

Ирина Адольфовна ДОНКОВА<sup>1</sup>  
Юрий Евгеньевич ЯКУБОВСКИЙ<sup>2</sup>  
Василий Иосифович КОЛОСОВ<sup>3</sup>

УДК 624.074.4:539.3

## МОДЕЛИРОВАНИЕ И РАСЧЕТ РЕМОНТИРУЕМОГО УЧАСТКА ТРУБОПРОВОДА НА ОСНОВЕ КОМПОЗИТНО-МУФТОВОЙ ТЕХНОЛОГИИ

<sup>1</sup> кандидат технических наук,  
доцент кафедры программного обеспечения,  
Тюменский государственный университет  
i.a.donkova@utmn.ru; ORCID 0000-0003-1151-4931

<sup>2</sup> доктор технических наук,  
профессор кафедры прикладной механики,  
Тюменский индустриальный университет  
jakubovskijje@tyuiu.ru; ORCID 0000-0002-6838-0631

<sup>3</sup> кандидат технических наук,  
доцент кафедры прикладной механики,  
Тюменский индустриальный университет  
kolosovvi@tyuiu.ru; ORCID 000000034697492X

### Аннотация

Рассматриваются вопросы моделирования и расчета участка магистрального трубопровода, реконструированного композитной муфтой. Такой участок является двухслойной составной цилиндрической конструкцией. В основе построения модели положения и гипотезы классической теории оболочек (вариант Л. И. Балабуха — В. И. Новожилова) и теории деформации составных конструкций (А. Р. Ржаницын). Целью работы является математическое моделирование и исследование напряженно-деформированного состояния (НДС)

---

**Цитирование:** Донкова Ю. Е. Моделирование и расчет ремонтируемого участка трубопровода на основе композитно-муфтовой технологии / Ю. Е. Донкова, Ю. Е. Якубовский, В. И. Колосов // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2022. Том 8. № 3 (31). С. 140-154.

DOI: 10.21684/2411-7978-2022-8-3-140-154

в области установки муфты. Рассмотрена задача расчета участка трубопровода, отремонтированного в соответствии с композитно-муфтовой технологией (КМТ), который находится под действием внутреннего гидростатического давления. Приведена математическая модель деформирования двухслойной круговой цилиндрической оболочки в виде системы дифференциальных уравнений равновесия и краевых условий. Учтены сдвигающие напряжения в межслойном шве.

### **Ключевые слова**

Теория составных конструкций, цилиндрические оболочки, осесимметричная нагрузка, композитно-муфтовая технология, напряженно-деформированное состояние.

**DOI: 10.21684/2411-7978-2022-8-3-140-154**

### **Введение**

Рост дефицита топливно-энергетических ресурсов и забота об экологии ставят энергосберегающие технологии одной из приоритетных задач нефтедобывающей отрасли. Трубопроводный магистральный транспорт — наиболее распространенный и экономичный вид транспортировки нефтепродуктов. Длительная эксплуатация трубопроводов приводит к снижению герметичности и увеличению риска аварий и отказов. Для повышения надежности трубопроводов проводится выборочный ремонт участков с коррозионными и механическими дефектами. Существующие на сегодняшний день технологии ремонта методом вырезки и замены поврежденной части трубопровода связаны с остановкой транспортировки перекачиваемого сырья, что приводит к значительным временным и ресурсным потерям. Среди современных технологий ремонта магистральных и технологических нефтегазопроводов перспективным способом является метод наложения укрепляющих муфт (хомутов), внутренняя полость которых заполнена композитными материалами (композитно-муфтовая технология) [3, 5, 7]. При таком способе реконструкции не используются сварочные работы. В отличие от методов капитального ремонта ремонтные конструкции в виде ряда муфт является ресурсосберегающим и экологически безопасными, т. к. выполняются без остановки перекачки нефти и замены трубы действующего трубопровода. Использование таких муфт позволяет восстановить несущую способность дефектного участка нефтегазопровода до безотказного уровня на период дальнейшей эксплуатации.

В процессе восстановления целостности конструкции трубопровода применяются муфты [3, 5, 7]: сварные укрепляющие и герметичные. Укрепляющие муфты охватывают место дефекта без герметизации, снижая влияние дефектов на прочность ремонтируемого участка трубы. Для герметичных муфт предусмотрена герметизация торцов места соприкосновения муфты с поверхностью трубы с помощью сварки кольцевыми фланговыми угловыми швами. Объем между трубой и муфтой, как правило, заполняется композитным составом. Для

изготовления муфты можно использовать полимерные композитные материалы (ПКМ), которые обладают необходимой герметичностью и не снижают прочность ремонтируемого участка трубопровода. В области установки ремонтных муфт существенно изменяется НДС восстановленного участка трубопровода, что обуславливает необходимость проведения расчетов на прочность.

## Методы

### Исходные допущения и гипотезы

В основе построения математической модели и исследования НДС ремонтируемого участка трубопровода с установкой композитной муфты, используются положения теории составных конструкций [1, 2, 6, 8-10]. Участок трубопровода, который отремонтирован с применением КМТ, может быть представлен составной конструкцией, состоящей из двух слоев в виде цилиндрических оболочек и соединяющего их шва. Совместность работы слоев обеспечивают связи между слоями. Толщины слоев (стенок трубы и муфты) обозначаются  $h^{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ). Речь идет о двуслойных оболочках цилиндрических поверхностей с кольцевым поперечным сечением. Описание распределения НДС основано на классической теории с использованием гипотез Кирхгофа–Лява (вариант Л. И. Балабуха — В. И. Новожилова) [1, 2, 4].

Для моделирования использована криволинейная ортогональная правая система координат. Координатные оси:  $x(0 \leq x \leq L)$ ,  $\varphi(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ ,  $z^{(i)}\left(-\frac{h^{(i)}}{2} \leq z^{(i)} \leq \frac{h^{(i)}}{2}\right)$ . Здесь параметры Ляме равны соответственно  $A_1^{(i)} = 1$ ,  $A_2^{(i)} = r$ . В качестве нейтральной поверхности ( $z^{(i)} = 0$ ) принимается срединная поверхность  $i$ -го слоя. Расстояние от срединной поверхности внешнего слоя (муфты) до шва обозначается,  $a$ , а расстояние от внутреннего слоя (трубопровода) до шва —  $b$ . Тогда расстояние между срединными поверхностями слоев определяется суммой:  $c = a + b$ .

Перемещения точек в срединных поверхностях каждого слоя может быть представлено проекциями этого перемещения на оси  $x$ ,  $\varphi$ ,  $z^{(i)}$ , а именно  $u^{(i)}$ ,  $v^{(i)}$ ,  $w$ . Перемещение вдоль оси  $z$ , т. е. прогиб, принимается одинаковым для каждого слоя и, следовательно, для всего пакета [1, 2, 10].

Согласно [1, 2, 4, 10] деформации срединной поверхности  $i$ -го слоя составной цилиндрической оболочки определяются выражениями:

$$\varepsilon_1^{(i)} = \frac{\partial u^{(i)}}{\partial x}, \varepsilon_2^{(i)} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v^{(i)}}{\partial \varphi} + w \right), \kappa_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \kappa_2^{(i)} = \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial v^{(i)}}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right);$$

$$\gamma_{12}^{(i)} = \frac{\partial v^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial u^{(i)}}{\partial \varphi}, \chi_{12}^{(i)} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v^{(i)}}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} \right) \quad (1)$$

где  $\varepsilon_1^{(i)}$ ,  $\varepsilon_2^{(i)}$ ,  $\gamma_{12}^{(i)}$  — деформации материала в окрестности точки вдоль соответствующих направлений перемещений;  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2^{(i)}$ ,  $\chi_{12}^{(i)}$  — параметры изменения кривизны и кручения.

Деформации в поверхностях, расположенных на расстоянии  $z^{(i)}$  от срединной поверхности  $i$ -го слоя [1, 2, 4, 10]:

$$\varepsilon_{1(z)}^{(i)} = \varepsilon_1^{(i)} + z^{(i)} k_1; \varepsilon_{2(z)}^{(i)} \approx \varepsilon_2^{(i)} + z^{(i)} k_2^{(i)}; \gamma_{12(z)}^{(i)} = \gamma_{12}^{(i)} + z^{(i)} \chi_{12}^{(i)}. \quad (2)$$

Напряжения и деформации, действующие в конструкции, связаны обобщенным законом Гука. Напряжения, определяемые в произвольной точке внутреннего сечения трубы, возможно просуммировать и привести к погонному усилию, действующему в срединной поверхности  $i$ -го слоя, интегрированием по высоте сечения.

В результате интегрирования выведены закономерности, выражающие характеристики упругости с помощью деформаций точек слоев [1, 2, 4, 10]:

$$\begin{aligned} N_1^{(i)} &= B_{11}^{(i)} \varepsilon_1^{(i)} + B_{12}^{(i)} \varepsilon_2^{(i)} + C_{11}^{(i)} k_1 + C_{21}^{(i)} k_2^{(i)}; \\ N_2^{(i)} &= B_{21}^{(i)} \varepsilon_1^{(i)} + B_{22}^{(i)} \varepsilon_2^{(i)} + C_{21}^{(i)} k_1 + C_{22}^{(i)} k_2^{(i)}; \\ M_1^{(i)} &= C_{11}^{(i)} \varepsilon_1^{(i)} + C_{12}^{(i)} \varepsilon_2^{(i)} + D_{11}^{(i)} k_1 + D_{21}^{(i)} k_2^{(i)}; \\ M_2^{(i)} &= C_{21}^{(i)} \varepsilon_1^{(i)} + C_{22}^{(i)} \varepsilon_2^{(i)} + D_{21}^{(i)} k_1 + D_{22}^{(i)} k_2^{(i)}; \\ H_1^{(i)} &= 2D_{66}^{(i)} \chi_{12}^{(i)} + C_{66}^{(i)} \gamma_{12}^{(i)}; S^{(i)} = B_{66}^{(i)} \gamma_{12}^{(i)} + 2D_{66}^{(i)} \chi_{12}^{(i)}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $N_1^{(i)}, N_2^{(i)}$  — нормальные усилия;  $M_1^{(i)}, M_2^{(i)}$  — изгибающие моменты;  $H^{(i)}$  — крутящие моменты;  $S^{(i)}$  — сдвигающие усилия;  $B_{11}^{(i)}, B_{12}^{(i)}, B_{22}^{(i)}, \dots, D_{66}^{(i)}$  — характеристики жесткости.

Допустим, вектор интенсивности нагрузки имеет вид  $q = (q_1, 0, q_3)$ . Это приводит к возможности пренебречь величинами сдвигающих усилий и крутящих моментов.

При осесимметричном нагружении деформации (2) в точках поверхностей на расстоянии  $z^{(i)}$  от срединной поверхности каждого слоя определяются выражениями [1, 2, 4, 10]:

$$\varepsilon_{1(z)}^{(i)} = \varepsilon_1^{(i)} + z^{(i)} k_1; \varepsilon_{2(z)}^{(i)} \approx \varepsilon_2^{(i)}; \gamma_{12(z)}^{(i)} = 0; \chi_{12(z)}^{(i)} = 0. \quad (4)$$

При этом параметры продольной, поперечной деформаций и характеристики, определяющие изменение кривизны и кручения, принимают вид [1, 2, 4, 10]:

$$\varepsilon_1^{(i)} = \frac{du^{(i)}}{dx}, \varepsilon_2^{(i)} = \frac{w}{r}, \kappa_1^{(i)} = -\frac{d^2 w}{dx^2}, \kappa_2^{(i)} = 0; \gamma_{12}^{(i)} = 0, \chi_{12}^{(i)} = 0 \quad (5)$$

Физические соотношения материала конструкции определяются согласно обобщенному закону Гука. Так для компонент напряжений в  $i$ -х слоях ( $i = 1, 2$ ) используются соотношения [1, 2, 4, 10]:

$$\sigma_{1(z)}^{(i)} = b_{11}^{(i)} \varepsilon_1^{(i)} + b_{12}^{(i)} \varepsilon_2^{(i)} + b_{11}^{(i)} z^{(i)} \kappa_1^{(i)}; \sigma_{2(z)}^{(i)} = b_{21}^{(i)} \varepsilon_1^{(i)} + b_{22}^{(i)} \varepsilon_2^{(i)}; \tau_{12(z)}^{(i)} = 0. \quad (6)$$

Если материал слоев ортотропный, тогда коэффициенты в зависимости (6) определяются по формулам [1, 2]:

$$b_{11}^{(i)} = \frac{E_1^{(i)}}{(1 - \nu_1^{(i)} \nu_2^{(i)})}; \quad b_{22}^{(i)} = \frac{E_2^{(i)}}{(1 - \nu_1^{(i)} \nu_2^{(i)})}; \quad b_{12}^{(i)} = b_{21}^{(i)} = \frac{E_1^{(i)} \nu_2^{(i)}}{(1 - \nu_1^{(i)} \nu_2^{(i)})};$$

$$b_{66}^{(i)} = \frac{E_1^{(i)} E_2^{(i)}}{(1 + \nu_1^{(i)} E_1^{(i)})(1 + \nu_2^{(i)} E_2^{(i)})}. \quad (7)$$

Здесь  $E_1^{(i)}$ ,  $E_2^{(i)}$  — модули продольной упругости материалов слоев;  $\nu_1^{(i)}$ ,  $\nu_2^{(i)}$  — коэффициент Пуассона материала  $i$ -го слоя конструкции.

Для изотропного материала слоев коэффициенты  $b_{11}^{(i)}$ ,  $b_{22}^{(i)}$ ,  $b_{12}^{(i)}$ ,  $b_{21}^{(i)}$ ,  $b_{66}^{(i)}$  вычисляются согласно [1, 2, 4, 10]:

$$b_{11}^{(i)} = b_{22}^{(i)} = \frac{E^{(i)}}{(1 - \nu^{(i)2})}; \quad b_{12}^{(i)} = b_{21}^{(i)} = \frac{E^{(i)} \nu^{(i)}}{(1 - \nu^{(i)2})}; \quad b_{66}^{(i)} = \frac{E^{(i)}}{2(1 + \nu^{(i)})}. \quad (8)$$

В срединной поверхности каждого слоя погонные усилия и изгибающие моменты определяются интегралами [1, 2, 4, 10]:

$$N_1^{(i)} = \int_{-h^{(i)}/2}^{h^{(i)}/2} \sigma_{1(z)}^{(i)} dz^{(i)}; \quad N_2^{(i)} = \int_{-h^{(i)}/2}^{h^{(i)}/2} \sigma_{2(z)}^{(i)} dz^{(i)};$$

$$M_1^{(i)} = \int_{-h^{(i)}/2}^{h^{(i)}/2} z^{(i)} \sigma_{1(z)}^{(i)} dz^{(i)}. \quad (9)$$

Соотношения упругости (3) в случае осесимметричной деформации запишутся в виде [1, 2, 4, 10]:

$$N_1^{(i)} = B_{11}^{(i)} \varepsilon_1^{(i)} + B_{12}^{(i)} \varepsilon_2^{(i)}; \quad N_2^{(i)} = B_{21}^{(i)} \varepsilon_1^{(i)} + B_{22}^{(i)} \varepsilon_2^{(i)}; \quad M_1^{(i)} = D_{11}^{(i)} k_1 \quad (10)$$

Характеристики жесткости  $B_{11}^{(i)}$ ,  $B_{12}^{(i)}$ ,  $B_{21}^{(i)}$ ,  $B_{22}^{(i)}$ ,  $D_{11}^{(i)}$  вычисляются с помощью указанных интегральных выражений [1, 2, 4, 10]:

$$B_{11}^{(i)} = \int_{-h^{(i)}/2}^{h^{(i)}/2} b_{11}^{(i)} dz^{(i)}; \quad B_{12}^{(i)} = B_{21}^{(i)} = \int_{-h^{(i)}/2}^{h^{(i)}/2} b_{12}^{(i)} dz^{(i)};$$

$$B_{22}^{(i)} = \int_{-h^{(i)}/2}^{h^{(i)}/2} b_{22}^{(i)} dz^{(i)}; \quad D_{11}^{(i)} = \int_{-h^{(i)}/2}^{h^{(i)}/2} b_{11}^{(i)} z^{(i)2} dz^{(i)} \quad (11)$$

Дифференциальные уравнения равновесия для  $i$ -го слоя при осесимметричном нагружении запишутся в виде [1, 2, 4, 10]:

$$\frac{dN_1^{(i)}}{dx} + \tau + q_1^{(i)} = 0; \quad \frac{dQ_1^{(i)}}{dx} + \frac{N_2^{(i)}}{r} + q_3^{(i)} = 0; \quad \frac{dM_1^{(i)}}{dx} + \tau a - Q_1^{(i)} = 0, \quad (12)$$

где  $q_1^{(i)}, q_3^{(i)}$  — составляющие внешней нагрузки, которые распределены по срединной поверхности  $i$ -го слоя ( $i = 1, 2$ );  $\tau$  — сдвигающее напряжение в шве между поверхностями трубы и муфты;  $N_1^{(i)}, N_2^{(i)}, M_1^{(i)}, Q_1^{(i)}$  — усилия и моменты, действующее на уровне срединной поверхности  $i$ -го слоя ( $i = 1, 2$ ).

Особенностью системы дифференциальных уравнений равновесия (12) является наличие сдвигающего напряжения  $\tau$ , которое согласно [1, 2, 4, 6, 10] определяются по формуле:

$$\tau = \eta \Delta u. \quad (13)$$

Здесь  $\eta$  — коэффициент жесткости шва. Изменение продольных смещений  $\Delta u$  можно вычислить, как алгебраическую разность перемещения поверхности муфты по отношению к перемещению прилегающей поверхности трубы [1, 2, 4, 6, 10]:

$$\Delta u = u^{(2)} - u^{(1)} + C \frac{dw}{dx}, \quad (14)$$

где  $u^{(1)}, u^{(2)}$  — перемещения точек срединных поверхностей контактирующих поверхностей муфты и трубы;  $w$  — перемещение в ортогональном направлении (прогиб пакета). Математические модели деформации двухслойных цилиндрических конструкций [1, 2, 4, 10] содержат систему дифференциальных уравнений и краевые условия.

*Математическая модель расчетной конструкции*

Математическая модель составной двухслойной цилиндрической оболочки — это система дифференциальных уравнений, дополненная граничными условиями. В случае осесимметричного нагружения система дифференциальных уравнений упрощается [1, 2, 4, 10]. Рассмотрим вариант описания системы в перемещениях  $u^{(2)}, u^{(1)}, w$ :

$$\begin{aligned} -D_{11} \frac{d^4 w}{dx^4} + C^2 \eta \frac{d^2 w}{dx^2} - \left( B_{22}^{(1)} + B_{22}^{(2)} \right) \frac{w}{r^2} + \left( C\eta - \frac{B_{21}^{(2)}}{r} \right) \frac{du^{(2)}}{dx} - \\ - \left( C\eta + \frac{B_{21}^{(1)}}{r} \right) \frac{du^{(1)}}{dx} = -q_3; \\ B_{11}^{(1)} \frac{d^2 u^{(1)}}{dx^2} + \left( \frac{B_{12}^{(1)}}{r} + C\eta \right) \frac{dw}{dx} - \eta u^{(1)} + \eta u^{(2)} = 0; \\ B_{11}^{(2)} \frac{d^2 u^{(2)}}{dx^2} + \left( \frac{B_{12}^{(2)}}{r} - C\eta \right) \frac{dw}{dx} + \eta u^{(1)} - \eta u^{(2)} = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь  $B_{11}^{(i)}, B_{12}^{(i)}, B_{21}^{(i)}, B_{22}^{(i)}, D_{11}^{(i)}$  — интегральные характеристики жесткости слоев;  $D_{11} = \sum_{i=1}^2 D_{11}^{(i)}$  — цилиндрическая жесткость.

Согласно общей технической теории [1, 2, 4, 10]:  $q_3 = q_3^{(1)} + q_3^{(2)}$ .

Основные виды краевых условий при осесимметричном нагружении составной цилиндрической оболочки для каждого  $i$ -го слоя ( $i = 1, 2$ ) приведены при  $x = 0; x = L$ .

1. Контур конструкции свободный (ненагруженный), тогда выполняются статические условия:  $N_1^{(i)} = 0, M_1^{(i)} = 0, Q_1^{(i)} = 0$ .
2. При шарнирно-закрепленный контуре, справедливы смешанные краевые условия:  $w = 0; M_1 = 0, u^{(i)} = 0$ .

Граничные условия в перемещениях:  $w = 0, u^{(i)} = 0, \frac{d^2w}{dx^2} = 0$ .

3. Для шарнирно опертого контура, свободного в нормальном направлении должны выполняться условия:  $u^{(i)} = 0, M_1^{(i)} = 0, Q_1^{(i)} = 0$ .
4. Для шарнирно-опертого контура, свободного в тангенциальном направлении контур, выполняются смешанные краевые условия:

$$N_1^{(i)} = 0, M_1^{(i)} = 0, w = 0.$$

Граничные условия в перемещениях:  $w = 0, \frac{d^2w}{dx^2} = 0, \frac{du^{(i)}}{dx} = 0$ .

5. Краевые условия в перемещениях для контура, не допускающего какие-либо перемещения и повороты:  $u^{(i)} = 0, w^{(i)} = 0, \vartheta_1^{(i)} = 0$ .

Угол поворота плоского сечения, перпендикулярного срединной поверхности  $i$ -го слоя определяется равенством:  $\vartheta_1^{(i)} = -\frac{dw}{dx} + \frac{u^{(i)}}{r}$ .

Краевые условия, которые отвечают условиям закрепления муфт можно рассматривать как шарнирное опирание для укрепляющих муфт и жесткое закрепление для герметичных муфт. Техническое описание и схемы для указанных краевых условий приведены в [5, 7].

#### Метод расчета

Таким образом, математическая модель НДС восстановленного участка магистрального трубопровода при осесимметричной нагрузке — это система дифференциальных уравнений (12) и краевые условия, советуемые способом крепежа муфты.

Если краевые условия отвечают шарнирному опиранию торцов (случай 4), тогда систему дифференциальных уравнений можно решить методом разложения функций перемещений и вектора нагрузки в тригонометрические ряды [1, 2, 4, 10]:

$$\begin{aligned} u^{(1)}(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} U_m^{(1)} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right); u^{(2)}(x) = \sum_{m=1}^{\infty} U_m^{(2)} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right); \\ w(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} W_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right); q_3(x) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right). \end{aligned} \quad (16)$$

При действии равномерно распределенной нагрузки значение коэффициентов в тригонометрическом ряду для вектора нагрузки определяется выражением  $q_m = \frac{4q}{m\pi}$ , где  $m = 1, 3, 5$  и т. д.

От системы дифференциальных уравнений равновесия двухслойной составной цилиндрической оболочки можно перейти к системе [1, 2, 4]:

$$\begin{aligned}
 & D_{11} \sum_{m=1}^{\infty} W_m \left(\frac{m\pi}{L}\right)^4 \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + C^2 \eta \sum_{m=1}^{\infty} W_m \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + \\
 & \quad + \left(\frac{B_{22}^{(1)} + B_{22}^{(2)}}{r^2}\right) \sum_{m=1}^{\infty} W_m \sin\left(\frac{m\pi}{L}\right) - \\
 & \quad - \left(\frac{B_{21}^{(1)}}{r} + C\eta\right) \sum_{m=1}^{\infty} U_m^{(1)} \left(\frac{m\pi}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + \\
 & + \left(C\eta - \frac{B_{21}^{(2)}}{r}\right) \sum_{m=1}^{\infty} U_m^{(2)} \left(\frac{m\pi}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right); \\
 & \quad \left(\frac{B_{12}^{(1)}}{r} + C\eta\right) \sum_{m=1}^{\infty} W_m \left(\frac{m\pi}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) - \\
 & - B_{11}^{(1)} \sum_{m=1}^{\infty} U_m^{(1)} \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) - \eta \sum_{m=1}^{\infty} U_m^{(1)} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + \\
 & \quad + \eta \sum_{m=1}^{\infty} U_m^{(2)} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) = 0; \\
 & \quad \left(\frac{B_{12}^{(2)}}{r} - C\eta\right) \sum_{m=1}^{\infty} W_m \left(\frac{m\pi}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) - \\
 & - B_{11}^{(2)} \sum_{m=1}^{\infty} U_m^{(2)} \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + \\
 & + \eta \sum_{m=1}^{\infty} U_m^{(1)} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) - \eta \sum_{m=1}^{\infty} U_m^{(2)} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) = 0.
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

Числовые значения коэффициентов  $W_m, U_m^{(1)}, U_m^{(2)}$  можно найти из системы линейных алгебраических уравнений:  $AU = Q$ , где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} W_m \\ U_m^{(1)} \\ U_m^{(2)} \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 4q \\ m\pi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
 \tag{18}$$

Здесь  $m = 1, 3, 5$  и т. д.

Значения коэффициентов основной матрицы  $A$ :

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= (B_{22}^{(1)} + B_{22}^{(2)})/r^2 + D_{11} \left(\frac{m\pi}{L}\right)^4 + C^2 \eta \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2, \\
 a_{12} &= - (B_{21}^{(1)}/r + C\eta) \left(\frac{m\pi}{L}\right), \quad a_{13} = (C\eta - B_{21}^{(2)}/r) \left(\frac{m\pi}{L}\right), \\
 a_{21} &= (B_{12}^{(1)}/r + C\eta) \left(\frac{m\pi}{L}\right), \quad a_{22} = -\eta - B_{11}^{(1)} \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2, \quad a_{23} = \eta,
 \end{aligned}$$



$$a_{31} = (B_{12}^{(2)}/r - C \eta) \left( \frac{m\pi}{L} \right), \quad a_{31} = \eta, \quad a_{33} = \eta + B_{11}^{(2)} \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2.$$

Согласно рекомендациям по ремонту магистральных трубопроводов по композитно-муфтовой технологии [3, 5, 7] геометрические параметры композитных муфт для ремонта дефектных участков используют в зависимости от диаметра основной трубы. Для трубопровода с диаметром от 530 до 1420 мм применяют муфты длиной от 1000 мм с увеличением шага длины на 250 или 500 мм. Для трубопроводов диаметром 530-1420 мм и 219-426 мм композитная муфта может достигать длины 10,5 м и 17,5 м, толщина трубы от 4 мм до 29 мм. Описанная КМТ может быть реализована при ремонте магистральных трубопроводов, обладающих указанными параметрами, если предельно допустимое давление не превышает 14 МПа.

### Результаты исследования и их обсуждение

Выполнен расчет двухслойного участка трубопровода в зоне наложения муфты. Расчетные геометрические параметры: длина муфты  $L = 500$  мм, внутренний радиус равен 250 мм, толщина внешнего слоя (композитной муфты)  $h^{(1)} = 10$  мм, толщина внутреннего слоя (собственно трубы)  $h^{(2)} = 10$  мм. Механические характеристики материала слоев: модуль продольной упругости изотропного материала слоев  $E^{(1)} = E^{(2)} = 2.1 \cdot 10^4$  МПа; модуль Пуассона  $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 0.3$ ; числовое значение жесткости шва изменяется в указанных пределах:  $\eta = 0 \div 10^5$  Н/мм<sup>3</sup>. Изменение жесткости шва между слоями обеспечивается за счет состава композитного материала. Нулевая жесткость межслойных связей (коэффициент  $\eta = 0$  Н/мм<sup>3</sup>) соответствует исследованию конструкции при установке обжимной муфты через упругий слой [3, 5, 7]. Вариант расчета при неограниченном возрастании коэффициента жесткости использован для приварной муфты. Расчет проводится на внутреннее гидростатическое давление трубопровода при равномерно распределенной нагрузке с интенсивностью  $q = 0.5 \div 1$  МПа. Граничные условия отвечают шарнирному опиранию торцов (случай 4). Вычисления выполнены на внешней поверхности слоев оболочки при равномерно распределенной нагрузке. На рис. 1 и 2 представлены графики прогиба  $w$  и изгибающих моментов  $M_1^{(1)}$  муфты вдоль оси  $x$  для случая равномерно распределенной нагрузки. Расчетные значения коэффициента жесткости варьируются в пределах  $\eta = 0 \div 10^5$  Н/мм<sup>3</sup>. Прогиб  $w$  в средней части расчетного участка увеличивается на 10 % при  $\eta = 0 \div 10^5$  Н/мм<sup>3</sup>.

На основании расчетов, можно заключить, что числовые значения изгибающих моментов изменяются в два раза. Следует отметить, что установка муфты может привести к снижению прочности трубопровода из-за возникновения изгибающих моментов и краевого эффекта.

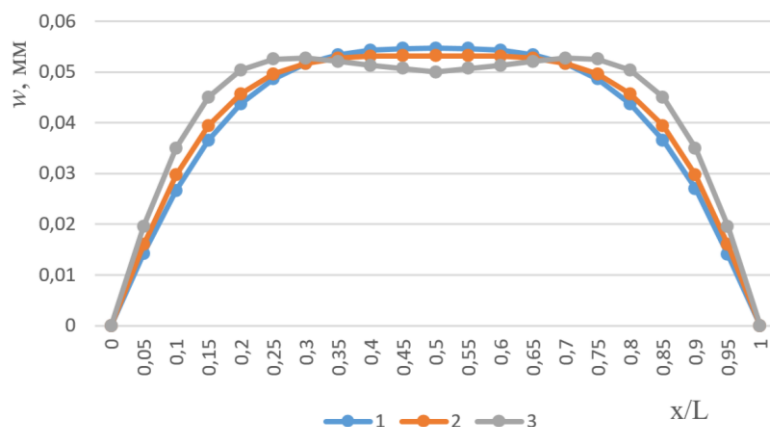


Рис. 1. Графики функции прогиба  $w$  муфты вдоль оси  $x$  для случая равномерно распределенной нагрузки. Коэффициент  $\eta$  принимает значения: 1 — 100 Н/мм<sup>3</sup>, 2 — 0,1 Н/мм<sup>3</sup>, 3 — 500100 Н/мм<sup>3</sup>

Fig. 1. Graphs of the deflection function  $w$  of the coupling along the  $x$ -axis for the case of a uniformly distributed load. Coefficient  $\eta$  takes values: 1 — 100 N/mm<sup>3</sup>; 2 — 0.1 N/mm<sup>3</sup>; 3 — 500100 N/mm<sup>3</sup>

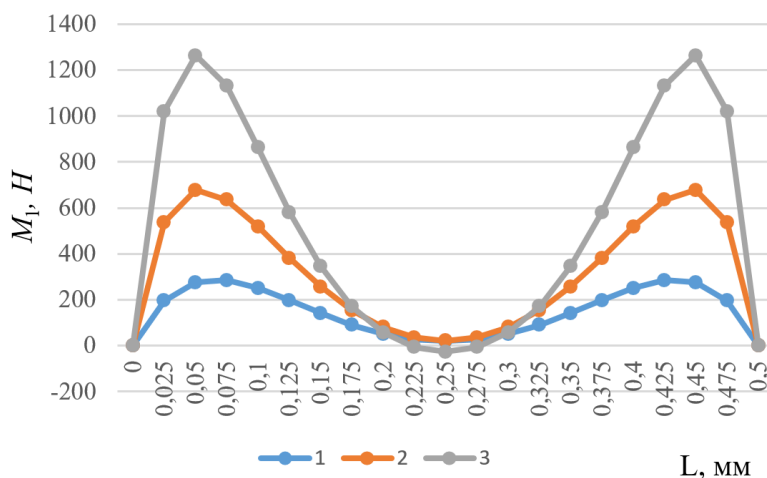


Рис. 2. Графики изгибающих моментов  $M_1^{(1)}$  муфты вдоль оси  $x$  для случая равномерно распределенной нагрузки. Коэффициент  $\eta$  принимает значения: 1 — 100 Н/мм<sup>3</sup>, 2 — 0,1 Н/мм<sup>3</sup>, 3 — 500100 Н/мм<sup>3</sup>

Fig. 2. Graphs of coupling bending moments  $M_1^{(1)}$  along the  $x$ -axis for the case of a uniformly distributed load. Coefficient  $\eta$  takes values: 1 — 100 N/mm<sup>3</sup>; 2 — 0.1 N/mm<sup>3</sup>; 3 — 500 N/mm<sup>3</sup>

Исследование НДС участка трубопровода реконструированного ремонтной муфтой позволяет сделать вывод, что при значительном увеличении коэффициента жесткости шва ( $\eta \geq 10^5 \text{ Н/мм}^3$ ) двухслойную конструкцию можно рассматривать как единую и проводить расчет в соответствии описанием модели однослойной цилиндрической оболочки. Следующая особенность НДС при указанном виде нагружения, а именно внутреннее гидростатическое давление, что можно условно описать вектором равномерно распределенной нагрузки — это наличие краевого эффекта в зоне крепления муфты. Особенно этот факт очевиден при увеличении длины муфты.

Результаты решения сопоставлены с точным решением шарнирно опертой цилиндрической оболочки при осесимметричном нагружении. Можно рассмотреть два предельных случая: когда коэффициент жесткости шва равен нулю или неограниченно возрастает. Если коэффициент жесткости равен нулю, тогда:  $D_{11} = \sum_{i=1}^2 D_{11}^{(i)}$ . Здесь  $D_{11}^{(i)}$  — жесткость отдельного слоя.

Если геометрические и механические характеристики совпадают, т. е.  $D_{11}^{(1)} = D_{11}^{(2)}$ , тогда расчет можно выполнять на основе обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) осесимметричной деформации однослойной цилиндрической оболочки [1, 2, 4, 10]:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\beta^4 w = \frac{q_3}{D_{11}}, \quad \text{где } \beta^4 = \frac{3(1-\nu^2)}{(rh)^2}; \quad D_{11} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (19)$$

Здесь  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $r$  и  $h$  — радиус кривизны и толщина цилиндрической оболочки.

Общее решение ОДУ (19) согласно [1, 2, 4, 10]:

$$w = C_1 e^{-\beta x} \cos \beta x + C_2 e^{-\beta x} \sin \beta x + C_3 e^{\beta x} \cos \beta x + C_4 e^{\beta x} \sin \beta x + w_0, \quad (20)$$

где постоянные  $C_i$  определяются из граничных условий. Частное решение  $w_0$  находят в зависимости от вида нагрузки  $q_3$ .

Тогда, исходя из решения (20) значения изгибающего момента и перерезывающей силы равны:

$$M_1 = D_{11} \beta^2 (e^{-\beta x} \cos \beta x (C_2 - C_1) + e^{\beta x} \sin \beta x (C_3 + C_4)),$$

$$Q_1 = 2 D_{11} \beta^3 (\sin \beta x + \cos \beta x) (e^{\beta x} (C_1 - C_2) + e^{-\beta x} (C_3 + C_4)).$$

Если оболочка находится под воздействием осесимметричной нагрузки с постоянной интенсивностью  $q_3 = C_0 = \text{const}$ , тогда частное решение тоже ищется в виде константы  $w_0 = w_0 = \text{const}$ . Для нахождения  $w_0$  используем дифференциальное уравнение (19). Поскольку все производные  $w_0$  равны нулю,

$$\text{получаем } 4\beta^4 w_0 = \frac{q_3}{D_{11}}. \quad \text{Тогда } w_0 = \frac{q_3}{4\beta^4 D_{11}}, \quad \text{где } \beta^4 = \frac{3(1-\nu^2)}{(rh)^2}; \quad D_{11} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}.$$

При подстановке значений  $\beta^4$  и  $D_{11}$  получаем  $w_0 = \frac{r q_3}{Eh}$ .

Для нахождения коэффициентов  $C_1, C_2, C_3$  и  $C_4$  в общем решении дифференциального уравнения (20) используем краевые условия, соответствующие условиям закрепления.

Для шарнирно опертого контура, свободного в тангенциальном направлении контур, на торцах оболочки (при  $x = 0$  и  $x = L$ ) выполняются граничные условия в перемещениях:  $w = 0, \frac{d^2w}{dx^2} = 0, \frac{du^{(i)}}{dx} = 0$ .

Допустим  $x = 0$ , тогда из решения (20) и условия  $w = 0$  получаем:  $C_1 + C_3 + w_0 = 0$ . Это первое уравнение системы.

При  $x = L$  имеем  $w = 0$ , тогда второе уравнение запишется в виде:

$$C_1 e^{-\beta L} \cos(\beta L) - C_2 e^{-\beta L} \sin(\beta L) + C_3 e^{\beta L} \cos(\beta L) + C_4 e^{\beta L} \sin(\beta L) + w_0 = 0.$$

Используем граничное условие  $\frac{d^2w}{dx^2} = 0$ , если  $x = 0$  и  $x = L$ .

При  $x = 0$  получаем уравнение —  $C_1 + C_4 = 0$ , тогда  $C_1 = C_4$ .

Третье уравнение системы выводится на основе граничного условия  $\frac{d^2w}{dx^2} = 0$ , если координата  $x = L$ :

$$-C_1 e^{-\beta L} \sin(\beta L) - C_2 e^{-\beta L} \cos(\beta L) - C_3 e^{\beta L} \sin(\beta L) + C_4 e^{\beta L} \cos(\beta L) = 0.$$

Учитывая, что  $C_1 = C_4$  искомые коэффициенты  $C_1, C_2, C_3$  можно найти из системы линейных алгебраических уравнений:  $AX = B$ .

$$\text{Здесь } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -w_0 \\ -w_0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$a_{11} = 1, a_{12} = 0, a_{13} = 1, a_{21} = e^{-\beta L} \cos(\beta L), a_{22} = \sin(\beta L)(e^{\beta L} + e^{-\beta L}),$$

$$a_{23} = e^{\beta L} \cos(\beta L), a_{31} = -e^{-\beta L} \sin(\beta L), a_{32} = \cos(\beta L)(e^{\beta L} - e^{-\beta L}),$$

$$a_{33} = -e^{\beta L} \sin(\beta L). w_0 = \frac{q_3}{4\beta^4 D_{11}}. \beta^4 = \frac{3(1-\nu^2)}{(rh)^2}, D_{11} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

После подстановки значений  $\beta^4$  и  $D_{11}$  имеем  $w_0 = \frac{rq_3}{Eh}$ .

Сравнение точного для однослойной цилиндрической оболочки и приближенного решения для двухслойного участка трубопровода показало, что результаты отвечают технической погрешности. Значения прогиба, изгибающего момента и напряжений отличается на 4-5 % при удержании 150 членов тригонометрического ряда.

### Заключение

Таким образом, получена математическая модель в форме дифференциальных уравнений, которая позволяет вычислить значения деформаций, напряжений и усилий в слоях при разных способах установки муфт, оценить конструктивную

надежность трубопровода, определить влияние геометрических и механических параметров конструкции на прочность ремонтируемого участка трубопровода. Реконструкция поврежденных участков нефтегазопроводов по композитно-муфтовой технологии за счет дополнительного слоя приводит к снижению напряжения и разгрузке основной трубы, что позволяет повысить сопротивление к разрушению и существенно увеличить срок службы трубопроводов. Моделирование и расчет действующего нефтепровода без остановки перекачки нефти позволяют эффективно и экологически безопасно использовать топливно-энергетические ресурсы, поэтому являются перспективным направлением научно-техническими исследования. В качестве точек роста можно указать решение таких задач, как исследование НДС составной конструкции с учетом физической нелинейности, ползучести, ортотропных и анизотропных свойств материала. Этим условиям отвечают полимерно-композитные материалы, которые применяются для ремонта в соответствии с композитно-муфтовой технологией.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Донкова И. А. Математическая модель изгиба составных тонкостенных цилиндрических оболочек: дис. ... канд. техн. наук / И. А. Донкова. Тюмень, 1999. 112 с. URL: <http://dlib.rsil.ru>, <http://dissercat.com> (дата обращения: 31.05.2022 г.).
2. Донкова И. А. Анализ математических моделей и методов исследования напряженно-деформированного состояния многослойных конструкций / И. А. Донкова, Н. М. Гаврилова, А. А. Ступников, Ю. А. Плотоненко // В мире научных открытий. 2015. № 4.1 (64). С. 515-525. URL: <http://elibrary.ru> (дата обращения: 31.05.2022 г.).
3. Композитно-муфтовая технология ремонта магистральных трубопроводов (КТМ). URL: <http://www.stroynov.net/> (дата обращения: 27.04.2022 г.).
4. Новожилов В. В. Линейная теория тонких оболочек / В. В. Новожилов, К. Ф. Черных, Е. И. Михайловский. Ленинград: Политехника, 1991. 656 с.
5. Платонов А. Н. Осесимметричная задача напряженно-деформированного состояния восстановленного участка трубопровода / А. Н. Платонов // Известия вузов. Серия «Нефть и газ». 2003. № 4. С. 81-85.
6. Ржаницын А. Р. Составные стержни и пластинки / А. Р. Ржаницын. Москва: Стройиздат, 1986. 316 с.
7. Якубовский Ю. Е. Проблемы прочности трубопроводного транспорта / Ю. Е. Якубовский, Н. А. Малюшин, С. В. Якубовская, А. Н. Платонов. Санкт-Петербург: Недра, 2003. 200 с.
8. Donkova I. Modeling of composite coupling technology for oil-gas pipeline section resource-saving repair / I. Donkova, Yu. Yakubovskiy, M. Kruglov // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science 90. Series «Energy Management of Municipal Transportation Facilities and Transport, EMMFT 2017». 2017. Art. 012093.
9. Yakubovskiy Yu. Bending of structurally orthotropic composite structures with anchor connection layers / Yu. Yakubovskiy, V. Kolosov, B. Gulyaev, V. Goltsov // Procedia Engineering. Electronic resource. 2016. Vol. 165. Pp. 1246-1253.
10. Yakubovskiy Yu. Mathematical modeling and computation of composite cylindrical shells under axisymmetric loading / Yu. Yakubovskiy, I. Donkova, B. Gulyaev, V. Goltsov // MATEC Web of Conferences. 2017. № 106. Art. 04016.

Irina A. DONKOVA<sup>1</sup>  
Yuriy E. YAKUBOVSKIY<sup>2</sup>  
Vasilii I. KOLOSOV<sup>3</sup>

UDC 624.074.4:539.3

## MODELING AND CALCULATION OF A PIPELINE SECTION REPAIRED ON THE BASIS OF COMPOSITE-COUPLING TECHNOLOGY

- <sup>1</sup> Cand. Sci. (Tech.), Associate Professor,  
Department of Software, University of Tyumen  
i.a.donkova@utmn.ru; ORCID 0000-0003-1151-4931
- <sup>2</sup> Dr. Sci. (Tech.), Professor,  
Department of Applied Mechanics, Industrial University of Tyumen  
yakubovskijje@tyuiu.ru; ORCID 0000-0002-6838-0631
- <sup>3</sup> Cand. Sci. (Tech.), Associate Professor,  
Department of Applied Mechanics, Industrial University of Tyumen  
kolosovvi@tyuiu.ru; ORCID 000000034697492X

### Abstract

The issues of modeling and calculation of a section of a main pipeline reconstructed by a composite coupling are considered. Such a section is a two-layer composite cylindrical structure. At the heart of the construction a model are provisions and the hypothesis of the classical theory of shells (variant of L. I. Balabukh — V. I. Novozhilov) and the theory of deformation of composite structures (A. R. Rzhantsyn). The aim of the work is mathematical modeling and study of the tensely deformed state (TDS) in the field of installation of the coupling. The problem of calculating a section of a pipeline repaired in accordance with the composite-coupling technology (CCT), which is under the action of internal hydrostatic pressure, is considered. A mathematical model of deformation of a two-layer circular cylindrical shell is

---

**Citation:** Donkova I. A., Yakubovskiy Yu. E., Kolosov V. I. 2022. “Modeling and calculation of a pipeline section repaired on the basis of composite-coupling technology”. Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 8, no. 3 (31), pp. 140-154.  
DOI: 10.21684/2411-7978-2022-8-3-140-154

---

presented in the form of a system of differential equilibrium equations and boundary conditions. Shear tension in the interlayer seam are taken into account.

**Keywords**

Theory of composite structures, cylindrical shells, axisymmetric loading, composite-coupling technology, tensely deformed state.

**DOI: 10.21684/2411-7978-2022-8-3-140-154**

**REFERENCES**

- 1 Donkova I. A. 1999. "Mathematical model of bending of compound thin-walled cylindrical shells". Cand. Sci. (Tech.) diss. Tyumen. 112 p. Accessed on 31 May 2022. <http://dlib.rsil.ru>, <http://dissercat.com> [In Russian]
- 2 Donkova I. A., Gavrilova N. M., Stupnikov A. A., Plotonenko Yu. A. 2015. "Analysis of mathematical models and methods for studying the stress-strain state of multilayer structures". In the world of scientific discoveries, no. 4.1 (64), pp. 515-525. Accessed on 31 May 2022. <http://elibrary.ru> [In Russian]
- 3 Composite-coupling technology for the repair of main pipelines (KTM). Accessed on 27 April 2022. <http://www.stroynov.net/> [In Russian]
- 4 Novozhilov V. V., Chernykh K. F., Mikhailovsky E. I. 1991. Linear theory of thin shells. Leningrad: Politekhnik. 656 p. [In Russian]
- 5 Platonov A. N. 2003. "Axisymmetric problem of the stress-strain state of the restored section of the pipeline". Izvestiya of a Higher Educational Institution "Oil and Gas", no. 4, pp. 81-85. [In Russian]
- 6 Rzhantsyn A. R. 1986. Composite rods and plates. Moscow: Stroyizdat. 316 p. [In Russian]
- 7 Yakubovskiy Yu. E., Malyushin N. A., Yakubovskaya S. V., Platonov A. N. 2003. Problems of strength of pipeline transport. Saint-Petersburg: Nedra. 200 p. [In Russian]
- 8 Donkova I., Yakubovskiy Yu., Kruglov M. 2017. "Modeling of composite coupling technology for oil-gas pipeline section resource-saving repair". IOP Conference Series: Earth and Environmental Science 90. Series "Energy Management of Municipal Transportation Facilities and Transport, EMMFT 2017". Art. 012093.
- 9 Yakubovskiy Yu., Kolosov V., Gulyaev B., Goltsov V. 2016. "Bending of structurally orthotropic composite structures with anchor connection layers". Procedia Engineering. Electronic resource, vol. 165, pp. 1246-1253.
- 10 Yakubovskiy Yu., Donkova I., Gulyaev B., Goltsov V. 2017. "Mathematical modeling and computation of composite cylindrical shells under axisymmetric loading". MATEC Web of Conferences, no. 106, art. 04016.