

## КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА НЕФТЕВЫТЕСНЕНИЯ

**Аннотация.** В статье представлены результаты вычислительных экспериментов по компьютерному моделированию одномерного процесса нефтевытеснения и прогноза коэффициента текущей нефтеотдачи в рамках математической модели Лиса-Рапопорта, алгоритмы численной реализации граничных условий в задаче двухфазной фильтрации.

**Ключевые слова:** процесс нефтевытеснения, вытесняющая фаза, вытесняемая фаза, двухфазная фильтрация, нагнетательная скважина, эксплуатационная скважина, математическая модель, метод математического моделирования на компьютере, функция насыщенности, граничное условие, конечно-разностный метод, вычислительный эксперимент, коэффициент текущей нефтеотдачи, программное обеспечение.

**1. Постановка задачи.** Значение коэффициента текущей нефтеотдачи является показателем эффективности процесса нефтевытеснения, которое определяется как отношение извлечённого на данный момент времени объёма нефти к её первоначальному запасу [1,2]. Динамика коэффициента текущей нефтеотдачи зависит от характера процесса вытеснения. Методом математического моделирования на компьютере можно прогнозировать этот технологический показатель для каждого конкретного месторождения.

В теоретических исследованиях коэффициент текущей нефтеотдачи вычисляется по результатам расчёта распределения функции насыщенности вытесняемой нефтяной фазы или вытесняющей фазы (например, водяной фазы) в рамках той или иной математической модели процесса двухфазной фильтрации. Распределение функции насыщенности вытесняющей фазы  $S(x, t)$

в модели Лиса-Рапопорта двухфазной фильтрации несмешивающихся и несжимаемых жидкостей без учета гравитационных сил при заданном объемном расходе двухфазной жидкости описывается нелинейным уравнением

$$m \cdot \partial S / \partial t + W \cdot \partial \varphi(S) / \partial x = \partial [a(S) \cdot \partial S / \partial x] / \partial x, \quad (1)$$

где  $S = S(x, t)$  - искомая функция,  $m$  - пористость нефтеносной среды,  $W$  - объемный расход двухфазной жидкости,  $\varphi(S)$  и  $a(S)$  - известные функции, выражающиеся через функции относительных фазовых проницаемостей вытесняемой и вытесняющей фазы  $f_1(S)$  и  $f_2(S)$ , отношение динамических вязкостей фаз  $\mu_0 = \mu_1 / \mu_2$ , абсолютную проницаемость среды  $k$  и функцию капиллярного давления  $P_k(S)$ :

$$\varphi(S) = \mu_0 \cdot f_2(S) / [f_1(S) + \mu_0 \cdot f_2(S)], \quad a(S) = -k_1 \cdot \varphi(S) \cdot P_k'(S) \geq 0, \quad k_1 = k / \mu_1 \cdot f_1(S), \quad (2)$$

$x$  и  $t$  - пространственная и временная переменные [1-3].

Функции  $f_1(S)$  и  $f_2(S)$  определяются из натуральных экспериментов по вытеснению и обладают свойствами

$$f_1(\underline{S}) = 1, \quad f_1(\bar{S}) = 0, \quad f_2(\bar{S}) = 1, \quad f_2(\underline{S}) = 0, \quad (3)$$

где  $\underline{S}$  и  $\bar{S}$  - соответственно, нижнее и верхнее предельное значение функции  $S(x, t)$ .

Условие закачки на нагнетательной скважине  $\Gamma_n$  только вытесняющей фазы

$$W_2 |_{\Gamma_n} = [\varphi(S) \cdot W - a(S) \cdot \partial S / \partial x] |_{\Gamma_n} = W = const \quad (4)$$

порождает граничное условие

$$(\partial S / \partial x) |_{\Gamma_n} = -[1 - \varphi(S)] \cdot W / a(S) |_{\Gamma_n} \quad (5)$$

относительно искомой функции  $S(x, t)$ , а условие отбора на эксплуатационной (добывающей) скважине  $\Gamma_o$  обеих фаз пропорционально их фазовым проницаемостям  $k_i = k / \mu_i \cdot f_i(S)$ ,  $i = 1, 2$  порождает граничное условие

$$(\partial S / \partial x) |_{\Gamma_o} = 0 \quad [1, 2]. \quad (6)$$

Предполагается также, что задано некоторое начальное распределение функции насыщенности вытесняющей фазы

$$S(x, 0) = S_0(x). \quad (7)$$

**2. Численный метод решения задачи.** Задача (1) - (7) решается численно конечно-разностным методом в области  $D = \{0 \leq x \leq L; 0 \leq t \leq T\}$ . Область покрывается равномерной сеткой  $x_i = i \cdot h, t_j = j \cdot \tau, i = 0, 1, \dots, N, j = 0, 1, \dots, M, h$  и  $\tau$  - шаг разностной сетки по пространству и времени. Используется явная конечно-разностная схема “центральная разность”

$$m \cdot (S_i^{j+1} - S_i^j) / \tau + W \cdot (\varphi_{i+1/2}^j - \varphi_{i-1/2}^j) / h = [a_{i+1/2}^j \cdot (S_{i+1}^j - S_i^j) - a_{i-1/2}^j \cdot (S_i^j - S_{i-1}^j)] / h^2 \quad (8)$$

где  $\varphi_{i+1/2}^j = \varphi((S_{i+1}^j + S_i^j) / 2)$ ,  $a_{i+1/2}^j = a((S_{i+1}^j + S_i^j) / 2)$ .

**3. Алгоритм численной реализации граничного условия на нагнетательной скважине.** Считается, что нагнетательная скважина расположена в точке  $x = 0$ , а эксплуатационная - в точке  $x = L$ . В силу свойств (3) функций относительных фазовых проницаемостей из (2) следует, что

$$\varphi(\underline{S}) = 0, \quad \varphi(\bar{S}) = 1, \quad a(\bar{S}) = a(\underline{S}) = 0. \quad (9)$$

Следовательно, в граничном условии (5)

$$\lim_{\underline{S} \rightarrow \underline{S}} (\partial S / \partial x) |_{r_H} = -\infty. \quad (10)$$

При значениях функции  $S = S(x, t)$ , близких к  $\underline{S}$ , численная реализация граничного условия (5) в силу (10) вызывает определенные трудности, такие как измельчение шага  $h$  разностной сетки в окрестности нагнетательной скважины, которые подробно изложены в [1-2, 4-7].

Граничное условие (5), однако, является следствием условия (4). Рассмотрим предельный случай условия (4) с учётом (9) и (10):

$$\lim_{\underline{S} \rightarrow \underline{S}} W_2 |_{r_H} = \lim_{\underline{S} \rightarrow \underline{S}} [\varphi(S) \cdot W - a(S) \cdot \partial S / \partial x] |_{r_H} = W |_{r_H},$$

т.е. неопределенность вида  $0 \cdot \infty$ , порождаемая выражением

$$\lim_{\underline{S} \rightarrow \underline{S}} [a(S) \cdot \partial S / \partial x] = \lim_{\underline{S} \rightarrow \underline{S}} a(S) \cdot \lim_{\underline{S} \rightarrow \underline{S}} (\partial S / \partial x),$$

разрешается как конечная величина  $W$ . При численном решении задачи (1) - (7) можно реализовать граничное условие не в виде (5), а в виде (4) [1-2, 4-7].

Разностное уравнение (8) в сеточном узле ( $i = 0, j$ ) принимает вид

$$m \cdot (S_0^{j+1} - S_0^j) / \tau + W \cdot (\varphi_{1/2}^j - \varphi_{-1/2}^j) / h = [a_{1/2}^j \cdot (S_1^j - S_0^j) - a_{-1/2}^j \cdot (S_0^j - S_{-1}^j)] / h^2. \quad (11)$$

Разложив в (11) величины  $\varphi_{1/2}^j$ ,  $a_{1/2}^j$  и  $S_{-1}^j$  в ряды Тейлора в окрестности точки  $(x = x_0 = 0, t = t_j)$ , пренебрегая в рядах слагаемыми порядка  $O(h^3)$  и выше, и произведя некоторые преобразования, можно получить:

$$m \cdot (S_0^{j+1} - S_0^j) / \tau = 1/h \cdot [\varphi(S) \cdot W - a(S) \cdot \partial S / \partial x]_0^j - 1/h \cdot \varphi_{1/2}^j \cdot W - 1/2 \cdot [\partial \varphi(S) / \partial x \cdot W - \partial a(S) / \partial x \cdot \partial S / \partial x - a(S) \cdot \partial^2 S / \partial x^2]_0^j + 1/h^2 \cdot a_{1/2}^j \cdot (S_1^j - S_0^j), \quad (12)$$

Заменой в (12) выражения  $[\varphi(S) \cdot W - a(S) \cdot \partial S / \partial x]_0^j$ , согласно граничному условию (4), через  $W$ , а выражения  $[\partial \varphi(S) / \partial x \cdot W - \partial a(S) / \partial x \cdot \partial S / \partial x - a(S) \cdot \partial^2 S / \partial x^2]$ , согласно уравнению (1), через  $(-m \cdot \partial S / \partial t)_0^j$ , получается равенство

$$S_0^{j+1} = S_0^j + 2 \cdot \tau / (m \cdot h) \cdot [(1 - \varphi_{1/2}^j) \cdot W + a_{1/2}^j \cdot (S_1^j - S_0^j) / h], \quad (13)$$

позволяющее вычислять значение функции насыщенности на нагнетательной скважине на каждом последующем временном шаге  $(j+1)$  разностной сетки.

Если начальная насыщенность нефтеносного пласта вытесняющей фазой равна остаточной  $\underline{S}$ , то соотношение (13) на первом шаге по времени принимает вид  $S_0^1 = S_0^0 + 2 \cdot \tau / (m \cdot h) \cdot W$ , откуда видно, что насыщенность вытесняющей фазы на нагнетательной скважине начинает возрастать с некоторой конечной скоростью пропорционально закачиваемому объему вытесняющей фазы  $W$ . Далее, по мере возрастания  $S_0^{j+1}$  значения  $(1 - \varphi_{1/2}^j)$  и  $a_{1/2}^j$  уменьшаются и, согласно (13), следует ожидать замедление роста насыщенности вытесняющей фазы на нагнетательной скважине. При достижении на нагнетательной скважине и в её окрестности верхнего предельного значения насыщенности вытесняющей фазы  $\bar{S}$ , согласно свойствам (3) функций  $\varphi(S)$  и  $a(S)$ , соотношение (13) принимает вид  $S_0^{j+1} = S_0^j$ , т.е. реализация граничного условия (4) в виде (13) отражает факт прекращения дальнейшего роста насыщенности вытесняющей фазы на нагнетательной скважине.

**4. Численная реализация граничного условия на эксплуатационной скважине.** Разностное уравнение (8) в сеточном узле  $(i = N, j)$  принимает вид

$$m \cdot (S_N^{j+1} - S_N^j) / \tau + W \cdot (\varphi_{N+1/2}^j - \varphi_{N-1/2}^j) / h = [a_{N+1/2}^j \cdot (S_{N+1}^j - S_N^j) - a_{N-1/2}^j \cdot (S_N^j - S_{N-1}^j)] / h^2. \quad (14)$$

По аналогии с реализацией граничного условия (4) на нагнетательной скважине, разложив в уравнении (14) величины  $\varphi_{N+1/2}^j$ ,  $a_{N+1/2}^j$ , и  $S_{N+1}^j$  в ряды Тейлора в окрестности точки ( $x = x_N = L$ ,  $t = t_j$ ), пренебрегая в рядах слагаемыми порядка  $O(h^3)$  и выше, произведя некоторые преобразования, с учетом граничного условия (6) и уравнения (1), можно получить следующее выражение для вычисления значения функции насыщенности на эксплуатационной скважине на каждом последующем временном слое разностной сетки:

$$S_N^{j+1} = S_N^j - 2 \cdot \tau / (m \cdot h) \cdot [(\varphi_N^j - \varphi_{N-1/2}^j) \cdot W + a_{N-1/2}^j \cdot (S_N^j - S_{N-1}^j) / h]. \quad (15)$$

Соотношение (15) является реализацией граничного условия (6) на эксплуатационной скважине и позволяет вычислять значения функции насыщенности на эксплуатационной скважине (в сеточном узле  $i = N$ ) на каждом последующем временном шаге  $(j+1)$  разностной сетки. Согласно (15), насыщенность вытесняющей фазы на эксплуатационной скважине начинает возрастать только после прихода фронта вытеснения. В этом случае  $(S_N^j - S_{N-1}^j) < 0$ ,  $(\varphi_N^j - \varphi_{N-1}^j) < 0$  и  $S_{N-1}^{j+1} > S_N^j$ .

**5. Результаты расчёта распределения насыщенности вытесняющей фазы.** Разработано программное обеспечение на языке C++, позволяющее проводить на компьютере расчёты процесса нефтewытеснения в рамках одномерной модели Лиса-Рапопорта. Проведены вычислительные эксперименты по численному решению одномерной задачи двухфазной фильтрации несжимаемых и несмешивающихся жидкостей применительно к процессу нефтewытеснения. Используются функции относительных фазовых проницаемостей вида  $f_1(S) = ((0,8 - S) / 0,6)^3$ ,  $f_2(S) = ((S - 0,2) / 0,8)^3$ , для которых  $\underline{S} = 0,2$  и  $\bar{S} = 1$ , а также функция капиллярного давления  $P_k(S) = \sigma \cdot \cos \theta \cdot \sqrt{m/k} \cdot (0,0072 / S - S / 2 + 0,391)$ , заимствованные из [1-3]. Вычислительные эксперименты проведены при различных начальных значениях вытесняющей фазы (7), при различных значениях угла смачивания  $\theta$ , а также шагов разностной сетки.

Часть результатов вычислительных экспериментов представлена на рисунках 1-4. Распределения насыщенности вытесняющей фазы на различные моменты времени, представленные на рисунках 1 и 2, получены, соответственно, при  $S(x, 0)=0.2$ ,  $\theta=0$  и  $S(x, 0)=0.3$ ,  $\theta=0.5$ . Остальные же параметры имеют следующие значения:  $L=40$  см,  $m=0.2$ ,  $k=0.0000000302$ мд,  $\mu_1=0.009$  пуаз,  $\mu_2=0.001$  пуаз,  $W=0.012$  см<sup>3</sup>/сек,  $\sigma=75$  дин/см,  $N=20$ ,  $h=2$ см,  $\tau=0.02$ сек. Из графиков функции насыщенности вытесняющей фазы на рис.1 наблюдается “поршневой” характер вытеснения при отношении динамических вязкостей фаз  $\mu_0 = \mu_1 / \mu_2 = 9$ . На нагнетательной скважине значение функции насыщенности вытесняющей фазы возрастает со временем с некоторой конечной скоростью, выполняются условия  $(\partial S / \partial x)|_{\Gamma_n} < 0$  и  $\lim_{S \rightarrow S} (\partial S / \partial x)|_{\Gamma_n} = 0$ . На эксплуатационной скважине насыщенность вытесняющей фазы начинает возрастать после прихода фронта вытеснения. В расчетах погрешность в выполнении условия

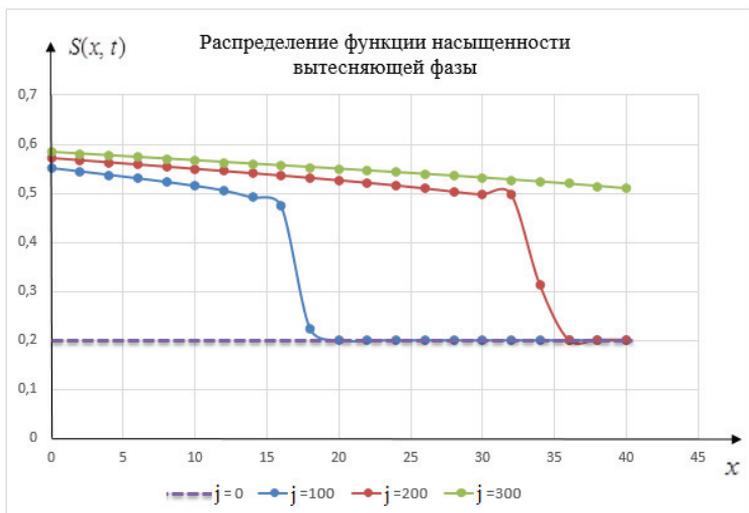


Рис.1. Распределение функции насыщенности вытесняющей фазы на различные, возрастающие моменты времени,  $S(x, 0)=0.2$ ,  $\theta=0$

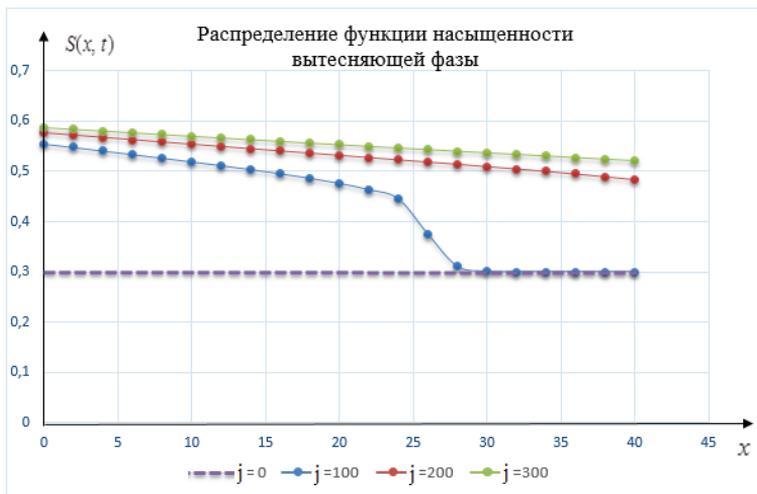


Рис.2. Распределение функции насыщенности вытесняющей фазы на различные возрастающие моменты времени,  $S(x, 0) = 0.3$ ,  $\theta = 0.5$ .

материального баланса со временем возрастает, однако, в основном остается в пределах 1%. Результаты вычислительных экспериментов совпадают с результатами натуральных экспериментов по нефтевытеснению, опубликованными в работе [8].

**6. Результаты расчёта коэффициента текущей нефтеотдачи.** На рисунках 3 и 4 представлены графики зависимости коэффициента текущей нефтеотдачи от времени при различных значениях начального содержания вытесняющей фазы в нефтеносном пласте. Коэффициент нефтеотдачи  $k_n(t)$  на текущий момент времени  $0 < t \leq T$  вычисляется по формуле

$$k_n(t) = \left\{ \int_0^L [1 - S(x, 0)] dx - \int_0^L [1 - S(x, t)] dx \right\} / \left\{ \int_0^L [1 - S(x, 0)] dx \right\}, \quad (16)$$

где  $\int_0^L [1 - S(x, 0)] dx$  и  $\int_0^L [1 - S(x, t)] dx$  - соответственно, начальное и текущее содержание нефтяной фазы. Следовательно, в формуле (16) выражение в числителе представляет собой объём извлечённой на данный момент времени нефтяной фазы.

При остаточном начальном содержании вытесняющей фазы ( $S(x, 0) = 0.2$ , вытесняющая фаза неподвижна) коэффициент текущей нефтеотдачи имеет более высокое конечное значение по сравнению со случаем  $S(x, 0) = 0.3$ . Эти результаты отражают тот факт, что при  $S(x, 0) = 0.3$  с самого начала процесса нефтевытеснения на эксплуатационной скважине отбираются обе фазы и в отбираемом потоке доля нефтяной фазы меньше, чем в случае  $S(x, 0) = 0.2$ . Из рисунка 3 видно, что в случае  $S(x, 0) = 0.2$  примерно до 250-го шага по времени коэффициент текущей нефтеотдачи растёт почти прямо пропорционально времени, затем наблюдается уменьшение роста. Из рисунка 1 видно, что этот момент времени соответствует времени прихода фронта вытеснения на добывающую скважину и началу совместного отбора обеих фаз, и вытесняемой и вытесняющей. С этого момента времени доля нефтяной фазы в отбираемом двухфазном потоке уменьшается, что является причиной снижения роста коэффициента текущей нефтеотдачи.

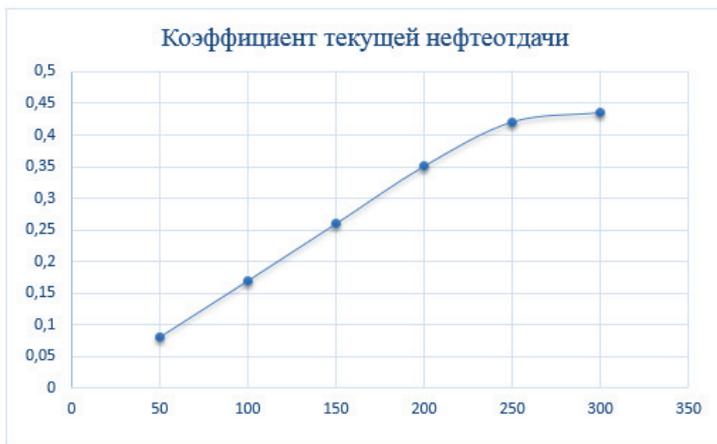


Рис.3. График зависимости коэффициента текущей нефтеотдачи от времени ( $S(x, 0) = 0.2, \theta = 0$ ).

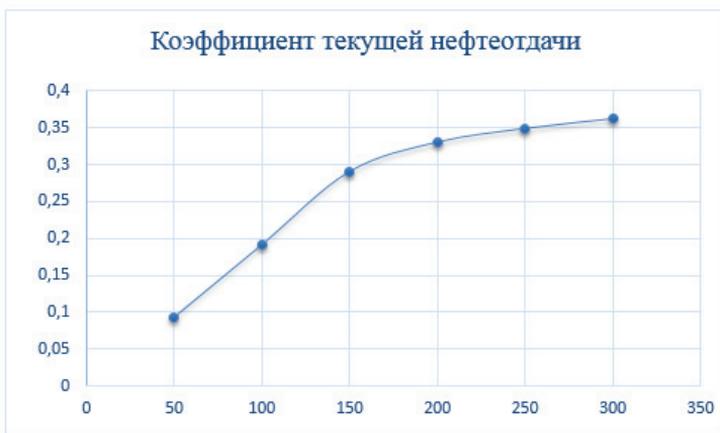


Рис.4. График зависимости коэффициента текущей нефтеотдачи от времени ( $S(x, 0) = 0.3, \theta = 75$ ).

**7. Заключение.** Таким образом, вычислительными экспериментами на компьютере показана практическая применимость использованных формулировок граничных условий, метода и алгоритмов их численной реализации. Результаты вычислительных экспериментов по компьютерному моделированию одномерного процесса нефтewытеснения качественно соответствуют известным результатам натуральных экспериментов по нефтewытеснению, что позволяет сделать вывод о применимости рассмотренной математической модели, метода, алгоритмов, разработанного программного обеспечения для моделирования на компьютере процессов нефтewытеснения и прогнозирования технологических показателей.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коновалов А.Н. Задачи фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. Новосибирск: Наука, 1988. 166 с.
2. Швидлер М.И., Леви Б.И. Одномерная фильтрация несмешивающихся

жидкостей. М.: Недра, 1970. 156 с.

3. Rapoport L.A. and Leas W.J. Properties of linear waterfloods. – Transactions of the American Institute of mining and metallurgical engineers (Transactions of AIME), 1953, v. 198, p. 139-148.

4. Лаевский Ю.М. Задача о скважинах для стационарного уравнения диффузии // Сибирский журнал вычислительной математики, т.13, №2, 2010, с.123-142.

5. Лаевский Ю.М., Попов П.Е., Калинин А.А. О численном моделировании фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости смешанным методом конечных элементов // Математическое моделирование, том 22, №3, 2010, с.74-90.

6. Попов П.Е. Математическое моделирование процессов фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости на параллельных вычислительных системах: дис...канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 2011. 118 с.

7. Мазуров П.А., Цепяев А.В. Алгоритмы для распараллеливания решения задач двухфазной фильтрации жидкости на сетках со сгущающимися участками // Вычислительные методы и программирование, 2006, Т.7, с. 251-258.

8. Курбанов А.К. Об уравнениях движения двухфазных жидкостей в пористой среде. – В кн.: Теория и практика добычи нефти. М., 1968, стр. 281-286.