем: сначала геометрическую задачу переводят на векторный язык, затем решают задачу, используя операции над векторами, опорные задачи векторного метода, далее полученный результат в векторной форме переводят обратно на геометрический язык.

Также к аналитическому методу решения задач относится и координатный метод. В случае решения задач данным методом следует ввести прямоугольную систему координат и записать условие задачи в координатах, после чего последует решение с помощью алгебраических вычислений.

Продолжением векторного и координатного методов является векторно-координатный метод. Он основан на понятиях вектора и координат и сочетает в себе подходы этих двух методов. Алгебраический метод применяется не только при решении задач на вычисление, но и при решении многих задач на построение и доказательство.

Геометрический метод чаще всего используется при решении задач на доказательство. В этом случае требуемое утверждение выводится из ряда известных теорем путем логических рассуждений. К геометрическим методам относят: метод дополнительных построений; метод геометрических преобразований; метод геометрических мест; метод вспомогательных фигур.

Сущность метода дополнительных построений заключается в том, что чертеж к задаче, на котором сложно заметить связи между искомыми величинами дополняется новыми элементами с помощью дополнительных построений, после чего эти связи становятся более ощутимыми или даже очевидными.

Метод геометрических мест состоит в сведении задачи к нахождению одной точки (или фигуры), удовлетворяющей каким либо условиям, вытекающим из условия задачи.

Метод геометрических преобразований состоит в том, что кроме данных в условии задачи фигур, рассматриваются другие вспомогательные фигуры, полученные из данных фигур или их элементов при помощи какого-либо частного вида преобразования. Среди геометрических преобразований на плоскости выделяют: центральную симметрию, осевую симметрию, параллельный перенос, поворот, подобие, гомотетию.

Характерным для решения геометрических задач является применения вспомогательных построений. С их помощью удается свести задачу к более простому виду, решение которой может быть получено путем несложных преобразований. К методу вспомогательных построений относится вспомогательная окружность, спрямление и дополнительные треугольники.

В заключении отметим, что при решении задачи зачастую на практике применяется тот или иной метод не в «чистом» виде. Мы имеем дело с комбинацией алгебраических и геометрических методов. Например, на первом этапе может понадобиться составление уравнений, а затем доказательство искомого утверждения будет найдено с помощью геометрического метода. В таких случаях говорят, что задача решается *комбинированным* методом.

Приведем примеры решения одной задачи разными способами.

Задача. В произвольном треугольнике ABC биссектриса BE перпендикулярна медиане AD, причем BE=AD=4. Найти стороны треугольника ABC.

Данную задачу можно решить координатным методом, методом составления уравнений или методом дополнительных построений.

Координатный метод.

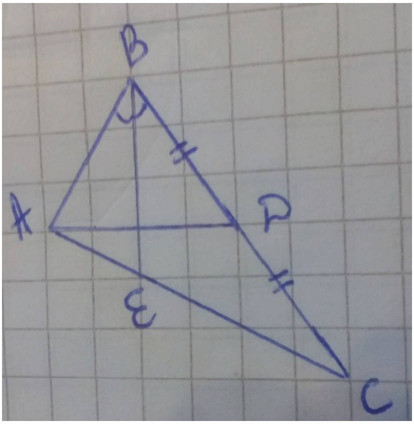

Рис. 2. Рисунок к задаче.

Решение:

1. Пересечение медианы и биссектрисы обозначим буквой О, и примем ее за начало прямоугольной системы координат.
2. Прямоугольные треугольники ABO и DBO равны по катету и острому углу, поэтому AO=OD= 2 и AB=BD, так что BC=2AB.
3. В введенной нами системе координат точки A, D, B, E имеют координаты: A(-2; 0), B(0; b), D(2; 0), E(0; y).
4. Зная, что D – середина BC, получаем, что C(4; -b).
5. Найдем вторую координату точки E(0; y), пользуясь тем, что она принадлежит прямой AC. Уравнение прямой AC имеет вид: $\frac{x+2}{6} = \frac{y}{-b}$. Координаты точки E удовлетворяют этому уравнению, поэтому $\frac{1}{3} = \frac{y}{-b}$. Тогда x=0, y=$-\frac{b}{3}$ и BE=$\frac{4}{3}b$
6. По условию задачи BE=4, а мы получили, что BE=$\frac{4}{3}b$. Следовательно, b=3
7. Координаты вершин ΔABC: A(-2; 0), B(0; 3), C(4; -3), D(2; 0).
8. Найдем стороны треугольника:

   AB=$\sqrt{(0+2)^2+(3-0)^2}$=$\sqrt{13}$

   BC=$\sqrt{(4-0)^2+(-3-3)^2} = 2\sqrt{13}$

   AC=$\sqrt{(4+2)^2+(3+0)^2}$=$3\sqrt{5}$

Ответ: AB=$\sqrt{13}$, $\mathrm{BC} = 2\sqrt{13}$, $\mathrm{AC} = 3\sqrt{5}$.

Метод составления уравнений.

Решение:

1) Пересечение медианы и биссектрисы обозначим буквой О.
2) Пусть AB = x, тогда BD=x (из равенства треугольников ABO и DBO) и BC = 2x.
3) Пусть AE = y, тогда CE = 2y (по свойству биссектрисы треугольника),

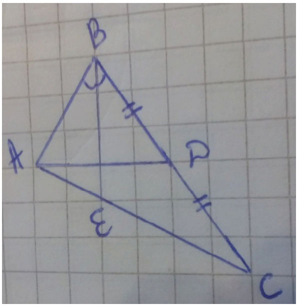

Рис. 3. Рисунок к задаче.

AC=y+2y=3y.

4) Выразим длину медианы через стороны треугольника, а затем подставим имеющиеся значения: $AD^2 = \frac{2*AC^2+2*AB^2-BC^2}{4}$;

$16 = \frac{2*(3y)^2+2*x^2-(2x)^2}{4}$.

5) Выразим длину биссектрисы через стороны треугольника и также подставим имеющиеся значения: BE^2=BC*AB-CE*EA; 16=2x*x-2y*y.

6) Имеем систему уравнений: $\begin{cases} 16 = \frac{2*(3y)^2+2*x^2-(2x)^2}{4} \\ 16 = 2x^2 - 2y^2 \end{cases}$

$$\begin{cases} 64 = 18y^2 + 2x^2 - 4x^2 \\ x^2 - y^2 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 64 = 18y^2 - 2x^2 \\ x^2 = 8 + y^2 \end{cases}$$

Решая полученную систему уравнений получаем, что y=$\sqrt{5}, x = \sqrt{13}$.

Значит, AB=$\sqrt{13}$, $BC = 2\sqrt{13}$, $AC = 3\sqrt{5}$

Ответ: AB=$\sqrt{13}$, $BC = 2\sqrt{13}$, $AC = 3\sqrt{5}$.

Метод дополнительных построений.

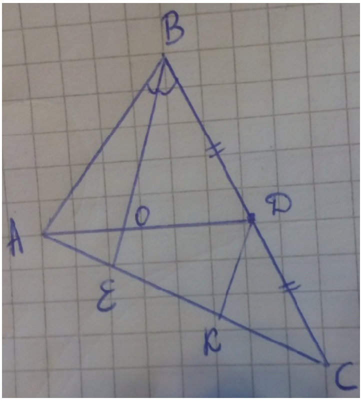

Рис. 4. Рисунок к задаче.

1) Рассмотрим треугольник BEC и проведем $DK \parallel BE$. Так как BD=DC, то DK-средняя линия треугольника BEC и DK=$\frac{1}{2}BE$
2) Рассмотрим треугольник ADK. Так как AO=OD, то OE-средняя линия треугольника ADK и OE=$\frac{1}{2}DK$
3) Выразим OE через BE. OE=$\frac{1}{2}DK = \frac{1}{2} * \frac{1}{2}BE = \frac{1}{4}BE$. Так как BE=4, то OE=1, BE=3.
4) Рассмотрим треугольники ABO и DBO. Они равны по катету и острому углу, поэтому AO=OD= 2 и AB = BD. По теореме Пифагора найдем AB, AB=$\sqrt{13}$.
5) BD=DC по условию, следовательно, BC=2BD=2$\sqrt{13}$
6) Рассмотрим треугольник AOE- прямоугольный. По теореме Пифагора: AE=$\sqrt{5}$
7) По свойству биссектрисы $\frac{CE}{EA} = \frac{CB}{BA}$, то есть $\frac{CE}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{13}}, CE = 2\sqrt{5},$ следовательно, $AE = \sqrt{5}, AC = 3\sqrt{5}$

Ответ: AB=$\sqrt{13}$, $\mathrm{BC} = 2\sqrt{13}, \mathrm{AC} = 3\sqrt{5}$.

Рассмотренные методы решения планиметрических задач могут активно применяться на уроках в общеобразовательных школах и при решении олимпиадных задач. В геометрии в отличие от алгебры алгоритмов решения задач очень мало, почти нет, поэтому важно познакомить учащихся с большим набором задач, и проиллюстрировать различные методы их решения.

Умение решить планиметрическую задачу различными методами способствует формированию логического мышления, развитию интуиции, систематизации знаний, умению анализировать, сравнивать, выявлять закономерности, обобщать и делать выводы, расширению кругозора и накоплению опыта. Длительная работа по изучению и применению методов решения задач создает условия для формирования и развития навыков в исследовательской и проектной деятельности и способствует всестороннему развитию личности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Задачи повышенной трудности по геометрии. Часть II: Учебно - методическое пособие/ О.В. Разумова. – Казань: Казан. ун-т, 2012. –112 с.

2. Основные методы решения планиметрических задач школьного курса геометрии. –URL: http://studbooks.net/1858482/pedagogika/osnovnye_metody_resheniya_planimetricheskih_zadach_shkolnogo_kursa_geometrii (дата обращения: 14.04.2018)

3. Практикум по элементарной математике: геометрия: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов и учителей / В.А. Гусев, В.Н. Литвиненко, А.Г. Мордкович. –2-е изд., перераб. и доп. М.: Просвещение, 1992. –352 с.