

**Сергей Петрович ПИРОГОВ<sup>1</sup>**  
**Дмитрий Андреевич ЧЕРЕНЦОВ<sup>2</sup>**

УДК 662.691.4

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ  
МАНОМЕТРИЧЕСКИХ ТРУБЧАТЫХ ПРУЖИН\***

<sup>1</sup> доктор технических наук,  
профессор кафедры прикладной механики,  
Тюменский индустриальный университет;  
профессор кафедры лесного хозяйства,  
деревообработки и прикладной механики,  
Государственный аграрный университет Северного Зауралья (г. Тюмень)  
pigo-gow@yandex.ru; ORCID: 0000-0001-5171-8942

<sup>2</sup> кандидат технических наук,  
доцент кафедры транспорта углеводородных ресурсов,  
Тюменский индустриальный университет  
cherencov\_dmitry@mail.ru; ORCID: 0000-0001-8072-6183

**Аннотация**

Сложные условия работы, а также вибрации агрегатов технологических процессов и нестабильная интенсивность нагрузок накладывают высокие требования на приборы контроля избыточного давления, которые обеспечивают требуемую точность измерений и безаварийную эксплуатацию оборудования.

Применение манометров на сегодняшний день является обязательным требованием для мониторинга избыточного давления. Основным тип манометров в качестве упругих

---

\* Авторы выражают признательность за поддержку Национальному проекту «Наука и университеты» Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, грант № FEWN-2021-0012.

---

**Цитирование:** Пирогов С. П. Математическое моделирование вынужденных колебаний манометрических трубчатых пружин / С. П. Пирогов, Д. А. Черенцов // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2022. Том 8. № 2 (30). С. 183-197.  
DOI: 10.21684/2411-7978-2022-8-2-183-197

---

чувствительных элементов использует манометрические трубчатые пружины (МТП). Поэтому актуальным является вопрос по расчету движения МТП под действием внешних переменных нагрузок, в частности переменного внутреннего давления. Вопросы, связанные с влиянием пульсаций внутреннего давления и внешних периодически изменяющихся внешних сил, остаются неизученными.

Для успешной эксплуатации были исследованы прочностные и частотные характеристики колебаний трубчатых пружин, рассмотрено влияние на их вибрационные характеристики форм поперечного сечения, основных геометрических размеров, а также проанализирован процесс вибродемпфирования жидкостью.

В работе представлена математическая модель вынужденных колебаний МТП, основанная на уравнениях Лагранжа второго рода. МТП рассматривается как механическая система с двумя степенями свободы, т. е. задаваемая двумя обобщенными координатами. Ими являются относительное изменение главного угла трубки и увеличение малой полуоси поперечного сечения.

Модель позволяет определять характер движения МТП под действием периодически изменяющегося внутреннего давления. Для реализации ее разработана программа в MATLAB, что делает возможным определять требуемые характеристики приборов контроля давления, исключая возможность возникновения резонанса. С помощью разработанной программы оценено влияние геометрических характеристик и пульсаций внутреннего давления на перемещения свободного конца МТП.

Представленная модель может быть успешно использована для динамических расчетов манометрических трубок, поскольку является классическим подходом к решению задач колебаний механических систем. Кроме того, она позволит рассчитать параметры трубчатых упругих элементов, используемые в различных механизмах в качестве силовых элементов.

#### **Ключевые слова**

Манометрическая трубчатая пружина, динамические характеристики, вынужденные колебания, частота, резонанс, пульсации давления, уравнения Лагранжа второго рода, MATLAB.

**DOI: 10.21684/2411-7978-2022-8-2-183-197**

#### **Введение**

Основным вектором развития нефтегазовой промышленности является арктическое и шельфовое направление. Транспортировку энергоносителей от месторождений до потребителей планируется осуществлять с помощью морского и трубопроводного транспорта. Районы строительства являются чрезвычайно сложными и требуют высокого контроля при эксплуатации объектов инфраструктуры [1, 8-14, 16, 20-26].

Один из главных параметров технологических процессов в нефтегазовой отрасли — рабочее давление. Аномальные условия работы, а также вибрации агрегатов

технологических процессов и нестабильная интенсивность нагрузок накладывают высокие требования на приборы для измерения давления, которые, в свою очередь, должны обладать высокой надежностью и необходимой точностью.

Согласно нормативной документации, все цифровые датчики измерения давления должны дублироваться аналоговыми манометрами, а в некоторых случаях применение манометров является безальтернативным способом мониторинга избыточного давления.

В качестве чувствительных элементов в манометрах используются манометрические трубчатые пружины (МТП), в которых применяется свойство криволинейной трубки с сечением, отличным от кругового, деформироваться при повышении внутреннего давления.

В настоящее время МТП, помимо манометров, нашли применение в различных областях техники [2, 3, 17].

Для успешной эксплуатации были исследованы прочностные и частотные характеристики колебаний трубчатых пружин, рассмотрено влияние на их характеристики формы и основных геометрических размеров, а также проанализирован процесс вибродемпфирования жидкостью [4-7, 15, 18, 19].

Однако вопрос, связанный с учетом пульсаций внутреннего давления, остается неизученным. В работе решается задача вынужденных колебаний МТП с помощью уравнения Лагранжа второго рода.

## Методы

МТП рассматривается как механическая система с двумя степенями свободы, т. е. задаваемая двумя обобщенными координатами. Ими являются относительное изменение главного угла трубки  $\varphi = \Delta\gamma/\gamma$  и увеличение малой полуоси поперечного сечения —  $w_0$  (рис. 1).

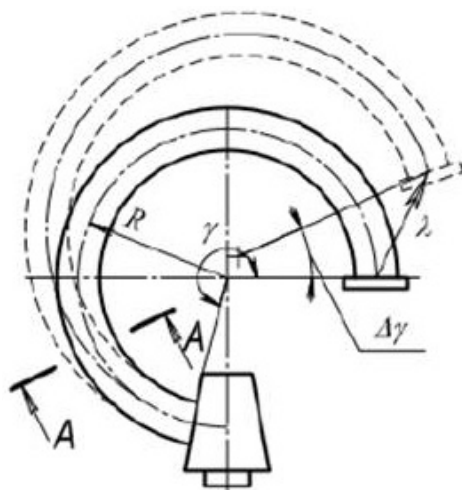


Рис. 1. Динамическая модель МТП

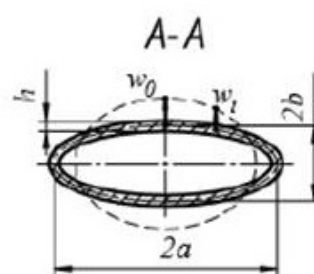


Fig. 1. Dynamic model MTS

Математическая модель представляет собой систему уравнений, основанных на уравнении Лагранжа второго рода. В рассматриваемом случае на точки системы, помимо сил, имеющих потенциал, действуют возбуждающие силы  $F(t)$ .

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \frac{\partial U}{\partial \varphi} = \frac{\partial A}{\partial \varphi}, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{w}} \right) - \frac{\partial T}{\partial w} + \frac{\partial U}{\partial w} = \frac{\partial A}{\partial w}, \end{cases} \quad (1)$$

где  $t$  — время;  $T$  — кинетическая энергия;  $U$  — потенциальная энергия;  $A$  — обобщенная работа пульсации внутреннего давления.

Ранее в работах [4, 17] были получены выражения для определения потенциальной и кинетической энергии. Потенциальная энергия имеет вид:

$$U = \frac{Eh\gamma}{2R(1-\mu^2)} \left[ \frac{A_1}{m^2} w^2 - 2b \frac{A_2}{m} \varphi w + b^2 A_3 \varphi^2 + \frac{\chi^2}{12} \frac{n}{m^2} w^2 \right], \quad (2)$$

где  $E$  — модуль упругости;  $\mu$  — коэффициент Пуассона;  $h$  — толщина стенки;  $\gamma$  — центральный угол;  $R$  — радиус центральной оси;  $A_1, A_2, A_3, b, m, n, \chi$  — коэффициенты, зависящие от формы поперечного сечения МТП.

Кинетическая энергия имеет вид:

$$T = 2\rho h R^3 \gamma \left( \frac{\gamma^3}{3} - 4 \sin \gamma + 2\gamma \sin \gamma + 2\gamma \right) B_1 \dot{\varphi}^2 + 2hR\gamma \left( \frac{B_2}{m^2} + \frac{B_3}{K_6^2 m_6^2} \right) \dot{w}^2, \quad (3)$$

где  $\rho$  — плотность материала;  $B_1, B_2, B_3, K_6, m_6$  — коэффициенты, зависящие от формы поперечного сечения.

Работа пульсации сил внутреннего давления представляется в следующем виде:

$$A = q \Delta f R \gamma, \quad (4)$$

где  $q$  — закон распределения внутреннего давления:  $p \cdot \sin(k_p t + \delta)$ ;  $\Delta f$  — изменение площади, ограниченной средней линией контура сечения, может быть представлено как:  $\frac{2wa}{m} \left( 1 - \frac{b^2}{a^2} \right) n$ ; здесь обозначения те же, что и в формуле (2);  $\gamma$  — центральный угол;  $R$  — радиус центральной оси.

В конечном виде обобщенная работа пульсации внутреннего давления будет иметь следующий вид:

$$A = p \cdot \sin(k_p t + \delta) \frac{2wa}{m} \left( 1 - \frac{b^2}{a^2} \right) n R \gamma. \quad (5)$$

Вычислив частные производные от потенциальной и кинетической энергии и обобщенной работы пульсации внутреннего давления, получим систему дифференциальных уравнений вынужденных колебаний системы:

$$\begin{cases} a_1\ddot{\varphi} + c_1\varphi + c_3w = 0, \\ a_2\ddot{w} + c_2w + c_3\varphi = d_1 \sin(k_p t + \delta), \end{cases} \quad (6)$$

где  $a_1, a_2$  — коэффициенты инерции;  $c_1, c_2, c_3$  — коэффициенты жесткости.

$$\begin{aligned} a_1 &= 4\rho h R^3 \gamma \left( \frac{\gamma^3}{3} - 4 \sin \gamma + 2\gamma \sin \gamma + 2\gamma \right) B_1, \quad a_2 = 4hR\gamma \left( \frac{B_2}{m^2} + \frac{B_3}{K_6^2 m_6^2} \right), \\ c_1 &= \frac{Eh\gamma}{2R(1-\mu^2)} (2b^2 A_3), \quad c_2 = \frac{Eh\gamma}{2R(1-\mu^2)} \left( \frac{A_1}{m^2} + \frac{\chi^2 n}{12 m^2} \right), \\ c_3 &= \frac{Eh\gamma}{2R(1-\mu^2)} \left( -2b \frac{A_2}{m} \right), \quad d_1 = p \frac{2a}{m} \left( 1 - \frac{b^2}{a^2} \right) nR\gamma. \end{aligned} \quad (7)$$

Общее решение системы дифференциальных уравнений (6) является суммой общего интеграла соответствующей системы однородных уравнений (8) и частного интеграла системы (6).

$$\begin{cases} a_1\ddot{\varphi} + c_1\varphi + c_3w = 0, \\ a_2\ddot{w} + c_2w + c_3\varphi = 0. \end{cases} \quad (8)$$

При интегрировании полученной системы дифференциальных уравнений частные решения можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \varphi &= I_1 \sin(kt + \beta), \\ w &= I_2 \sin(kt + \beta). \end{aligned} \quad (9)$$

Введем коэффициент  $\mu$ , равный отношению обобщенных координат:

$$\mu = \frac{w}{\varphi} = \frac{I_2}{I_1}. \quad (10)$$

Таким образом, получим:

$$\begin{aligned} \varphi &= I_1 \sin(kt + \beta), \\ w &= \mu I_1 \sin(kt + \beta), \\ \ddot{\varphi} &= k^2 I_1 \sin(kt + \beta), \\ \ddot{w} &= k^2 \mu I_1 \sin(kt + \beta). \end{aligned} \quad (11)$$

Подставляя (11) в (8) и разделив оба уравнения на  $I_1 \sin(kt + \beta)$ , получим:

$$\begin{cases} a_1 k^2 + c_1 + c_3 \mu = 0, \\ a_2 k^2 \mu + c_2 \mu + c_3 = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Решая систему (12) относительно  $\mu$ , получим характеристическое уравнение для определения частот свободных колебаний  $k$ :

$$a_1 a_2 k^4 + (a_1 + a_2) c_2 k^2 + c_2^2 - c_3^2 = 0. \quad (13)$$

В результате определения частот колебаний получим два значения  $\mu$ , соответствующие каждому из колебаний. Для каждого колебания амплитуды будут находиться в своем соотношении —  $\mu$ , которое будет зависеть от параметров рассматриваемой системы и никак не зависеть от начальных условий.

Общее решение системы (8) может быть получено путем суммирования частных решений. Итоговое колебательное движение системы будет являться наложением простых гармонических колебаний с различными частотами:

$$\begin{aligned} \varphi &= I_1^{(1)} \sin(k_1 t + \beta_1) + I_1^{(2)} \sin(k_2 t + \beta_2), \\ w &= \mu_1 I_1^{(1)} \sin(k_1 t + \beta_1) + \mu_2 I_1^{(2)} \sin(k_2 t + \beta_2). \end{aligned} \quad (14)$$

Постоянные  $I_1^{(1)}, I_1^{(2)}, \beta_1, \beta_2$  определяются из начальных условий.

Частное решение системы уравнений (6), определяющее вынужденные колебания системы, имеет вид:

$$\begin{aligned} \varphi &= 0, \\ w &= J_2 \sin(k_p t + \delta). \end{aligned} \quad (15)$$

Подставляя (15) в (6) и разделив оба уравнения на  $\sin(k_p t + \delta)$ , получим:

$$\begin{cases} c_3 J_2 = 0, \\ (a_2 k_p^2 + c_2) J_2 = d_1. \end{cases} \quad (16)$$

Подставляя найденное в результате решения системы (16) значение  $J_2$  в уравнение (15), получим общее решение системы уравнений (6):

$$\begin{aligned} \varphi &= I_1^{(1)} \sin(k_1 t + \beta_1) + I_1^{(2)} \sin(k_2 t + \beta_2), \\ w &= \mu_1 I_1^{(1)} \sin(k_1 t + \beta_1) + \mu_2 I_1^{(2)} \sin(k_2 t + \beta_2) + J_2 \sin(k_p t + \delta). \end{aligned} \quad (17)$$

Однако при резонансе (в случае, когда  $k_p = k_1$  или  $k_p = k_2$ ) выражение (15) не будет являться частным решением системы (6). Частное решение при резонансе можно получить, перейдя к главным координатам системы (8), общее решение при  $k_p = k_1$  будет иметь вид:

$$w = \frac{\mu_1(H_1 + \mu_1 H_2)}{2k_p a_1^*} t \sin\left(k_p t + \delta - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\mu_2(H_1 + \mu_2 H_2)}{a_2^*(k_2^2 - k_p^2)} \sin(k_p t + \delta). \quad (18)$$

В первой составляющей выражения (18) содержится переменная  $t$  в явном виде; с течением времени эта составляющая будет неограниченно возрастать, что подтверждает явление резонанса.

Разработанная математическая модель реализована в виде программы с графическим интерфейсом, представленным на рис. 2.

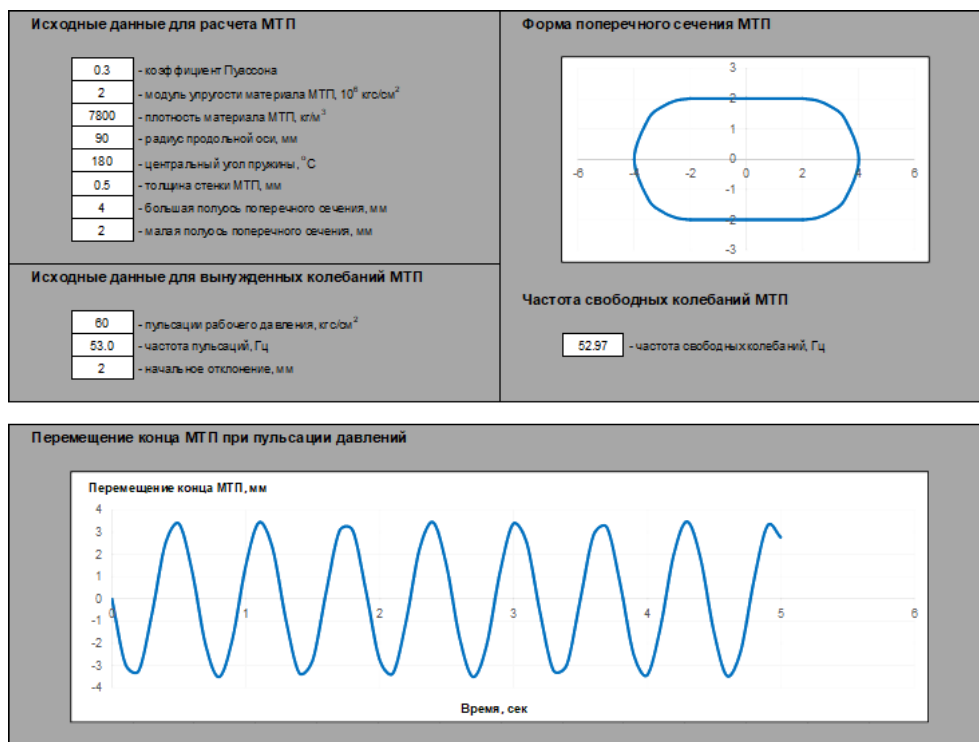


Рис. 2. Графический интерфейс программы для расчета вынужденных колебаний МТП

Fig. 2. Graphical interface of the program for calculating forced oscillations of the MTS

## Результаты

С помощью разработанной программы оценено влияние геометрических характеристик и пульсаций внутреннего давления на перемещения свободного конца МТП. На рис. 3 представлена амплитудно-частотная характеристика МТП — зависимость перемещения конца трубки от частот пульсаций внутреннего давления. Геометрические характеристики рассматриваемой МТП: радиус продольной оси — 90 мм, центральный угол пружины — 180 °С, толщина стенки — 0,5 мм, большая полуось поперечного сечения — 4 мм, малая полуось поперечного сечения — 2 мм, соответствующая частота свободных колебаний — 52,97 Гц.

Из графика видно, что значительное увеличение перемещений конца МТП наблюдается в диапазоне частот  $\pm 2\%$  от резонанса. Оценка влияния геометрических характеристик в дальнейшем будет проводиться для этого диапазона.

На рис. 4 и 5 представлены результаты влияния геометрических характеристик МТП на изменение роста перемещений в резонансной зоне.

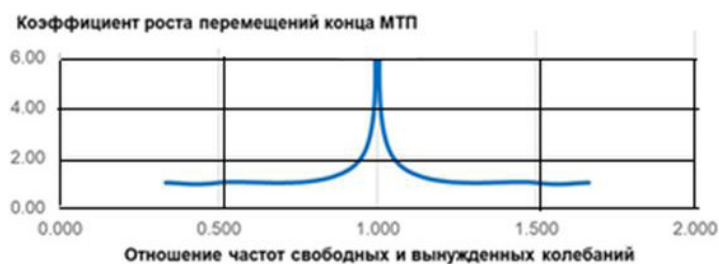


Рис. 3. Амплитудно-частотная характеристика МТП

Fig. 3. Increase in the growth of movements of the end of the MTS

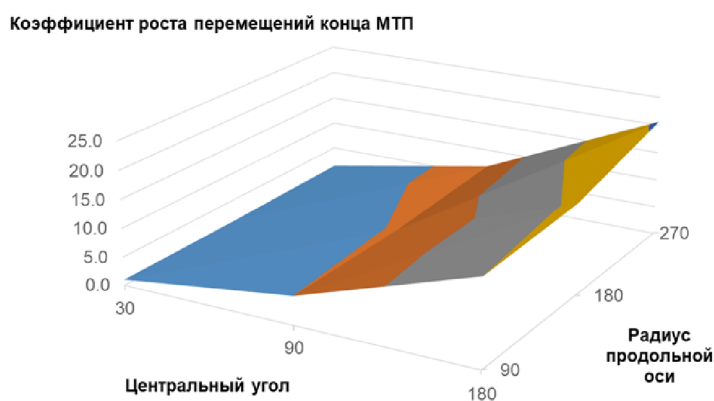


Рис. 4. Оценка влияния центрального угла и радиуса продольной оси на увеличение роста перемещений конца МТП

Fig. 4. Evaluation of the influence of the central angle and the radius of the longitudinal axis on the increase in the growth of displacements of the end of the MTS

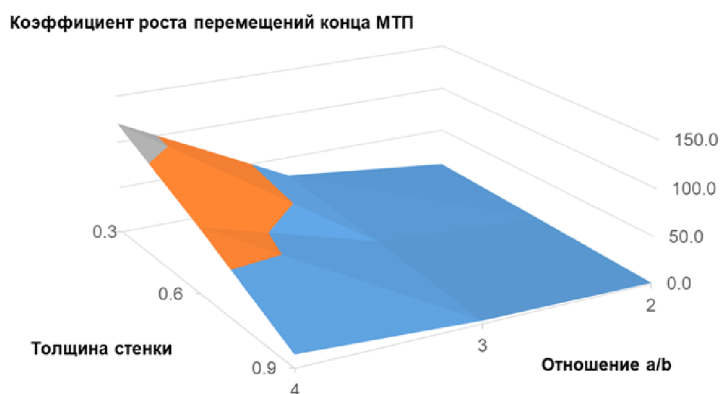


Рис. 5. Оценка влияния толщины стенки и отношения  $a/b$  на увеличение роста перемещений конца МТП

Fig. 5. Evaluation of the influence of the wall thickness and the ratio  $a/b$  on the increase in the growth of displacements of the end of the MTS



Работа манометров при резонансе не позволит корректно отслеживать состояние технологического процесса и, как следствие, не сможет обеспечить надежность и безопасность работы установок. Однако исследования геометрических характеристик МТП показало, что изменение некоторых характеристик позволит снизить рост перемещений. Кроме того, изменение геометрических характеристик приведет к изменению собственной частоты колебаний, произойдет отстройка от резонансных частот, и манометры окажутся не в резонансной зоне работы.

### Обсуждение

Представлена математическая модель вынужденных колебаний манометрических трубчатых пружин, основанная на уравнениях Лагранжа второго рода. С помощью разработанной программы для ЭВМ, реализующей данную модель, возможно определять требуемые характеристики приборов контроля давления, исключая возможность возникновения резонанса.

Для расчетов конструкций МТП, используемых в манометрах, представленная модель может быть успешно применена, т. к. является классическим подходом к решению задач колебаний механических систем. Для других видов конструкций, таких как МТП с изменяющейся формой поперечного сечения по длине трубки, изменяющейся толщиной стенки МТП и т. д., применение данной модели будет затруднено из-за сложности определения кинетической и потенциальной энергии. Для более адекватного отображения реальных колебательных процессов необходим также учет сил сопротивления.

Манометрические трубчатые пружины используются и в других целях, например в качестве силовых элементов тормозов, манипуляторов, реле-переключателей и т. д. Преимущество таких конструкций в том, что они не содержат трущихся частей и являются герметичными, что позволяет использовать их в вакууме. Также одним из направлений применения манометрических пружин является использование их в сельскохозяйственной технике — в подвесках дискового сошника, рабочих органах культиваторов и т. д. При помощи изменения давления в рабочем органе и придания вибраций можно добиться более равномерной глубины рыхления и качественной обработки почвы.

Разработанная методика расчета динамических характеристик движения трубок под действием пульсирующего давления и программа для ЭВМ позволяют спроектировать для таких конструкций упругие элементы с заданными свойствами, увеличивающие интенсивность вибраций, требуемую для обеспечения технологических процессов.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреева Л. Е. Упругие элементы приборов / Л. Е. Андреева. М.: Машиностроение, 1981. 392 с.
2. Рабочий орган культиватора: пат. 2428825 РФ, МПК А 01 В 35/20, А 01 В 35/32, А 01 В 39/20 / Н. Н. Устинов, С. Н. Кокошин, Н. И. Смолин; патентообладатель

- Тюменская государственная сельскохозяйственная академия. № 2009136304/21; заявл. 30.09.2009; опубл. 20.07.2011, Бюл. № 26.
3. Сошник: пат. 94406 РФ: МПК А 01 С 7/20 (2006.01) / Н. Н. Устинов, С. Н. Кокошин, Н. И. Смолин; патентообладатель Тюменская государственная сельскохозяйственная академия. № 2009149569/22; заявл. 30.12.2009; опубл. 27.05.2010, Бюл. № 15.
  4. Черенцов Д. А. Математическое моделирование колебаний манометрических трубчатых пружин в вязкой среде: дис. ... канд. техн. наук / Д. А. Черенцов. Тюмень, 2015. 125 с.
  5. Чуба А. Ю. Определение собственных частот колебаний изогнутых труб некругового поперечного сечения / А. Ю. Чуба, Н. И. Смолин, С. П. Пирогов // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. 2007. № 1. С. 77-82.
  6. Чуба А. Ю. Расчет собственных частот колебаний манометрических трубчатых пружин: дис. ... канд. техн. наук / А. Ю. Чуба. Тюмень, 2007. 137 с.
  7. Яблонский А. А. Курс теории колебаний: учеб. пос. / А. А. Яблонский, С. С. Норейко. 5-е изд., стер. СПб.: БХВ-Петербург, 2007. 336 с.
  8. Ayvaz Y. Application of modified Vlasov model to free vibration analysis of beams resting on elastic foundations / Y. Ayvaz, K. Özgan // Journal of Sound and Vibration. 2002. Vol. 255. No. 1. Pp. 111-127. DOI: 10.1006/jsvi.2001.4143
  9. Bergant A. Waterhammer tests in a long PVC pipeline with short steel end sections / A. Bergant, Q. Hou, A. Keramat, A. S. Tijsseling // Journal of Hydraulic Structures. 2013. Vol. 1. No. 1. Pp. 24-36. DOI: 10.22055/jhs.2013.10069
  10. Carrier III W. D. Pipeline supported on a nonuniform winkler soil model / W. D. Carrier III // Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering. 2005. Vol. 131. No. 10. DOI: 10.1061/(ASCE)1090-0241(2005)131:10(1301)
  11. Dongquan Wu. Theoretical and numerical analysis of the creep crack initiation time considering the constraint effects for pressurized pipelines with axial surface cracks / Dongquan Wu, Hongyang Jing, Lianyong Xu, Lei Zhao, Yongdian Han // International Journal of Mechanical Sciences. 2018. Vol. 141. Pp. 262-275. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2018.04.009
  12. Fyrileiv O. Effect of internal pressure on free spanning pipelines / O. Fyrileiv // Proceedings of the 2010 8<sup>th</sup> International Pipeline Conference (September 27 — October 1, 2010, Calgary, Alberta, Canada). Vol. 3. Pp. 711-718. DOI: 10.1115/IPC2010-31622
  13. Georgiadou S. Dynamic analysis of a free span offshore pipeline / S. Georgiadou, E. Loukogeorgaki, D. C. Angelides // Paper presented at the 24<sup>th</sup> International Ocean and Polar Engineering Conference (June 15-20, 2014, Busan, Korea). 2014. Paper ISOPE-I-14-275.
  14. Guangming Dong. Vibration analysis and crack identification of a rotor with open cracks / Guangming Dong, Jin Chen // Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics. 2011. Vol. 28. №. 1. Pp. 171-182. DOI: 10.1007/s13160-011-0031-3
  15. Haryadi Gunawan Tj. Free vibration characteristics of cylindrical shells partially buried in elastic foundations / Haryadi Gunawan Tj, Takashi Mikami, Shunji Kanie, Motohiro Sato // Journal of Sound and Vibration. 2006. Vol. 290. No. 3-5. Pp. 785-793. DOI: 10.1016/j.jsv.2005.04.014
  16. Kameswara Rao Chellapilla. Critical velocity of fluid-conveying pipes resting on two-parameter foundation / Kameswara Rao Chellapilla, H. S. Simha // Journal of Sound and Vibration. 2007. Vol. 302. No. 1-2. Pp. 387-397. DOI: 10.1016/j.jsv.2006.11.007

17. Kokoshin S. Automatic rigidity adjuster sustaining tillage depth during the work of cultivators with elastic rods / S. Kokoshin, V. Tashlanov // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. 2019. Vol. 403. No. 1. Paper 012002. DOI: 10.1088/1755-1315/403/1/012002
18. Lottati I. The effect of an elastic foundation and of dissipative forces on the stability of fluid-conveying pipes / I. Lottati, A. Kornecki // Journal of Sound and Vibration. 1986. Vol. 109. No. 2. Pp. 327-338. DOI: 10.1016/S0022-460X(86)80012-8
19. Lü Lei. Dynamical bifurcation and synchronization of two nonlinearly coupled fluid-conveying pipes / Lü Lei, Hu Yujin, Wang Xuelin, Ling Lin, Li Chenggang // Nonlinear Dynamics. 2015. Vol. 79. No. 4. Pp. 2715-2734. DOI: 10.1007/s11071-014-1842-y
20. Massa A. L. L. The influence of internal pressure on pipeline natural frequency / A. L. L. Massa, N. S. Galgoul, N. O. Guevara Junior, A. C. Fernandes, F. M. Coelho, S. F. da Silva Neto // Proceedings of the ASME 2009 28<sup>th</sup> International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering (May 31 — June 5, 2009, Honolulu, Hawaii, USA). Vol. 3: Pipeline and Riser Technology. Pp. 559-566. DOI: 10.1115/OMAE2009-79666
21. Naidu N. R. Vibrations of initially stressed uniform beams on a two-parameter elastic foundation / N. R. Naidu, G. V. Rao // Computers & Structures. 1995. Vol. 57. No. 5. Pp. 941-943. DOI: 10.1016/0045-7949(95)00090-4
22. Qin Qian. Nonlinear responses of a fluid-conveying pipe embedded in nonlinear elastic foundations / Qin Qian, Lin Wang, Qiao Ni // Acta Mechanica Solida Sinica. 2008. Vol. 21. No. 2. Pp. 170-176. DOI: 10.1007/s10338-008-0820-7
23. Ruocco Eu. An exponential matrix method for the buckling analysis of underground pipelines subjected to landslide loads // Eu. Ruocco, R. Di Laora, V. Minutolo // Procedia Earth and Planetary Science. 2016. Vol. 16. Pp. 25-34.
24. Stojanović V. Nonlinear dynamic analysis of damaged Reddy-Bickford beams supported on an elastic Pasternak foundation / V. Stojanović, M. D. Petković // Journal of Sound and Vibration. 2016. Vol. 385. Pp. 239-266. DOI: 10.1016/j.jsv.2016.08.030
25. Taolong Xu. Dynamic response of buried gas pipeline under excavator loading: Experimental/numerical study / Taolong Xu, Anlin Yao, Hongye Jiang, Youlv Li, Xiangguo Zeng // Engineering Failure Analysis. 2018. Vol. 89. Pp. 57-73. DOI: 10.1016/j.engfailanal.2018.02.026
26. Xü Wan-Hai. Study on vortex-induced vibrations (VIV) of free spanning pipeline considering pipe-soil interaction boundary conditions / Xü Wan-Hai, Xie Wu-De, Gao Xi-Feng, Ma Ye-Xuan // Journal of Ship Mechanics. 2018. Vol. 22. No. 4. Pp. 446-453. DOI: 10.3969/j.issn.1007-7294.2018.04.007

**Sergey P. PIROGOV<sup>1</sup>**  
**Dmitry A. CHERENTSOV<sup>2</sup>**

UDC 662.691.4

## **MATHEMATICAL MODELING OF FORCED OSCILLATIONS OF MANOMETRIC TUBULAR SPRINGS\***

<sup>1</sup> Dr. Sci. (Tech.), Professor, Department of Applied Mechanics,  
Tyumen Industrial University;  
Professor, Department of Forestry, Woodworking and Applied Mechanics,  
State Agrarian University of the Northern Trans-Urals (Tyumen)  
piro-gow@yandex.ru; ORCID: 0000-0001-5171-8942

<sup>2</sup> Cand. Sci. (Tech.), Associate Professor,  
Department of Transport of Hydrocarbon Resources,  
Tyumen Industrial University  
cherencov\_dmitry@mail.ru; ORCID: 0000-0001-8072-6183

### **Abstract**

Difficult working conditions, as well as vibrations of technological process units and unstable load intensity impose high demands on overpressure monitoring devices that ensure the required measurement accuracy and trouble-free operation of equipment.

The use of pressure gauges today is a mandatory requirement for monitoring overpressure. The main type of pressure gauges uses manometric tubular springs (MTP) as elastic sensing elements. Therefore, the issue of calculating the motion of the MTP under the influence of external variable loads, in particular variable internal pressure, is relevant. Issues related to the influence of internal pressure pulsations and external periodically changing external forces remain unexplored.

---

\* The authors express their gratitude for the support of the National Project “Science and Universities” of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, grant No. FEWN-2021-0012.

---

**Citation:** Pirogov S. P., Cherentsov D. A. 2022. “Mathematical modeling of forced oscillations of manometric tubular springs”. Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 8, no. 2 (30), pp. 183-197.  
DOI: 10.21684/2411-7978-2022-8-2-183-197

---

For successful operation, the strength and frequency characteristics of vibrations of tubular springs were previously investigated, the effects of cross-sectional shapes and basic geometric dimensions on their vibration characteristics were considered, and the process of vibration damping by liquid was analyzed.

The paper presents a mathematical model of forced oscillations of the MTP based on Lagrange equations of the second kind. The MTP is considered as a mechanical system with two degrees of freedom, that is, defined by two generalized coordinates. They are a relative change in the main angle of the tube and an increase in the small semi-axis of the cross section.

The model allows us to determine the nature of the movement of the MTP under the influence of periodically changing internal pressure. To implement it, a program has been developed in MATLAB, which makes it possible to determine the required characteristics of pressure monitoring devices that exclude the possibility of resonance. With the help of the developed program, the influence of geometric characteristics and internal pressure pulsations on the movements of the free end of the MTP is estimated.

The presented model can be successfully used for dynamic calculations of manometric tubes, since it is a classical approach to solving problems of vibrations of mechanical systems. In addition, it will allow you to calculate the parameters of tubular elastic elements used in various mechanisms as power elements.

#### **Keywords**

Manometric tubular spring, dynamic characteristics, forced oscillations, frequency, resonance, pressure pulsations, Lagrange equations of the second kind, MATLAB.

**DOI: 10.21684/2411-7978-2022-8-2-183-197**

#### **REFERENCES**

1. Andreeva L. E. 1981. Elastic elements of devices. Moscow: Mashinostroenie. 392 p. [In Russian]
2. Ustinov N. N., Kokoshin S. N., Smolin N. I. 2011. Russian Federation Patent 2428825 IPC A 01 B 35/20, A 01 B 35/32, A 01 B 39/20 “Working body of the cultivator”. No. 2009136304/21; declared 30 September 2009; published 20 July 2011. Bulletin No. 26. [In Russian]
3. Ustinov N. N., Kokoshin S. N., Smolin N. I. 2010. Russian Federation Patent 94406 IPC A 01 C 7/20 (2006.01) “Coulter”. No. 2009149569/22; declared 30 December 2009; published 27 May 2010. Bulletin No. 15. [In Russian]
4. Cherentsov D. A. 2015. “Mathematical modeling of oscillations of manometric tubular springs in a viscous medium”. Cand. Sci. (Tech.) diss. Tyumen. 125 p. [In Russian]
5. Chuba A. Yu., Smolin N. I., Pirogov S. P. 2007. “Determination of natural vibration frequencies of bent pipes of non-circular cross section”. News of higher educational institutions. Oil and gas, no. 1, pp. 77-82. [In Russian]
6. Chuba A. Yu. 2007. “Calculation of natural frequencies of oscillations of manometric tubular springs”. Cand. Sci. (Tech.) diss. Tyumen. 37 p. [In Russian]

7. Yablonsky A. A., Noreiko S. S. 2007. The course of the theory of oscillations: textbook. Allowance. 5<sup>th</sup> edition, erased. Saint-Petersburg: BHV-Petersburg. 36 p. [In Russian]
8. Ayvaz Y., Özgün K. 2002. "Application of modified Vlasov model to free vibration analysis of beams resting on elastic foundations". *Journal of Sound and Vibration*, vol. 255, no. 1, pp. 111-127. DOI: 10.1006/jsvi.2001.4143
9. Bergant A., Hou Q., Keramat A., Tijsseling A. S. 2013. "Waterhammer tests in a long PVC pipeline with short steel end sections". *Journal of Hydraulic Structures*, vol. 1, no. 1, pp. 24-36. DOI: 10.22055/jhs.2013.10069
10. Carrier III W. D. 2005. "Pipeline supported on a nonuniform winkler soil model". *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, vol. 131, no. 10. DOI: 10.1061/(ASCE)1090-0241(2005)131:10(1301)
11. Dongquan Wu, Hongyang Jing, Liyong Xu, Lei Zhao, Yongdian Han. 2018. "Theoretical and numerical analysis of the creep crack initiation time considering the constraint effects for pressurized pipelines with axial surface cracks". *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 141, pp. 262-275. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2018.04.009
12. Fyrileiv O. 2010. "Effect of internal pressure on free spanning pipelines". *Proceedings of the 2010 8<sup>th</sup> International Pipeline Conference*, vol. 3, pp. 711-718. DOI: 10.1115/IPC2010-31622
13. Georgiadou S., Loukogeorgaki E., Angelides D. C. 2014. "Dynamic analysis of a free span offshore pipeline". Paper presented at the 24<sup>th</sup> International Ocean and Polar Engineering Conference. Paper ISOPE-I-14-275.
14. Guangming Dong and Jin Chen. 2011. "Vibration analysis and crack identification of a rotor with open cracks". *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, vol. 28, no. 1, pp. 171-182. DOI: 10.1007/s13160-011-0031-3
15. Haryadi Gunawan Tj, Takashi Mikami, Shunji Kanie, Motohiro Sato. 2006. "Free vibration characteristics of cylindrical shells partially buried in elastic foundations". *Journal of Sound and Vibration*, vol. 290, no. 3-5, pp. 785-793. DOI: 10.1016/j.jsv.2005.04.014
16. Kameswara Rao Chellapilla, Simha H. S. 2007. "Critical velocity of fluid-conveying pipes resting on two-parameter foundation". *Journal of Sound and Vibration*, vol. 302, no. 1-2, pp. 387-397. DOI: 10.1016/j.jsv.2006.11.007
17. Kokoshin S., Tashlanov V. 2019. "Automatic rigidity adjuster sustaining tillage depth during the work of cultivators with elastic rods". *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, vol. 403, no. 1. Paper 012002. DOI: 10.1088/1755-1315/403/1/012002
18. Lottati I., Kornecki A. 1986. "The effect of an elastic foundation and of dissipative forces on the stability of fluid-conveying pipes". *Journal of Sound and Vibration*, vol. 109, no. 2, pp. 327-338. DOI: 10.1016/S0022-460X(86)80012-8
19. Lü Lei, Hu Yujin, Wang Xuelin, Ling Lin, Li Chenggang. 2015. "Dynamical bifurcation and synchronization of two nonlinearly coupled fluid-conveying pipes". *Nonlinear Dynamics*, vol. 79, pp. 2715-2734. DOI: 10.1007/s11071-014-1842-y
20. Massa A. L. L., Galgoul N. S., Guevara Junior N. O., Fernandes A. C., Coelho F. M., da Silva Neto S. F. 2009. "The influence of internal pressure on pipeline natural frequency". *Proceedings of the ASME 2009 28<sup>th</sup> International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering*. Vol. 3: Pipeline and Riser Technology. Pp. 559-566. DOI: 10.1115/OMAE2009-79666

21. Naidu N. R., Rao G. V. 1995. "Vibrations of initially stressed uniform beams on a two-parameter elastic foundation". *Computers and Structures*, vol. 57, no. 5, pp. 941-943. DOI: 10.1016/0045-7949(95)00090-4
22. Qin Qian, Lin Wang, Qiao Ni. 2008. "Nonlinear responses of a fluid-conveying pipe embedded in nonlinear elastic foundations". *Acta Mechanica Solida Sinica*, vol. 21, no. 2, pp. 170-176. DOI: 10.1007/s10338-008-0820-7
23. Ruocco Eu., di Laora R., Minutolo V. 2016. "An exponential matrix method for the buckling analysis of underground pipelines subjected to landslide loads". *Procedia Earth and Planetary Science*, vol. 16, pp. 25-34.
24. Stojanović V., Petković M. D. 2016. "Nonlinear dynamic analysis of damaged Reddy-Bickford beams supported on an elastic Pasternak foundation". *Journal of Sound and Vibration*, vol. 385, pp. 239-266. DOI: 10.1016/j.jsv.2016.08.030
25. Taolong Xu, Anlin Yao, Hongye Jiang, Youlv Li, Xiangguo Zeng. 2018. "Dynamic response of buried gas pipeline under excavator loading: Experimental/numerical study". *Engineering Failure Analysis*, vol. 89, pp. 57-73. DOI: 10.1016/j.engfailanal.2018.02.026
26. Xü Wan-Hai, Xie Wu-De, Gao Xi-Feng, Ma Ye-Xuan. 2018. "Study on vortex-induced vibrations (VIV) of free spanning pipeline considering pipe-soil interaction boundary conditions". *Journal of Ship Mechanics*, vol. 22, no. 4, pp. 446-453. DOI: 10.3969/j.issn.1007-7294.2018.04.007 [In Chinese]