Д.Е. Васильев, Т.К. Гусева, А.А. Чернухина

Тюменский государственный университет, г. Тюмень

УДК 532.546.2

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА РОСТА МЕТАНОВОГО ЗАРОДЫША В ЛИНЕЙНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Аннотация. В данной работе рассматривается численное решение системы дифференциальных уравнений, описывающей линейную задачу роста одиночного метанового зародыша в нефти, при условии изначального нахождения с ней в термодинамическом и силовом равновесии. Численное решение получено путём линеаризации основных дифференциальных уравнений с использованием метода конечных разностей. Оценка корректности проводится путём сравнения полученного результата с известным аналитическим.

Ключевые слова: метановый зародыш, линейный анализ, численное решение, коэффициент Оствальда. уравнение диффузии

Введение. Процесс роста газового зародыша в жидкости является важным для понимания явления кипения газонасыщенной жидкости. Задача исследования данного процесса является актуальной на сегодняшний день, поскольку кипение газонасыщенных жидкостей широко встречается в различных областях, в особенности в нефтегазовой промышленности и тепловой энергетике. Анализируя вышеупомянутый процесс, выделяя закономерности протекания, можно совершенствовать технологию их использования, оптимизируя процесс регулирования и предотвращая возможные технологические аварии.

Следовательно, важной задачей является численное моделирование системы «газовый зародыш — жидкость», которое позволит исследовать рост газового зародыша в перенасыщенной газом жидкости и проанализировать влияние различных

Постановка задачи

Пусть a_0, p_0, p_{g0} и T_0 — радиус зародыша, давление жидкости, давление газа в пузырьке, температура жидкости соответственно. При этих параметрах пузырек находится в состоянии равновесия, тогда имеем [1]:

$$p_{g0} = p_0 + \frac{2\sigma}{a_0}, \qquad T_0 = T_s(p_{g0}),$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения; $T_s(p_{g0})$ — равновесная температура фазовых переходов, соответствующая значению давления p_{g0}, при условии плоской межфазной поверхности.

Согласно закону Генри, газ, растворенный в жидкости, при падении давления оказывается в перенасыщенном состоянии, в результате чего начинается спонтанное зарождение и рост газовых пузырьков. Динамику данного роста можно описать фундаментальным нелинейным уравнением Релея-Лямба, описывающим радиальные движения газового зародыша в несжимаемой жидкости.

$$\rho_l^0\left(a\frac{d^2a}{dt^2} + \frac{3}{2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \frac{4\nu_l^{(\mu)}}{a}\frac{da}{dt}\right) = p_g - p_l - \frac{2\sigma}{a}. \qquad (1)$$

Выражение (1) представляет собой уравнение Релея — Ламба. Параметры ρ_l^0, $\nu_l^{(\mu)}$, p_g, p_l – плотность жидкости, кинематическая вязкость, давление газа, давление жидкости соответственно.

Неизвестное давление газа получим из следующего уравнения:

$$\frac{dp_g}{dt} = 3\frac{\rho_g}{a}\left(\frac{\rho_l^0}{\rho_g^0}D_l\left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)_a - \frac{da}{dt}\right). \qquad (4)$$

В уравнении (4) второе слагаемое в правой части представляет собой изменение давления за счет скорости изменения радиуса зародыша. Первое слагаемое в правой части этого уравнения отвечает за интенсивность растворения газа, лимитируемую процессом диффузии газа вблизи межфазной поверхности. Поэтому для определения интенсивности массообмена необходимо записать уравнение диффузии в жидкости.

Следовательно, для определения диффузионных потоков необходимо добавить уравнение диффузии в жидкости вокруг зародыша [2]:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = D_l \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial g}{\partial r}\right),$$

где g и D_l – концентрация газа в жидкости и коэффициент диффузии соответственно. Граничные условия для величины концентрации газа в жидкости будем считать:

$$\begin{cases} g = g_a, & r = a; \\ g = 0, & r = \infty. \end{cases}$$

Здесь g_a – концентрация газа на поверхности зародыша, подчиняющаяся закону Генри, а именно: $g_a = G{*}p_g$, где G – коэффициент Генри. Таким образом исследуемый процесс роста газового зародыша описывается полученной системой уравнений, имеющей следующий вид:

$$\begin{cases} \rho_l^0\left(a\frac{d^2a}{dt^2} + \frac{3}{2}\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \frac{4\nu_l^{(\mu)}}{a}\frac{da}{dt}\right) = p_g - p_l - \frac{2\sigma}{a} \\ \frac{dp_g}{dt} = 3\frac{\rho_g}{a}\left(\frac{\rho_l^0}{\rho_g^0}D_l\left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)_a - \frac{da}{dt}\right) \\ \frac{\partial g}{\partial t} = D_l\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial g}{\partial r}\right) \end{cases}$$

Решение. Описанная выше система нелинейна, следовательно, для возможности аналитического исследования, необходимо построение приближенной линейной модели, используя, так называемый, первый метод Ляпунова [4].

Линеаризируя последовательно каждое уравнение, в конечном счёте получим линейную систему уравнений в следующем виде [1]:

$$\begin{cases} \rho_l^0\left(a_0\frac{d^2a}{dt^2} + \frac{4\nu_l^{(\mu)}}{a_0}\frac{da}{dt}\right) = p_g + \frac{2\sigma}{a_0^2}a \\ \frac{dp_g}{dt} = 3\frac{\rho_{g0}}{a_0}\left(\frac{\rho_l^0}{\rho_{g0}^0}D_l\left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)_{a_0} - \frac{da}{dt}\right) \\ \frac{\partial g}{\partial t} = D_l\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial g}{\partial r}\right)_{a_0} \end{cases} \tag{5}$$

Граничные условия для величины концентрации газа в жидкости примем следующими:

$$\begin{cases} g = g_{a0}, & r = a_0; \\ g = 0, & r = \infty. \end{cases}$$

Здесь g_{a0} — концентрация газа на поверхности зародыша, которая связана с законом Генри выражением: $g_a = G^* p_g$.

При численном решении исходной системы использовался метод конечно-разностных схем. Каждое из уравнений было переведено в конечно-разностный вид с использованием явных численных схем, так же, как и граничные и начальные условия.

Алгоритм решения системы (5) заключался в следующем: на первом временном шаге решалось уравнение диффузии, разностная схема которого выглядит следующем образом:

$$g_i^{n+1} = g_i^n + D_l \Delta t \left(\frac{g_{i+1}^n - 2g_i^n + g_{i-1}^n}{(\Delta r)^2} + \frac{2}{r_i} \frac{g_{i+1}^n - g_i^n}{\Delta r} \right),$$

с учётом начального условия:

$$g = g_0 = G\left(p_0 + \frac{2\sigma}{a_0}\right), \text{ при } t = 0,$$

и граничного:

$$\begin{cases} g = g_{a0} = G\left(p_0 + \frac{2\sigma}{a_0}\right), \ r = a_0; \\ g = 0, \ r = \infty. \end{cases} \tag{8}$$

Далее поочередно рассчитывалось значение радиуса зародыша:

$$a^{n+1} = (\Delta t)^2 \left(a^n \left(2\rho_l^0 a_0 + \frac{4\nu_l^{(\mu)}}{a_0} \Delta t + \frac{2\sigma}{a_0^2} (\Delta t)^2 \right) - \rho_l^0 a_0 a^{n-1} \right) + p_{g_{a0}}^n,$$

и давление в пузырьке газа:

$$p_g^{n+1} = p_g^n + 3\Delta t \frac{\rho_{g0}}{a_0} \left(\frac{\rho_l^0}{\rho_{g0}^0} D_l \left(\frac{g_{i+1}^n - g_i^n}{\Delta r}\right)_{a_0} - \frac{a^{n+1} - a^n}{\Delta t} \right),$$

после чего происходил пересчёт граничного условия (8) для уравнения диффузии и итерационный процесс продолжался. Таким образом было получено решение в виде зависимостей исследуемых величин *a, g, p* от времени.

Для оценки корректности полученного численного решения, результат был сопоставлен с найденным в [1] аналитическим решением.

На рисунке 1 представлено сопоставление результатов численного моделирования и аналитического решения поставленной задачи. Из графиков видно, что численное решение с достаточной степенью точности совпадает с аналитическим, максимальное отклонение в решениях не превышает 5%.

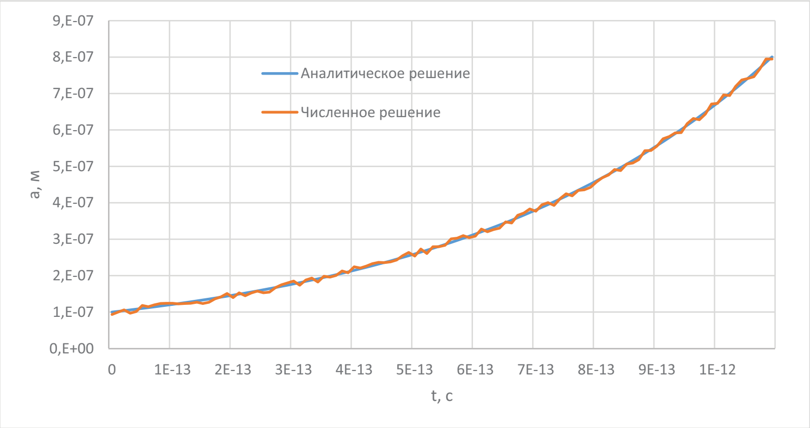

Рис.1 Сравнение численного и аналитического решения.

Заключение Таким образом была проанализирована существующая аналитическая модель процесса роста газового зародыша и предложен алгоритм для численного моделирования поставленной задачи. Полученные результаты динамики роста газового зародыша и давления могут служить инструментом для прогнозирования и оценки процессов разгазирования в нефти, как при исследовании поведения нефти в пласте, так и при оптимизации процессов сепарации нефти.

Авторы выражают благодарность научному руководителю Н.Е. Актаеву за внимание к работе

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коледин В. В. Исследование процесса роста метанового зародыша в линейном приближении / В. В. Коледин, И. С. Мельник, А. А. Яковлева // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2017. Том 3. №2. С. 33-45.

2. Валлиулин Р.А. Исследование радиально-углового распределения температуры при неизотермической двухфазной фильтрации нефти и газа / Р.А.Валлиулин, Р.Ф.Шарафутдинов и др. // Прикладная механика и техническая физика. 2008. Том 49. №6. С. 124-130.

3. Валлиулин Р.А. Термические исследования при компрессорном освоении скважин / Р.А. Валлиулин, А.Ш. Рамазанов. Уфа: Изд-во Башкир. ун-та, 1992.

4. Воронов А. А. Основы теории автоматического управления: Автоматическое регулирование непрерывных линейных систем. – 2-е изд., перераб. — М.: Энергия, 1980. — С. 312.

5. Рид Р., Праусниц Дж., Шервуд Т. Свойства газов и жидкостей: Справочное пособие / Пер. с англ. Под ред. Б.И. Соколова. – 3-е изд., перераб. и доп. – Л.: Химия, 1982. – С. 592