

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК
Кафедра фундаментальной математики и механики

РЕКОМЕНДОВАНО К
ЗАЩИТЕ В ГЭК
Заведующий кафедрой
к. ф.-м. н.
А. П. Девятков
27.06 2022 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
магистерская диссертация

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВОДНЕНИЯ НЕФТЯНОГО ПЛАСТА С ПОМОЩЬЮ
МОДЕЛИ CRM

01.04.01

Магистерская программа «Вычислительная механика»

Выполнил (а) работу
студент(ка) 2 курса
очной формы обучения



Смирнов Андрей Юрьевич

Руководитель
доктор физико-
математических наук,
профессор



Родионов Сергей Павлович

Рецензент
кандидат физико-
математических наук



Боталов Андрей Юрьевич

Тюмень
2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|---|----|
| СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ..... | 2 |
| ВВЕДЕНИЕ..... | 4 |
| ГЛАВА 1. ОБЗОР В ОБЛАСТИ CRM-МОДЕЛИРОВАНИЯ..... | 5 |
| 1.1 ОБЗОР СУЩЕСТВУЮЩИХ МОДЕЛЕЙ CRM..... | 5 |
| 1.2 КОЭФФИЦИЕНТ ВЗАИМОВЛИЯНИЯ..... | 11 |
| 1.3 ОПТИМИЗАЦИОННАЯ ЗАДАЧА..... | 14 |
| 1.4 ОГРАНИЧЕНИЯ В РАБОТЕ CRM..... | 16 |
| 1.5 ДВУХФАЗНОЕ CRM-МОДЕЛИРОВАНИЕ..... | 20 |
| ГЛАВА 2. ПРИМЕНЕНИЕ CRM НА СИНТЕТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ..... | 23 |
| 2.1 ОПИСАНИЕ МОДЕЛЕЙ..... | 23 |
| 2.2 ОДНОРОДНЫЙ ПЛАСТ..... | 26 |
| 2.3 НЕОДНОРОДНЫЙ ПЛАСТ..... | 30 |
| 2.4 ГОРИЗОНТАЛЬНАЯ СКВАЖИНА..... | 34 |
| 2.5 ОТКЛЮЧЕНИЕ ДОБЫВАЮЩЕЙ СКВАЖИНЫ..... | 39 |
| ГЛАВА 3. ОПТИМИЗАЦИЯ ЗАВОДНЕНИЯ..... | 41 |
| ЗАКЛЮЧЕНИЕ..... | 45 |
| БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК..... | 46 |
| ПРИЛОЖЕНИЕ 1..... | 49 |
| ПРИЛОЖЕНИЕ 2..... | 51 |

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

c_o – сжимаемость нефти, атм⁻¹;

c_r – сжимаемость породы, атм⁻¹;

c_t – общая сжимаемость, атм⁻¹;

c_w – сжимаемость воды, атм⁻¹;

d – расстояние между скважинами, м;

f – коэффициент взаимовлияния;

F – целевая функция;

Γ – индикаторная функция;

$I(t)$ – приемистость воды нагнетательной скважины в момент времени t , м³/сут;

J – коэффициент продуктивности, м³/(атм*сут);

μ – динамическая вязкость, Па*с;

N_I – количество нагнетательных скважин;

N_P – количество добывающих скважин;

\bar{p} – среднее пластовое давление, атм;

p_w – забойное давление на добывающей скважине, атм;

P – барьерная функция;

r – барьерный параметр;

$q(t)$ – дебит жидкости добывающей скважины в момент времени t , м³/сут;

$\tilde{q}(t)$ – фактический дебит жидкости скважины в момент времени t , м³/сут;

τ – временная константа, сут;

t – время, сут;

V_p - поровый объем, м³;

χ – пьезопроводность, м²/сут;

ГРП – гидроразрыв пласта;

ГС – горизонтальная скважина;

ННС – наклонно-направленная скважина;

ОПГ – обобщенный приведенный градиент;

ППД – поддержание пластового давления;

ФНП – функция нескольких переменных;

CRM – capacitance-resistance model;

IP – interior point;

ВВЕДЕНИЕ

Заводнение является одним из наиболее распространенных методов оптимизации добычи нефти на зрелых месторождениях. При мониторинге распределения потоков закачиваемой воды важной составляющей является информация о гидродинамических связях между скважинами, позволяющая судить о наличии непроницаемых перегородок или зонах повышенной проницаемости.

Целью данной работы является исследование применимости аналитической модели CRMP к задаче управления заводнением. Получение представления о гидродинамических связях для участка пласта поможет грамотно организовать режим работы нагнетательного фонда, тем самым решая задачу о поддержании темпов падения.

В настоящей работе представлен анализ текущего состояния в области CRM-моделирования; составлена синтетическая модель (ГДМ), данные с которой использовались как факт; рассмотрена работа CRMP на примере 4 задач, отдельное внимание уделено чувствительности CRMP-модели к ориентации горизонтальной скважины; получен положительный результат применения аналитической модели для управления заводнением.

ГЛАВА 1. ОБЗОР В ОБЛАСТИ CRM-МОДЕЛИРОВАНИЯ

1.1 ОБЗОР СУЩЕСТВУЮЩИХ МОДЕЛЕЙ CRM

При решении задач управления заводнением активно используются коммерческими гидродинамическими симуляторами. Однако, такой подход требует больших вычислительных мощностей и знание значительного объема физических характеристик разрабатываемого месторождения. Тенденция к ускорению рабочего процесса привела к созданию простых аналитических моделей управления заводнением, не требующих значительных вычислительных и временных затрат, но, в то же время, не уступающим в качестве прогнозирования симуляторам.

Модели емкостного сопротивления (Capacitance – Resistance Model) представляют собой семейство упрощенных моделей материального баланса. Эти модели учитывают интерференцию скважин и способны прогнозировать показатели добычи для скважины или группы скважин, используя для этого лишь фактические значения дебитов, приемистостей и забойного давления добывающих скважин. Как отмечается в [16], преимуществом CRM-моделей является отказ от использования в вычислениях пластового давления, которое меняется в процессе разработки, а его определения в промысловой практике часто затруднительны. Помимо прогнозирования добычи CRM могут быть полезны в задачах:

- подтверждения наличия герметичности скважины или утечек, обусловленных повреждением ствола скважины, естественными трещинами в призабойной зоне, автоГРП, и.т.д;
- определения зон высокой проницаемости или слабопроницаемых барьеров;
- определения эффективности охвата добывающих скважин;
- оптимизации распределения закачиваемой жидкости (управление заводнением).

Уравнение материального баланса для дренируемого объема имеет вид:

$$c_t V_p \frac{d\bar{p}}{dt} = I(t) - q(t), \quad (1.1)$$

где c_t – общая сжимаемость, V_p – поровый объем, \bar{p} – среднее пластовое давление, $I(t)$ – приемистость воды нагнетательной скважины в момент времени t , $q(t)$ – дебит жидкости добывающей скважины в момент времени t . Решая уравнение (1.1) совместно с уравнением продуктивности $q(t) = J(\bar{p}(t) - p_w(t))$, можно получить уравнение:

$$\tau \frac{dq}{dt} + q(t) = I(t) - \tau J \frac{dp_w}{dt}, \quad (1.2)$$

$$\tau = \frac{c_t V_p}{J}, \quad (1.3)$$

где p_w – забойное давление на добывающей скважине, J – коэффициент продуктивности, τ – временная константа (считается постоянной на всем этапе эксплуатации скважины).

В работе [10] впервые было представлено аналитическое решение (1.2), учитывающее изменение приемистостей и забойного давления на каждом временном шаге:

$$q(t_n) = q(t_0) e^{-\frac{(t_n - t_0)}{\tau}} + \sum_{k=1}^n \left(1 - e^{-\frac{(t_k - t_{k-1})}{\tau}} \right) e^{-\frac{(t_n - t_k)}{\tau}} \left(I(t_k) - J \tau \frac{p_w(t_k) - p_w(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \right) \quad (1.4)$$

Дальнейшие работы по CRM развивают идею [10] и часто ссылаются на уравнение (1.4). Из системы уравнений (1.1 и уравнение продуктивности) для контрольного объема, которым выбрано охарактеризовать модель пласта, можно получить аналитическое уравнение, которое будет являться частным случаем CRM. Рассмотрим классификацию моделей емкостного сопротивления по способу задания контрольного объема.

CRMT

Модель CRMT рассматривает полный дренируемый объем коллектора, включающий нагнетательные и добывающие скважины. При составлении

уравнения материального баланса дебиты и приемистости суммируются, предполагая работу одной псевдо-добывающей и одной псевдо-нагнетательной скважин в модели.

Аналитическое решение для CRMT представлено в таблице 1. Для модели, содержащей более чем одну добывающую скважину, предполагается постоянство забойного давления на псевдо-добывающей скважине.

CRMP

В модели CRMP рассматриваемые контрольные объемы включают одну добывающую скважину и все потенциально влияющие на нее нагнетательные скважины. Понятие «потенциально влияющие» определяется радиусом влияния, за который обычно принимают расстояние между двумя соседними скважинами.

Модель CRMP содержит одну временную константу для каждой добывающей скважины и один коэффициент взаимовлияния для каждой пары добывающая – нагнетательная скважина. Поскольку для каждой добывающей скважины назначается только одна временная константа, модель предполагает, что изменения приемистости во времени влияют только на изменение коэффициентов взаимовлияния f_{ij} , при этом дебиты будут соответствовать той же постоянной времени. Поэтому применение CRMP плохо подходит для сильно неоднородных коллекторов с разным межскважинным расстоянием [5].

CRMIP

Модель CRMIP рассматривает контрольный объем каждой пары добывающей и нагнетательной скважин (Injector – Producer). Для каждой пары определяется временная константа и коэффициент взаимовлияния f_{ij} . Количество параметров в задаче увеличивается, однако, повышается применимость модели для неоднородных пластов.

CRMID

Модель CRMID является синтезом моделей CRMP и CRMIP, то есть некоторый контрольный объем с добывающей скважиной рассматривается совместно с дренируемым объемом между этой скважиной и нагнетательной. Основная идея такого подхода состоит в уменьшении количества неизвестных величин с $4N_P N_I$ до $N_P(2N_I + 2)$ [12]. Неизвестные начальные дебиты и коэффициент продуктивности для каждой пары скважин заменяются одним начальным дебитом q_0 и одним коэффициентом J_0 .

CRM-Block

CRM-Block, как понятно из названия, представляет собой одномерную модель, где контрольный объем между нагнетательной и добывающей скважинами разделен на блоки. В такой постановке временная константа задается для каждого блока отдельно. Как отмечают в [5], использование такой модели рекомендуется для случаев с низкой проницаемостью и со значительно удаленными друг от друга парами нагнетательных – добывающих скважин.

ML-CRM

Зачастую коллектора содержат непроницаемые слои, поэтому моделирование притока жидкости к скважинам, разделенное по слоям, представляется более логичным с точки зрения физичности задачи и более приближенным к реальности. Модель ML-CRM представляет собой многоуровневую модель, каждый уровень которой является CRMP. Временная константа для каждой добывающей скважины может определяться как общая для всех слоев, так и для каждого слоя в отдельности. Как было показано в работе [7], на зрелых месторождениях оба подхода обеспечивают одинаковую точность.

Хотя ML-CRM выглядит наиболее приближенной к реальности, в разы увеличивается количество настраиваемых параметров. Пласты коллектора могут находиться в гидродинамической связи друг с другом, что подразумевает

наличие перетоков между контрольными объемами. Такой факт значительно усложняет модель и увеличивает время решения оптимизационной задачи.

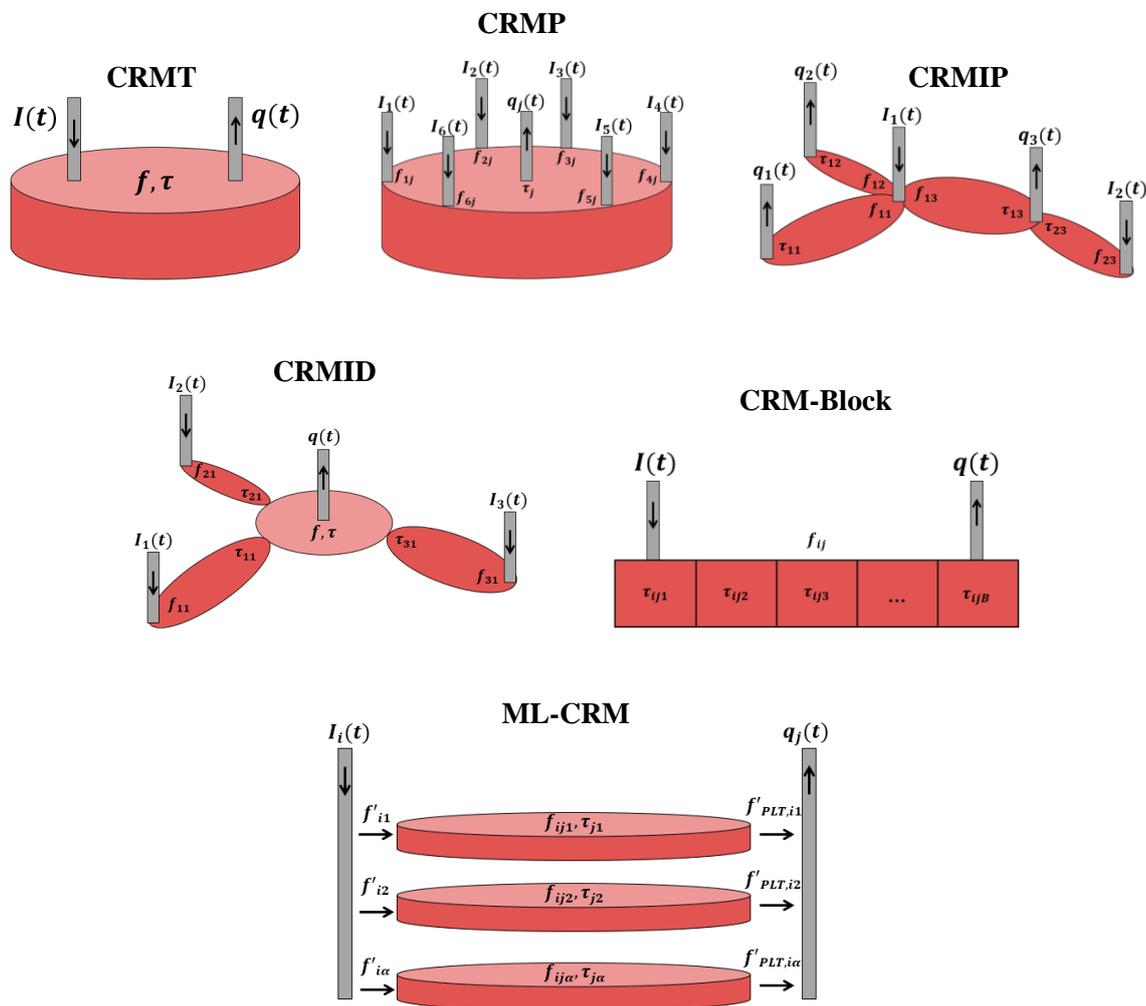


Рис. 1. Разновидности моделей CRM [5, 10, 12]

Таблица 1

Аналитическое решение уравнения материального баланса для различных моделей CRM

| Модель | Аналитическое решение уравнения материального баланса |
|--------|---|
| CRMT | $q(t_n) = q(t_{n-1})e^{-\frac{\Delta t_n}{\tau}} + \left(1 - e^{-\frac{\Delta t_n}{\tau}}\right) \left(I(t_n) - J\tau \frac{\Delta p_w(t_n)}{\Delta t_n}\right)$ $q_F(t_n) = q_F(t_{n-1})e^{-\frac{\Delta t_n}{\tau}} + \left(1 - e^{-\frac{\Delta t_n}{\tau}}\right) I(t_n) f_F$ |

| | |
|-----------|--|
| CRMP | $q_j(t_n) = q_j(t_{n-1})e^{\frac{-\Delta t_n}{\tau_j}} + \left(1 - e^{\frac{-\Delta t_n}{\tau_j}}\right) \sum_{i=1}^{N_{inj}} \left(f_{ij}I_i(t_n) - J_j\tau_j \frac{\Delta p_{wj}(t_n)}{\Delta t_n}\right)$ |
| CRMIP | $q_{ij}(t_n) = q_{ij}(t_{n-1})e^{\frac{-\Delta t_n}{\tau_{ij}}} + \left(1 - e^{\frac{-\Delta t_n}{\tau_{ij}}}\right) \left(f_{ij}I_i(t_n) - J_{ij}\tau_{ij} \frac{\Delta p_{wj}(t_n)}{\Delta t_n}\right)$ |
| CRMID | $q_j(t_n) = q_j(t_{n-1})e^{\frac{-\Delta t_n}{\tau_j}} + \sum_{i=1}^{N_{inj}} \left\{ f_{ij} \left[I_i(t_n) - I_i(t_{n-1})e^{\frac{-\Delta t_n}{\tau_{ij}}} \right] - \tau_j \sum_{k=1}^n \left\{ \left(e^{\frac{-(t_n-t_k)}{\tau_{ij}}} - e^{\frac{-(t_n-t_{k-1})}{\tau_{ij}}} \right) f_{ij} \frac{\Delta I_i(t_k)}{\Delta t_k} \right\} - \tau_j \sum_{k=1}^n \left\{ \left(e^{\frac{-(t_n-t_k)}{\tau_j}} - e^{\frac{-(t_n-t_{k-1})}{\tau_j}} \right) J_j \frac{\Delta p_{wj}(t_n)}{\Delta t_n} \right\} \right\}$ |
| CRM-Block | $q(t_n) = q_B(t_{n-1})e^{\frac{-\Delta t_n}{\tau_B}} + \sum_{b=1}^{B-1} \left(q_b(t_{n-1})e^{\frac{-\Delta t_n}{\tau_b}} \prod_{a=1}^{B-b} \left(1 - e^{\frac{-\Delta t_n}{\tau_a}} \right) \right) + I(t_n) \prod_{b=1}^B \left(1 - e^{\frac{-\Delta t_n}{\tau_b}} \right)$ |

1.2 КОЭФФИЦИЕНТ ВЗАИМОВЛИЯНИЯ

На сегодняшний день существует ряд методов, позволяющий определять наличие межскважинных связей и давать им численную оценку. Все их можно разделить на две группы: технологические (трассерные исследования, гидропрослушивание) и аналитические (ГДМ, метод линий тока, CRM, статистические методы и др.). Аналитические методы не требуют прямого взаимодействия с системой разработки и зачастую не требовательны к наличию широкого спектра промысловых данных, однако, они также имеют свои недостатки. Например, геометрический метод, при котором коэффициенты взаимовлияния определяются пропорционально углам между скважинами, подходит только для геологически однородных пластов с симметричными расстановками скважин, забойное давление которых не изменяется [15], и не способен давать прогноз динамики дебитов.

В работе [22] представлен краткий обзор существующих методов оценки взаимовлияния скважин и для каждого метода дана качественная оценка с точки зрения его «физичности» и трудоемкости. Согласно статье, CRM-моделирование наряду с аналитической многоскважинной моделью и стохастико-аналитическим методом в равной степени удовлетворяет требованиям физической состоятельности и ресурсозатратности.

В аналитической модели CRMP в ходе решения оптимизационной задачи находятся коэффициенты взаимовлияния – доли закачки конкретной нагнетательной скважины, приходящиеся на добычу жидкости конкретной добывающей скважины. При установившихся режимах изменение значений приемистости прямо пропорционально сказывается на значениях дебита скважин.

Коэффициенты взаимовлияния на основе CRM характеризуют влияние, передаваемое через пластовое давление [20]. В работе [3] в качестве начального приближения межскважинные связи (коэффициенты взаимовлияния)

предлагается определять как отношение гидропроводностей между конкретными нагнетательной и добывающей скважинами к сумме гидропроводностей между конкретной нагнетательной и всеми добывающими скважинами.

$$f_{ij} = \frac{\chi_{ij}}{\sum_j^{NP} \chi_{ij}} \quad (1.5)$$

В статье [10] начальную оценку коэффициента взаимовлияния дают исходя из расстояния между нагнетательной и добывающей скважиной d_{ij} .

$$f_{ij} = \frac{1/d_{ij}}{\sum_j^{NP} 1/d_{ij}} \quad (1.6)$$

На основе коэффициентов взаимовлияния можно определять нагнетательные скважины с непроизводительной закачкой – объемом закачки, приходящимся на перетоки в нецелевые пласты или законтурную область. Доля непроизводительной закачки определяется как

$$1 - \sum_j^{NP} f_{ij}$$

Если f_{ij} существенно меньше единицы, то можно сделать вывод, что нагнетательная скважина i не влияет или влияет незначительно на добывающую скважину j . Это может быть обусловлено наличием непроницаемых барьеров между парой скважин $i - j$ или иных факторов, препятствующих потоку от i к j .

Модели, о которых шла речь в разделе 1.1, рассматривают коэффициенты взаимовлияния (и параметры J и τ) как неизменяющиеся величины. В реальности межскважинные связи могут представлять собой немонотонные зависимости от времени. Предположение о постоянстве коэффициентов взаимовлияния носит вероятностный характер. С течением времени не исключены изменения в структуре дренируемых участков, повреждение стволов скважин, приводящее к наличию утечек и заколонных циркуляций,

остановка или появление новых скважин. Хотя, как отмечалось в [5], коэффициенты взаимовлияния практически не изменяются после прорыва воды, при условии, что отсутствуют значительные изменения закачки и забойного давления на добывающих скважинах.

1.3 ОПТИМИЗАЦИОННАЯ ЗАДАЧА

Процедура подбора таких параметров τ и f_{ij} , чтобы модельные дебиты соответствовали фактическим, называется настройкой или обучением модели CRMP. При настройке модели формулируется целевая функция (1.7), представляющая собой разность фактических и модельных дебитов, и решается задача условной минимизации функции нескольких переменных.

$$F_j = \sum_{n=1}^N (\tilde{q}_j(t_n) - q_j(t_n))^2 \quad (1.7)$$

В ходе настройки возможны ситуации, когда при неверных с точки зрения физики пласта параметрах, модель адекватно воспроизводит динамику дебита жидкости. Это связано с тем, что целевая функция имеет множество локальных минимумов, и нахождение глобального минимума представляет проблему. Поэтому методы решения оптимизационной задачи рекомендуется применять многократно, с большим количеством начальных приближений [22].

В настоящей работе для решения оптимизационной задачи используются метод обобщенного градиента (встроен в MS Excel) и метод внутренней точки. Идея метода внутренней точки заключается в сведении задачи на условный минимум к решению последовательности задач поиска минимума вспомогательной функции.

Алгоритм нахождения минимума целевой функции методом внутренней точки:

1) Целевая функция (1.7) заменяется на целевую функцию, содержащую барьер $P(x, r)$

$$L(x, r) = F(x) + P(x, r) ,$$

$$P(x, r) = -r \sum_{j=1}^m \frac{1}{g_j(x)} ,$$

где $P(x, r)$ - барьерная функция, r – барьерный параметр, $g_j(x) > 0$ – функция ограничений неравенств, m – количество ограничений.

При решении задачи используется именно обратный барьер, а не логарифмический, так как его скорость сходимости выше [18];

2) Выбирается начальное приближение для параметров τ и f_{ij} с учетом ограничений. Для барьерного параметра примем $r = 0,1$;

3) Вычисляются производные целевой функции по каждому настраиваемому параметру в точках τ и f_{ij} (приложение 1). Для первой итерации используются начальные приближения;

4) Находится гессиан целевой функции $H(L)$ и его определитель, затем находится обратная матрица $H^{-1}(L)$;

5) Методом Ньютона для ФНП находится следующее приближение для параметров τ и f_{ij} (Функция $L(x, r)$ дважды непрерывно дифференцируема по переменным τ и f_{ij} , что допускает использование метода Ньютона);

6) С учетом новых τ и f_{ij} вычисляется значение дебитов по CRMP, а затем значение целевой функции. Если значение целевой функции больше заданного (например, $L > 10$), то возвращаемся к пункту 3. Иначе считается, что модель «прошла обучение» и настроечные параметры можно использовать для анализа работы участка и прогнозирования дебитов.

1.4 ОГРАНИЧЕНИЯ В РАБОТЕ CRM

Несмотря на возросшее за последнее десятилетие количество публикаций по расширению диапазона применимости CRM, в этих моделях, как и в моделях любого типа, по-прежнему существуют некоторые ограничения и незатронутые области исследования. Понимание и устранение этих ограничений может привести к созданию более надежных и практичных моделей.

Одной из глобальных проблем является учет изменяющихся параметров CRM во времени. Резкие изменения в режимах работы скважин могут повлечь за собой значительную перестройку потоков в пласте. Предположение о постоянстве гидродинамических связей и продуктивности скважин снижает точность прогноза CRM моделей.

Необходимо исследовать влияние на настроечные параметры аналитической модели таких аспектов как геолого-технические мероприятия (ГТМ), появление разломов и трещин автоГРП, изменения в текущем фонде скважин (появление новых, остановка, зарезка боковых стволов). Моделирование параметров, изменяющихся во времени по мере заводнения, позволит повысить надежность CRM.

Сильно сжимаемый флюид.

Отсутствие возможности моделирования жидкости с высокой сжимаемостью является одним из главных недостатков CRM. Если нефть и вода являются слабо сжимаемыми и несжимаемыми жидкостями, то газ имеет высокую сжимаемость, что приводит к существенным ошибкам при моделировании.

Предложение ввести в уравнение 1.2 параметр $\frac{\rho_g}{\bar{\rho}_g}$, описывающий изменение плотности газа, высказывалось авторами в [14]. В работе описана модификация модели CRM (M-CRM), учитывающая изменение свойств газа

при изменении давления. Как отмечает автор, усовершенствованная модель показала хорошую применимость к задачам закачки газа в пласт.

Наличие водоносных горизонтов.

Наличие водоносного горизонта (аквифера) представляет собой дополнительную нагнетательную скважину с неизвестной историей работы и может являться причиной компенсации давления в пласте. Отсутствие количественной оценки таких параметров повлияет на качество нашей модели. Чтобы учитывать влияние нагнетательных скважин и влияние притока из аквифера по отдельности, предлагалось объединить модель CRM с моделью водоносного горизонта [5] путем применения модели Картера – Трейси: рассматривать аквифер как единый для всего коллектора или как отдельный для каждой скважины. Во втором подходе значительно увеличивается число определяемых параметров.

В работе [19] автор предлагает искать коэффициенты продуктивности скважин, через которые рассчитываются коэффициенты влияния. Последние, в свою очередь, изменяются в зависимости от перераспределения давления между дренируемыми объемами. По мнению автора, такой подход позволяет учитывать перетоки между объемами и влияние аквифера.

Учет остановки добывающих скважин.

В процессе эксплуатации пласта, по мере увеличения обводненности, некоторые добывающие скважины могут быть заброшены или временно остановлены по техническим причинам. Опыт моделирования показывает, что в таких случаях CRM не способна качественно воспроизвести динамику дебита жидкости. Аналитическая модель (1.4) в своем первоначальном виде не различает, что стало причиной нулевого дебита: остановка скважины или наличие/появление повреждений пласта и низко проницаемых зон [9, 13].

В работе [9] приводят динамическую модель D-CRMP, способную учитывать периоды остановки добывающих скважин. Вводится индикаторная функция Γ_j , отражающая статус скважины, и предполагается, что

коэффициенты взаимовлияния изменяются в зависимости от количества остановленных скважин в момент времени t_n .

$$q_j(t_n) = \Gamma_j(t_n) \left\{ q_j(t_{n-1}) e^{\frac{-\Delta t_n}{\tau_j}} + \left(1 - e^{\frac{-\Delta t_n}{\tau_j}} \right) \sum_{i=1}^{N_{inj}} \left(f'_{ij} I_i(t_n) - J_j \tau_j \frac{\Delta p_{wj}(t_n)}{\Delta t_n} \right) \right\}, \quad (1.8)$$

где $f'_{ij} = \frac{\Gamma_j(t_n) f_{ij}}{\sum_{j=1}^{N_{prod}} \Gamma_j(t_n) f_{ij}}$ – коэффициент взаимовлияния, когда

добывающая скважина остановлена/закрыта;

$$\Gamma_j = \begin{cases} 1, & \text{если скважина активна} \\ 0, & \text{если скважина остановлена} \end{cases}$$

Альтернативные подходы можно найти в работах [2, 12]. Например, долю приемистости, которая относилась к остановленным скважинам, автор предлагает распределять между действующим фондом. Таким образом, во время простоя активные и неактивные добывающие скважины взаимодействуют с псевдоинжекторами, в результате чего соблюдается материальный баланс системы.

Проблематика применения моделей CRM при вводе в эксплуатацию новых добывающих скважин аналогична той, с которой сталкиваются при остановке добычи. Это проблема является перспективным направлением развития CRM-моделей.

Появление новых нагнетательных скважин.

Появление новых нагнетательных скважин или перевод скважин добывающего фонда в ППД также может сказаться на перераспределении потоков в пласте. Оценить влияние новой нагнетательной скважины можно приблизительно, ориентируясь на окружение. Однако для сильно неоднородных коллекторов такой подход может приводить к неточностям.

В работе [6] была показана качественная зависимость коэффициента взаимовлияния от межскважинного расстояния и предложена авторская методика, позволяющая рассчитать оптимальное местоположение новых

нагнетательных скважин для увеличения накопленной добычи. Также, было отмечено, что для однородного коллектора добавление новых нагнетательных скважин слабо влияет на изменения коэффициентов взаимовлияния между парами скважин базового фонда.

1.5 ДВУХФАЗНОЕ CRM-МОДЕЛИРОВАНИЕ

Ключевым ограничением моделей CRM некоторое время являлась невозможность разделения добычи на нефть и воду, то есть аналитический подход позволял прогнозировать только дебит жидкости. Необходимость в формулировке подхода к двухфазному моделированию привела к появлению работ по соответствующей тематике. Обзор ряда методов решения задачи о разделении добычи представлен ниже.

Модель Баклея-Левретта

Самая известная модель фракционного потока основана на теории Баклея-Левретта. Предположение о линейном одномерном несмешивающемся вытеснении позволяет оценить положение фронта вытеснения и обводненность на добывающих скважинах.

$$S_w(t_n) = S_w(t_n) + \frac{f_{ij}I_i(t_n) - q_j(t_{n-1})}{V_p} \Delta t_n \quad (1.9)$$

Формула (1.9) позволяет оценить водонасыщенность на скважине в момент времени t_n . Однако оптимизационная задача, представляющая разность между фактическими и модельными обводненностями на скважине, имеет 6 варьируемых параметров $(m, n, M, S_{wr}, S_{or}, V_p)$. В результате этого модель обладает большим числом «степеней свободы», а значит, есть вероятность, что хорошо настроенная по фактическим данным модель может демонстрировать неправдоподобный прогноз. Как отмечалось в работе [16], исследования авторов на реальных данных показали, что модель демонстрирует не только плохие прогностические свойства, но и, в ряде случаев, недостаточную гибкость – неспособность качественно повторить фактическую обводненность. Одной из причин таких результатов может являться факт, что теория Баклея-Левретта изначально описывает одномерное вытеснение, в то время как модель CRM – двумерное.

Модель Джентила (Gentil Model)

Эмпирическая модель Джентила основана на использовании характеристик вытеснения совместно с аналитической моделью CRM. В основе модели лежит зависимость:

$$q_0 = \frac{1}{1 + \alpha W(t)^\beta}, \quad (1.10)$$

где q_0 – фактический дебит скважины, $W(t)$ – накопленный объем воды, закачанный нагнетательными скважинами в некоторый контрольный объем, ассоциированный с рассматриваемой добывающей скважиной. Минимальные отличия модельной обводненности от фактической достигаются путем подбора параметров α и β . Модель может применяться только для существенно обводненных скважин [21].

Модель Коваля (Koval Model)

Модель Коваля, как и предыдущая модель, является эмпирической. Предполагается, что функция Баклея-Левретта зависит от параметра K_{val} , который характеризует неоднородность среды и разницу в вязкости нефти и воды. Уравнения, описывающие модель, содержат насыщенность, значения которой зачастую получить затруднительно.

Модель FeiСао

Особенность модели заключается в том, что CRMP настраивается не заранее, а совместно с решением уравнения материального баланса, записанного отдельно для нефти. При этом предполагается, что настраиваемые параметры τ и J зависят от текущей нефтенасыщенности, то есть являются динамическими.

По утверждению автора модели, ее преимуществом по сравнению с другими подходами является лучшая прогнозная способность, а также возможность применения на любом этапе разработки. Недостатком модели можно считать ее вычислительную сложность, так как число независимых параметров модели по сравнению с задачей CRMP возрастает приблизительно в

2 раза, а эффективный алгоритм для их определения не известен. На практике для определения этих параметров приходится использовать стохастические методы типа Монте-Карло и многократно решать прямую задачу.

Мультихарактеристическая модель

В работе [21] авторами предлагается модель, позволяющая восстановить значение средней водонасыщенности, а затем и обводненность в некотором объеме V в окрестности добывающей скважины на каждом временном шаге. Предполагается, что настраиваемые параметры τ, f, J известны, а объемную долю нефти в притоке от i -й нагнетательной скважины можно оценить как

$$f_{o_i} = f_{o_i}^0 * e^{-\frac{\sum_{k=1}^t LI_i(k)}{\tau_i}}, \quad (1.11)$$

где $f_{o_i}^0$ – объемная доля нефти на начало настройки модели, $\sum_{k=1}^t LI_i(k)$ – накопленный объем жидкости, закачанный в V под воздействием i -й нагнетательной скважины за t шагов, τ_i – величина, характеризующая скорость изменения объемной доли нефти в зависимости от накопленного притока жидкости.

Применение описанного подхода на синтетических моделях показало высокую способность к воспроизведению фактической динамики обводненности. Однако, как отмечают сами авторы, на увеличение приемистости мультихарактеристическая модель реагирует удовлетворительно, но в случае снижения приемистости не всегда удается точно повторить изменения обводненности.

ГЛАВА 2. ПРИМЕНЕНИЕ CRM НА СИНТЕТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ

2.1 ОПИСАНИЕ МОДЕЛЕЙ

Для проверки работоспособности аналитической модели были составлены две идентичные по характеристикам ГДМ (рисунок 2), отличающиеся только полями проницаемости (рисунок 3): модель 1 – однородная по проницаемости, в модели 2 – заданы барьеры и области высокой проницаемости. В модели используется приближение «разноцветных жидкостей», то есть нефть и вода имеют одинаковые свойства.

Размеры модели $1200 \times 1200 \times 50 \text{ м}^3$. Средняя проницаемость 10 мД, между парой скважин INJ1 и PROD1 проницаемость 100 мД, между парами INJ3 – PROD3 и INJ3 – PROD5 проницаемость 50 мД. Между парой INJ2 – PROD3 задан непроницаемый барьер, вокруг INJ4 задан слабопроницаемый барьер с проницаемостью 0,01 мД. Пористость постоянна для всего рассматриваемого объема и равна 20%. Сжимаемость породы $c_r = 2,25 \cdot 10^{-5} \text{ 1/атм}$, сжимаемость воды $c_w = 4,62 \cdot 10^{-5} \text{ 1/атм}$. Модель содержит 9 скважин: 4 нагнетательных и 5 добывающих (имитируется пятиточечная система разработки с расстоянием между скважинами $l = 275 \text{ м}$). Добывающие скважины работают с постоянным забойным давлением 45 атм.

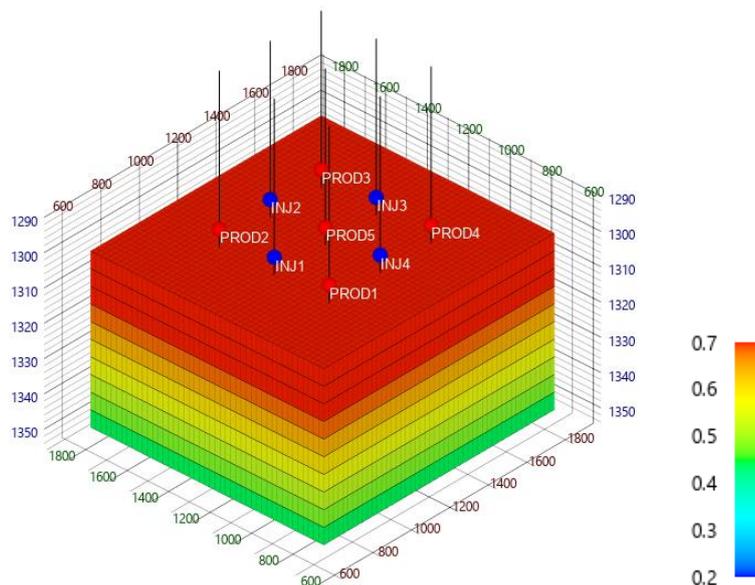


Рис. 2. Куб нефтенасыщенности в синтетической модели на начало работы скважин.

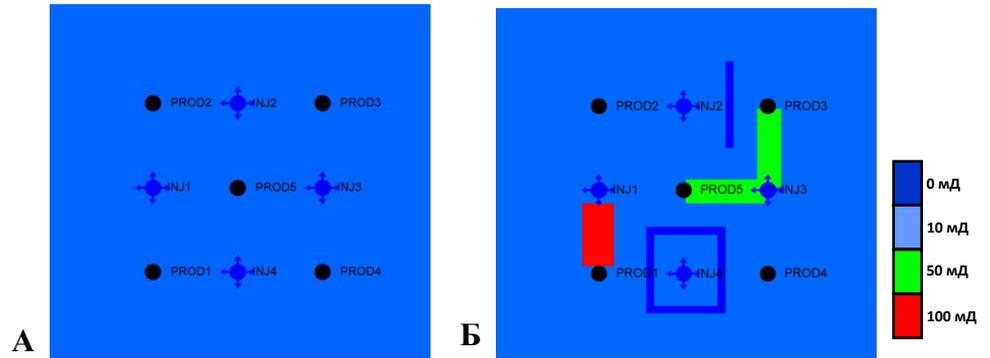


Рис. 3. Поле проницаемости: А – для модели 1, Б – для модели 2.

В качестве аналитической модели выбрана CRMP и для исследования ее работоспособности сформулированы 4 задачи заводнения: 1 – в однородном пласте, 2 – в неоднородном пласте, 3 – в неоднородном пласте с горизонтальной скважиной, 4 – в неоднородном пласте в случае с остановкой одной из добывающих скважин.

Для упрощения задачи мы принимаем, что добывающие скважины работают с постоянным забойным давлением. Тогда уравнение для CRMP принимает вид

$$q(t_n) = q(t_{n-1})e^{-\frac{1}{\tau}} + \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}}\right) (f_1 I_1(t_n) + f_2 I_2(t_n) + f_3 I_3(t_n) + f_4 I_4(t_n)) \quad (2.1)$$

В качестве начальных приближений для параметра τ мы оберем оценку

$$\tau = \frac{l^2}{\chi} = \frac{l^2 \mu \beta}{k} \approx 60 \text{ сут}$$

и $f_{ij} = 0,3$. Однако, так как за радиус влияния скважин принят параметр l , то коэффициенты взаимовлияния скважин, находящихся друг от друга на большем расстоянии, изначально задаются нулевыми. Например, для скважин INJ1 и PROD3 $f_{13} = 0$.

Решение оптимизационной задачи выполняется двумя методами: методом обобщенного приведенного градиента (MS Excel) и методом внутренней точки

(C++). Важно отметить, что в данной работе не рассматриваются преимущества одного метода над другим. Выбор двух методов обусловлен попыткой найти более точное, физически состоятельное решение.

За эталонные коэффициенты взаимовлияния берутся значения, полученные из ГДМ по методу линий тока:

$$f_{ij}(t_n) = \frac{N_{ij}(t_n) * \rho}{I_i(t_n)} , \quad (2.2)$$

где N_{ij} – количество линий тока, исходящих из i – й нагнетательной скважине к j – й добывающей, ρ – плотность линий тока, I_i – приемистость i – й нагнетательной скважины.

2.2 ОДНОРОДНЫЙ ПЛАСТ

В задаче 1 исследовалась работа аналитической модели в условиях отсутствия неоднородностей в пласте. Динамика работы нагнетательных скважин представлена на рисунке 4. На рисунке 5 представлено сопоставление динамики дебита жидкости по ГДМ и по CRM. Настройка модели осуществлялась на 60 месяцев, затем считался прогноз на 40 месяцев.

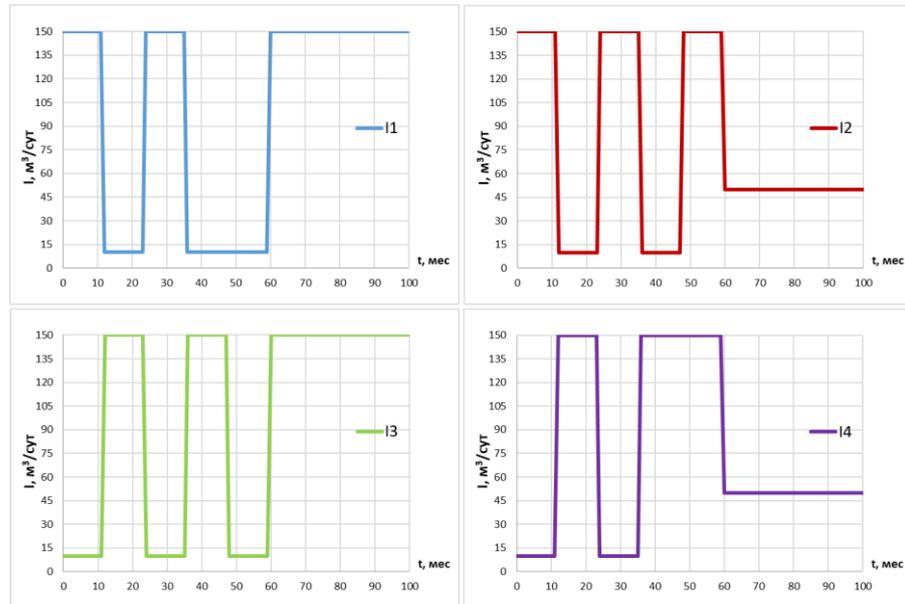
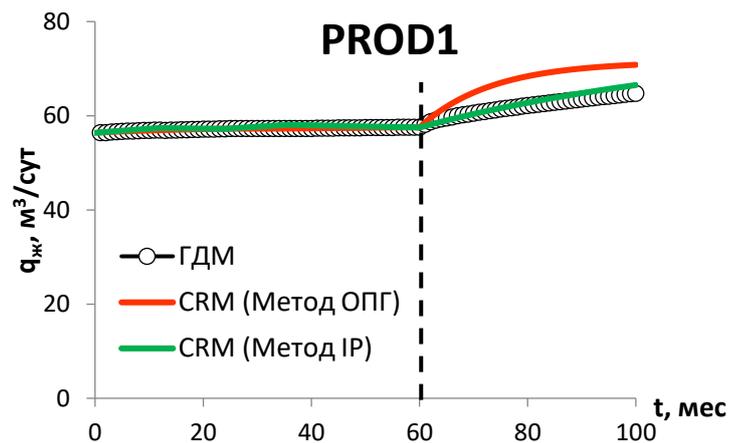
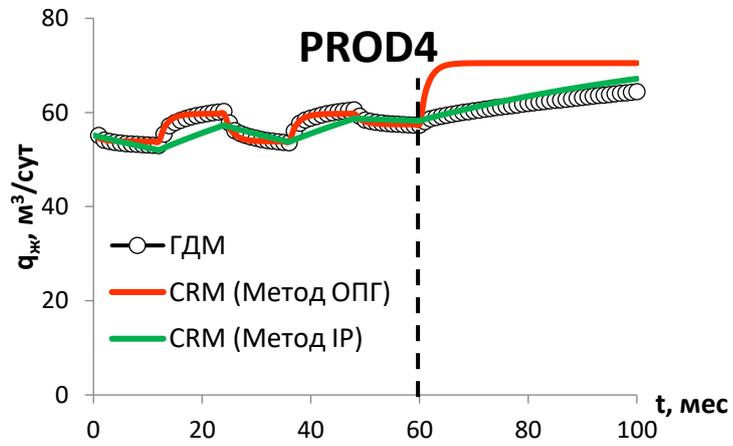
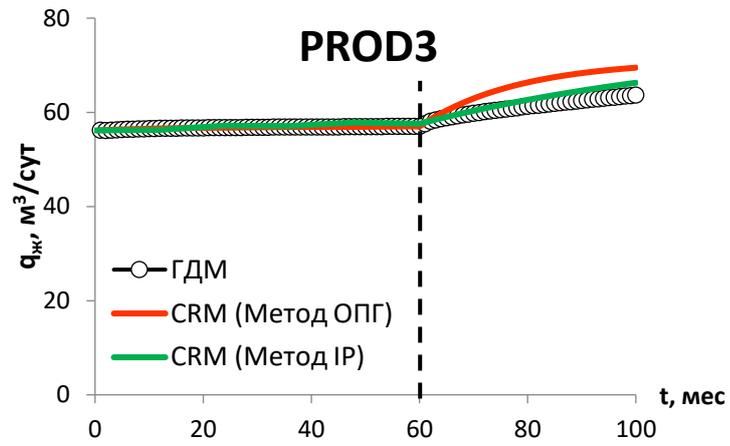
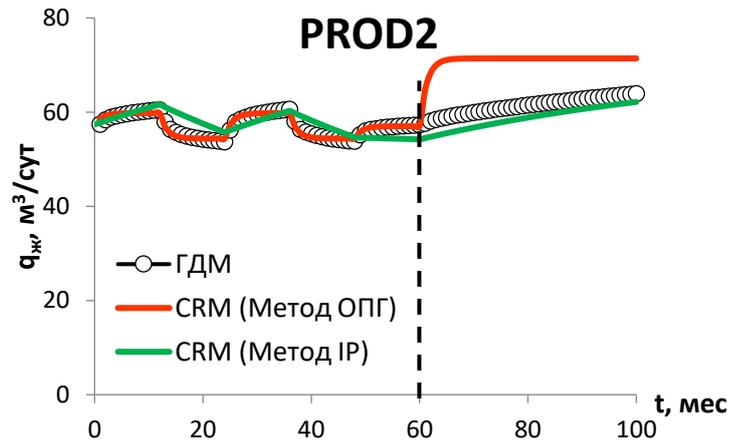


Рис. 4. Динамика приемистостей нагнетательных скважин для задачи 1.





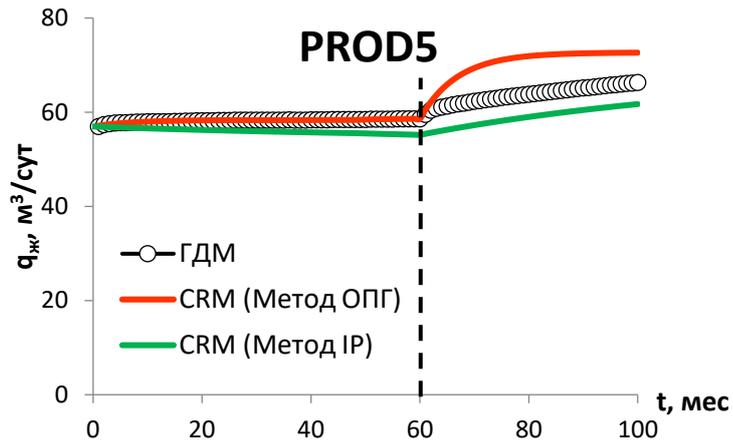


Рис. 5. Динамика дебита жидкости добывающих скважин для задачи 1.

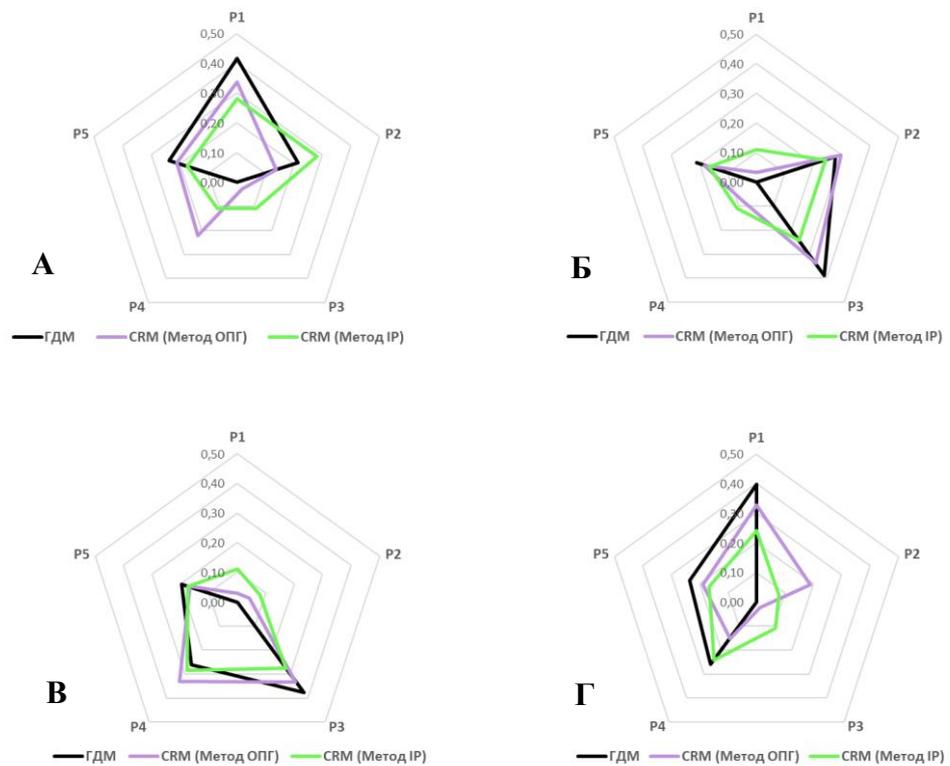


Рис. 6. Диаграммы коэффициентов взаимовлияния в задаче 1: А – для INJ1, Б – для INJ2, В – для INJ3, Г – для INJ4.

Невязка по дебиту жидкости при настройке модели составила 0,96 % и 7,20 % для метода ОПГ и метода IP соответственно (таблица 2). Модельная динамика дебита удовлетворяет значениям, полученным на ГДМ, а расчетные коэффициенты взаимовлияния (рисунок 6) соотносятся с коэффициентами, полученными по методу линий тока. Заметим, что графики для скважин

PROD1, PROD3 и PROD5 монотонно возрастают, в то время как для скважин PROD2 и PROD4 дебит изменяется ступенчато. Это объясняется тем, что для нечетных скважин в течение первых 60 месяцев одна из ближайших нагнетательных скважин всегда работала. В случае с четными скважинами возникали ситуации, когда не работали обе (или наоборот работали обе) ближайšie нагнетательные. Однако при расчете на прогноз метод ОПГ дает качественно неточный результат. Причина этого – низкие значения модельных параметров τ , то есть модель настроена таким образом, что добывающие скважины мгновенно реагируют на изменения закачки в пласт.

Таблица 2

Суммарная невязка по дебиту жидкости на период обучения модели для задач 1 – 3, %.

| Имя скважины | Задача 1 | | Задача 2 | |
|--------------|-------------|------------------------|--------------|------------------------|
| | Метод ОПГ | Метод внутренней точки | Метод ОПГ | Метод внутренней точки |
| PROD1 | 0,03 | 0,32 | 2,29 | 2,46 |
| PROD2 | 0,40 | 2,26 | 2,09 | 2,66 |
| PROD3 | 0,01 | 0,41 | 1,61 | 1,47 |
| PROD4 | 0,46 | 1,96 | 1,35 | 1,09 |
| PROD5 | 0,06 | 2,25 | 0,59 | 1,43 |
| Сумма | 0,96 | 7,20 | 7,92 | 9,12 |
| | Задача 3а | | Задача 3б | |
| | Метод ОПГ | Метод внутренней точки | Метод ОПГ | Метод внутренней точки |
| PROD1 | 3,26 | 3,38 | 3,69 | 3,89 |
| PROD2 | 1,85 | 5,80 | 2,73 | 5,96 |
| PROD3 | 1,55 | 3,56 | 2,58 | 2,79 |
| PROD4 | 1,38 | 1,61 | 2,29 | 1,43 |
| PROD5 | 1,51 | 3,54 | 2,57 | 3,93 |
| Сумма | 9,55 | 17,89 | 13,85 | 18,01 |

2.3 НЕОДНОРОДНЫЙ ПЛАСТ

В задаче 2 нас интересовало, как изменятся межскважинные связи при идентичной постановке для неоднородного по проницаемости пласта и насколько точно эти изменения будут воспроизведены CRMР. Период настройки модели не отличался от задачи 1. Единственное отличие: нагнетательная скважина INJ4 не смогла работать с заданным значением приемистости при том же забойном давлении (рисунок 7). В нашей модели это произошло из-за наличия слабопроницаемого барьера. Возникновение подобной ситуации при работе с реальным месторождением может свидетельствовать о загрязнении призабойной зоны вокруг нагнетательной скважины, а значит снижении проницаемости, или о высоком пластовом давлении в области закачки. Это позволяет предположить, что нагнетательная скважина будет влиять заметно слабее на скважины окружения или вовсе не оказывать влияния.

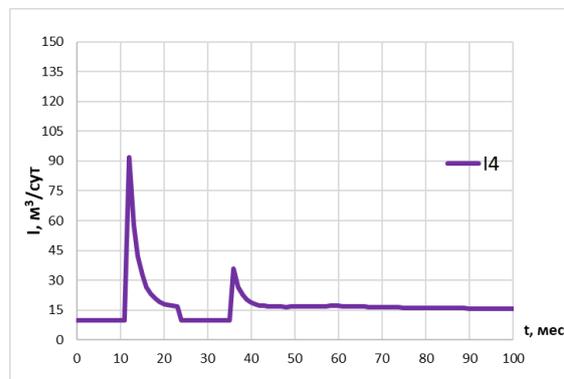
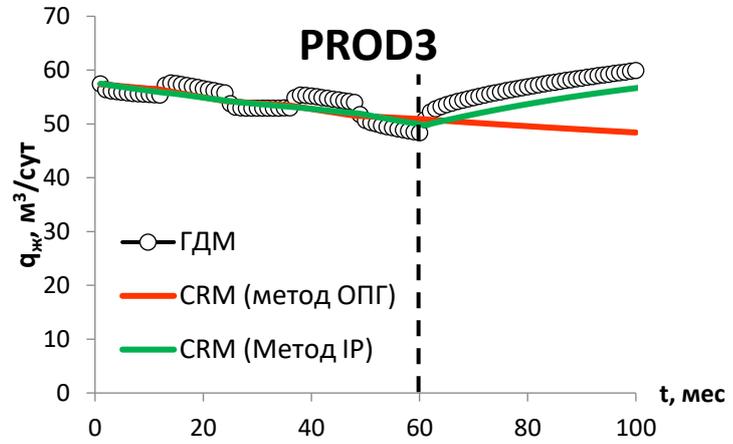
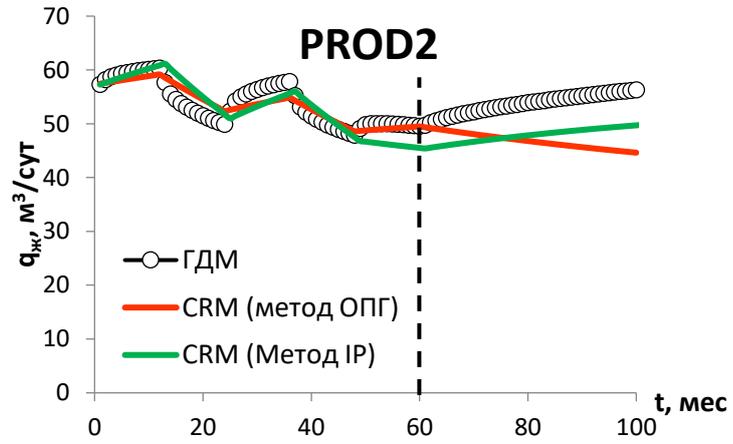
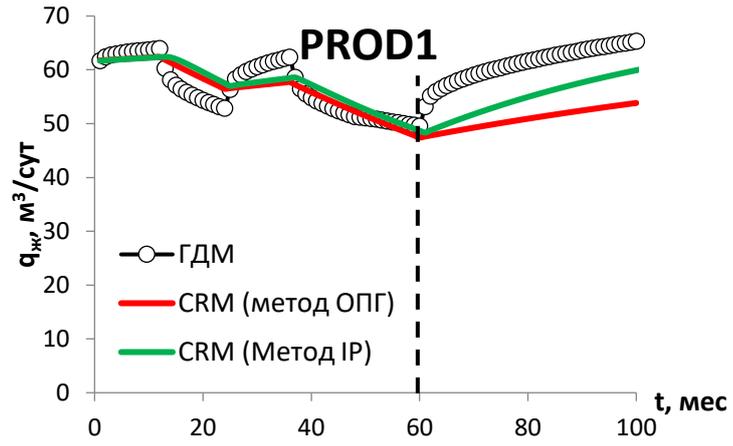


Рис. 7. Динамика приемистости скважины INJ2 в задаче 2.

На рисунке 8 представлено сопоставление динамики дебита жидкости по ГДМ и по CRM.



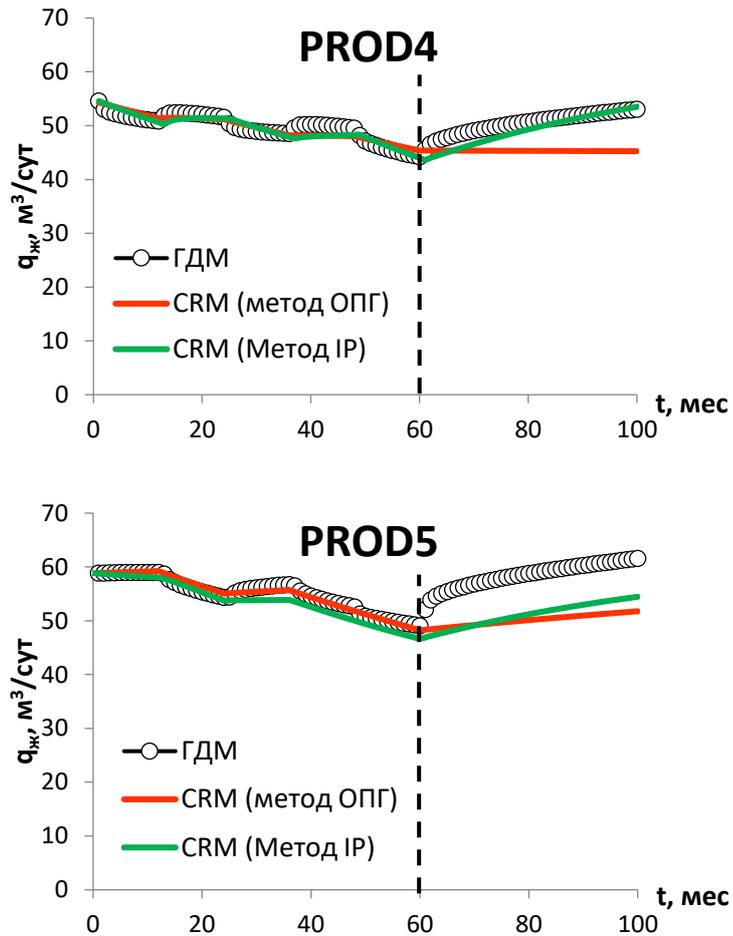


Рис. 8. Динамика дебита жидкости добывающих скважин для задачи 2.

Невязка по дебиту жидкости при настройке модели составила 7,92 % (и 9,12 % для другого метода) (таблица 2). Модельная динамика дебита удовлетворяет значениям, полученным на ГДМ. Модельные коэффициенты взаимовлияния, полученные методом внутренней точки, заметно отклоняются от эталонных (рисунок 9), более того, метод показал влияние скважины INJ4, вокруг которой задан барьер, на соседние ННС. Однако расчет на прогноз показал большую сходимость с фактом для метода внутренней точки, нежели для метода ОПГ. Это подтверждает тот факт, что для прогнозирования дебита с помощью CRM не всегда необходимо искать глобальный минимум целевой функции.

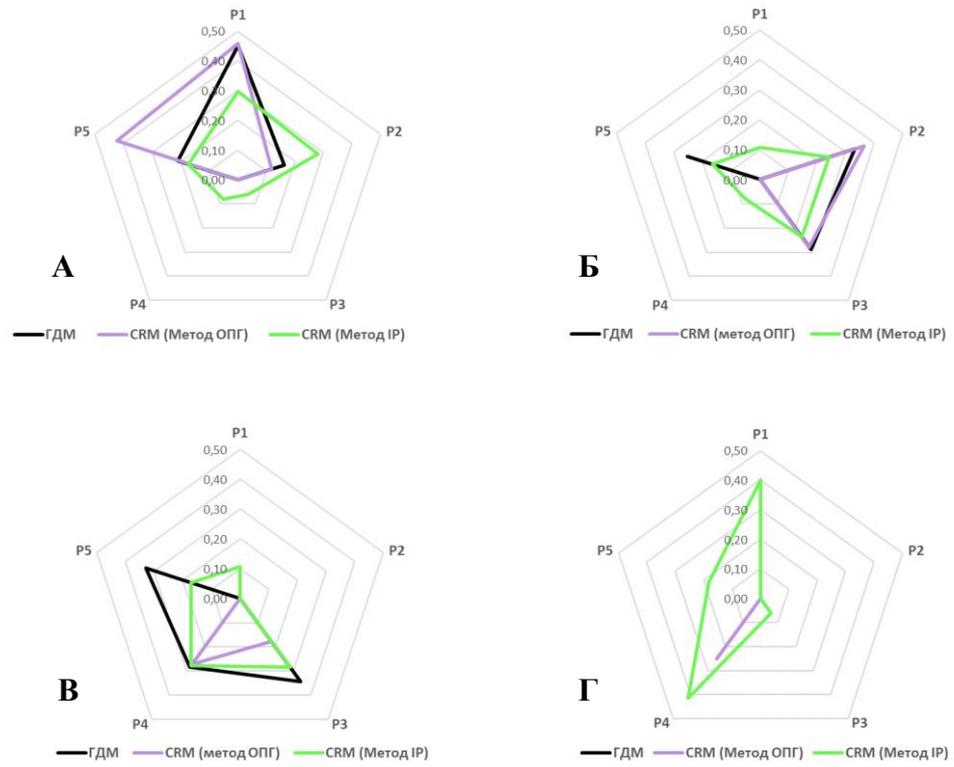


Рис. 9. Диаграммы коэффициентов взаимовлияния в задаче 2: А – для INJ1, Б – для INJ2, В – для INJ3, Г – для INJ4.

2.4 ГОРИЗОНТАЛЬНАЯ СКВАЖИНА

Тип скважины, ее геометрия и положение в пласте играют важную роль при попытке интерпретировать межскважинные связи и установить их связь с геологией коллектора. Для вертикальных и наклонно-направленных скважин параметры призабойной зоны оказывают большее влияние на связность, чем параметры коллектора в межскважинной зоне [5]. Хотя моделирование работы горизонтальной скважины слабо отличается от моделирования работы ННС, стоит учитывать то факт, что на связность прямо пропорционально влияет расстояние от нагнетательной скважины до горизонтальной.

Модель для задачи 3 идентична модели 2, только наклонно-направленная скважина PROD2 заменена на горизонтальную скважину. Рассмотрены два случая расположения горизонтальной скважины относительно других скважин: а – PROD2 направлена влево от скважин; б – PROD2 направлена к центру (в уплотнение). Расстановка скважин для задачи 3 показана на рисунке 10. Динамика приемистостей полностью соответствует динамике в задаче 2.

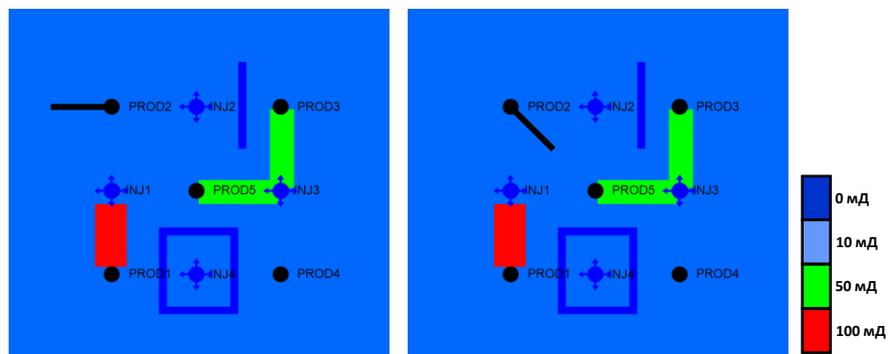


Рис. 10. Поле проницаемости и расстановка скважин для задачи 3а и 3б.

Логично, что появление горизонтальной скважины, а значит увеличение дренируемого объема, отразится на перераспределении потоков, причем в случае 3б нагнетательные скважины INJ1 и INJ2 должны оказывать существенное влияние на PROD2. Как видно из рисунка 11, после изменения вертикальной скважины PROD2 на горизонтальную, влияние нагнетательных скважин на неё заметно возросло.

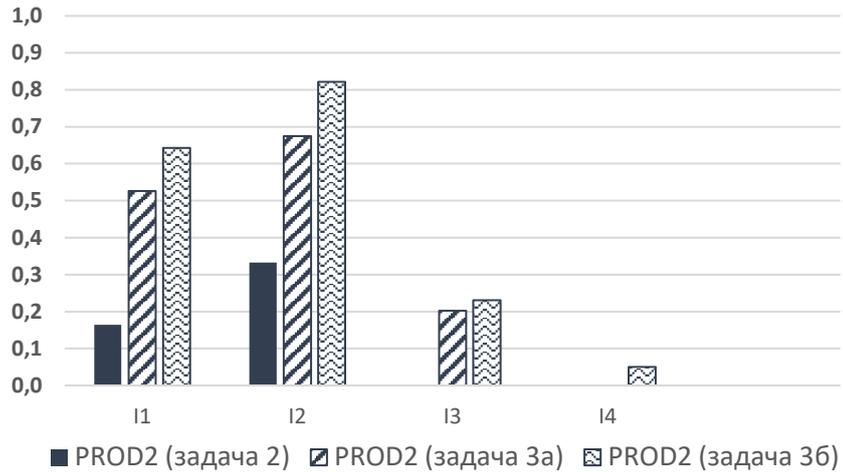


Рис. 11. Коэффициенты влияния на скважину PROD2 по методу линий тока.

Так как выбранное начальное приближение временной константы играет ключевую роль, в данной задаче τ задавалась индивидуально для каждой скважины. Однако модель не учитывает изменение параметра τ во времени, что сказывается на некачественном моделировании скачков дебита.

На рисунке 12 представлены коэффициенты взаимовлияния, полученные с помощью CRM (метод ОПГ). Видно, что замена наклонно-направленной скважины на горизонтальную приводит к увеличению влияния скважин нагнетательного фонда, что согласуется с результатами, полученными по ГДМ. Горизонтальная скважина PROD2 имеет больший радиус дренирования и темпы снижения пластового давления в ее области выше, чем в случае с ННС. Эти факторы приводят к появлению притока от «дальних» скважин, в данном случае от скважины INJ3. Увеличение гидродинамической связи для горизонтальной скважины в задаче 3б по сравнению с задачей 3а подтверждает тот факт, что коэффициент взаимовлияния между горизонтальной добывающей скважиной и нагнетательной будет тем больше, чем ближе нагнетательная к горизонтальной скважине.

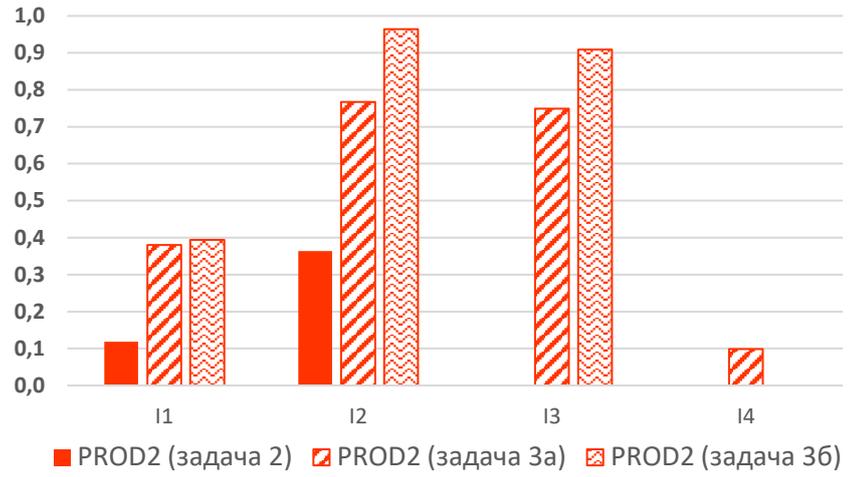
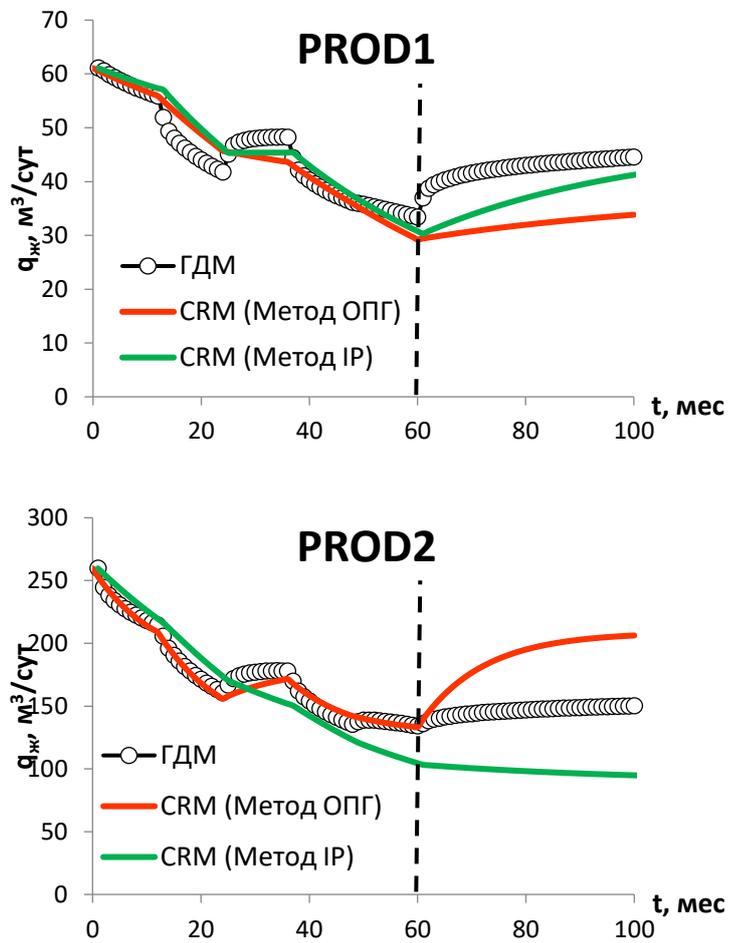


Рис. 12. Модельные коэффициенты влияния на скважину PROD2.



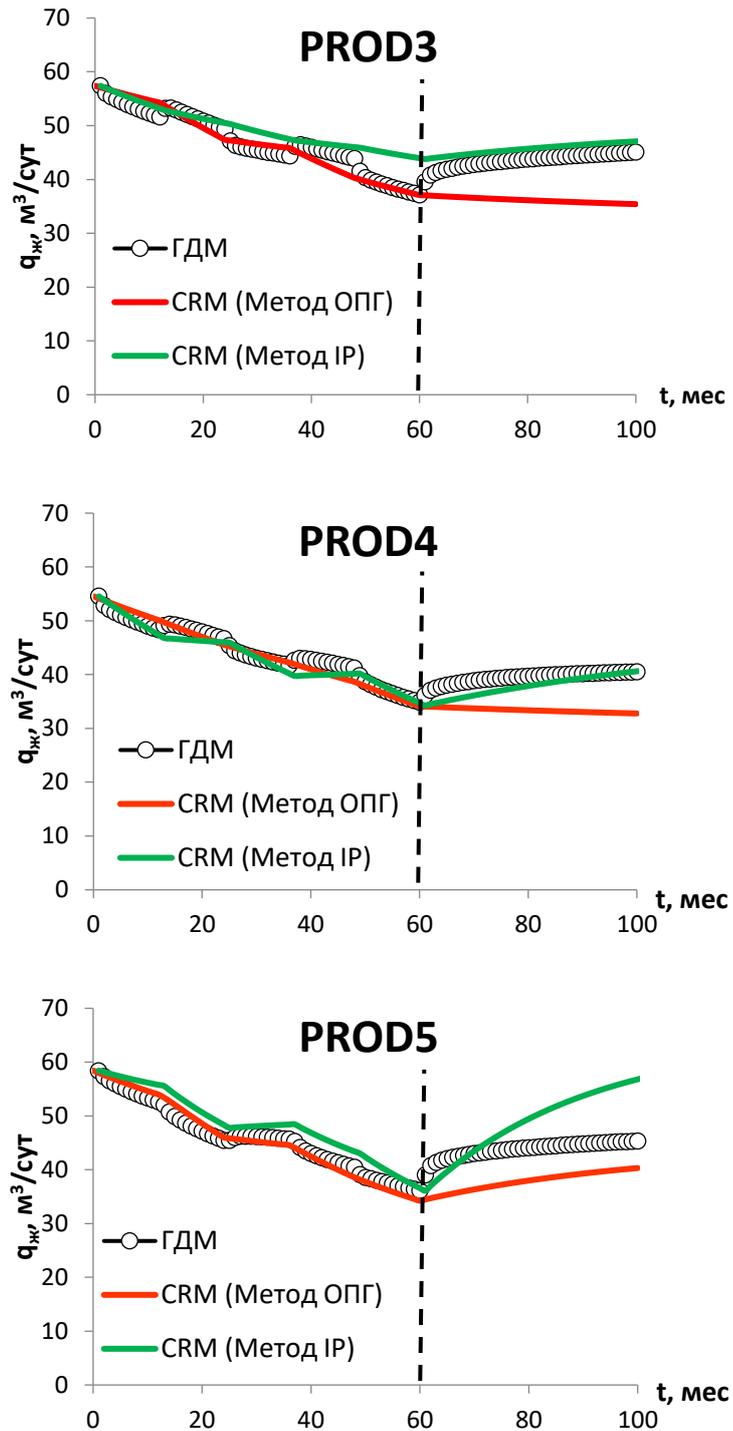


Рис. 13. Динамика дебита жидкости добывающих скважин для задачи За.

Тем не менее, удовлетворительные показатели обучения модели дают ошибочные прогнозы. В гидродинамической модели отклик на увеличение приемистости четко выражен, в то время как CRM-модель демонстрирует слабое изменение дебита (PROD1, PROD3, PROD4). Это может быть связано с резким изменением закачки скважин INJ1 и INJ3.

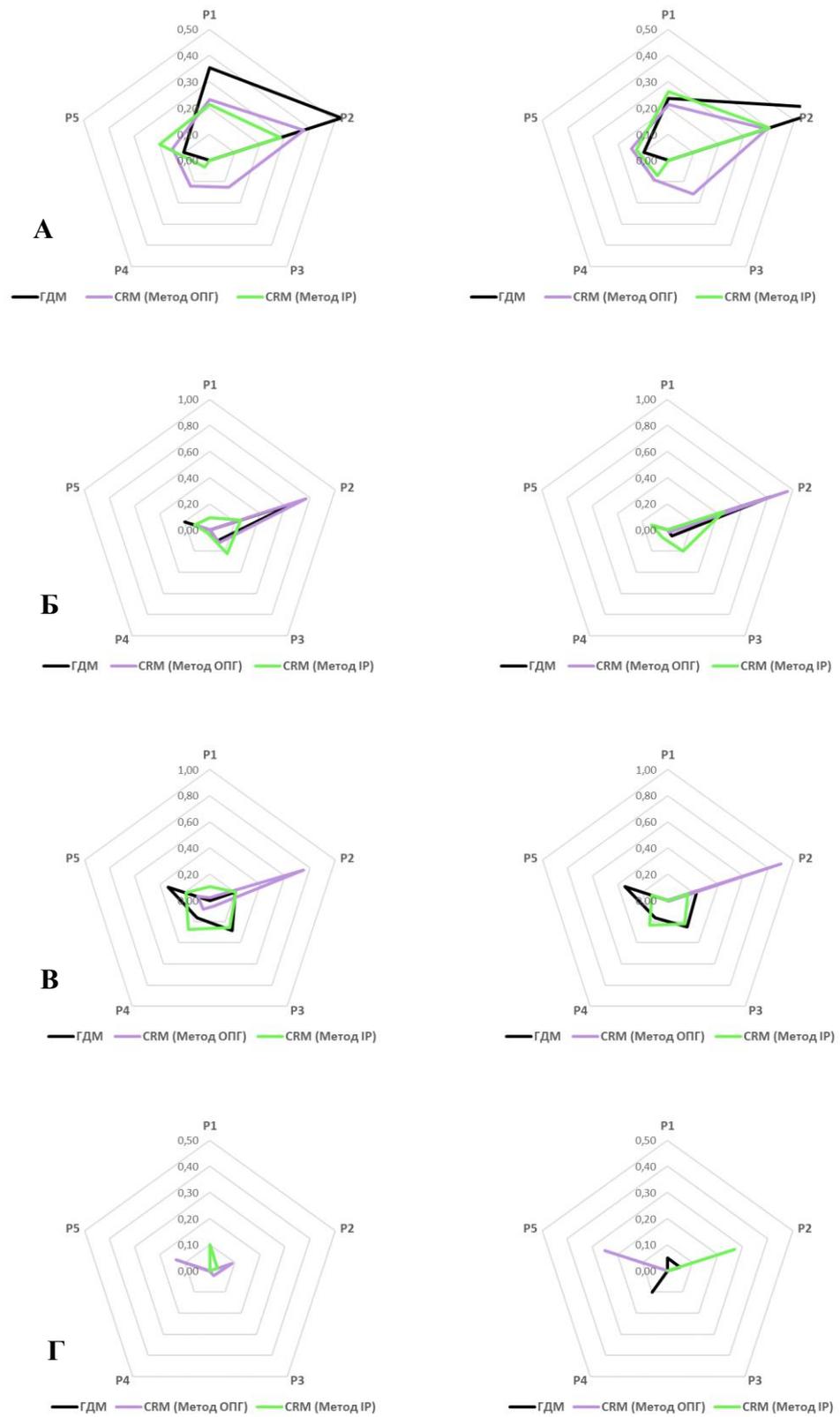


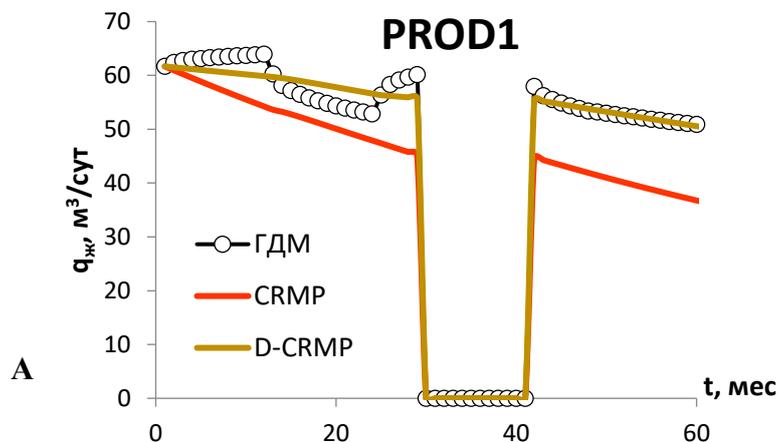
Рис. 14. Диаграммы коэффициентов взаимовлияния в задаче 3а (слева) и 3б (справа): А – для INJ1, Б – для INJ2, В – для INJ3, Г – для INJ4.

2.5 ОТКЛЮЧЕНИЕ ДОБЫВАЮЩЕЙ СКВАЖИНЫ

В задаче 4 имитировалась остановка одной из добывающих скважин, что является распространенным явлением для действующего месторождения. Постановка задачи аналогична задаче 2.

Как было отмечено ранее, модель CRMP в своем первоначальном виде не способна качественно воспроизвести динамику добывающей скважины, которая какое-то время не эксплуатировалась. Также следует отметить, что остановка скважины вне зависимости от ее назначения может оказывать влияние на изменение межскважинных связей.

В данном разделе рассматривалась не столько прогнозная способность аналитической модели, сколько ее тенденция к качественному воспроизведению динамики дебита жидкости. В качестве альтернативы CRMP использовалась динамическая модель D-CRMP (1.8). На рисунке 15(A) заметно растущее несоответствие результатов модели CRMP для скважины PROD1. В ходе решения оптимизационной задачи модель пытается смоделировать нулевой дебит, занижая коэффициенты взаимовлияния, что является заведомо ошибочным действием. Динамическая модель учитывает остановку скважины и изменение межскважинных связей на время простоя.



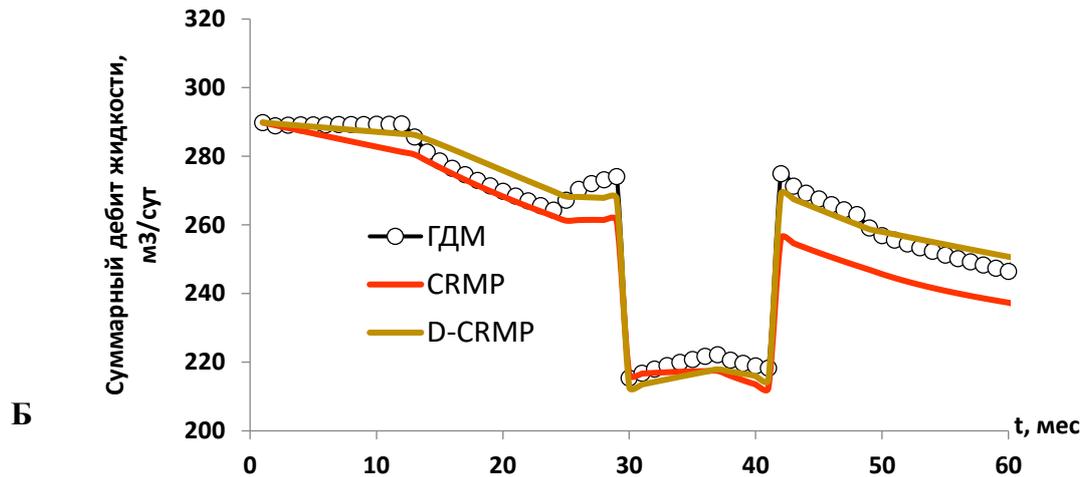


Рис. 15. Модельная динамика дебита жидкости: А – для скважины PROD1, Б – для всей модели.

Суммарная невязка в ходе настройки модели, составляет 12,89 % для CRMP и 7,1 % для D-CRMP (таблица 3).

Таблица 3

Невязка по дебиту жидкости на период обучения модели для задачи 4, %

| Имя скважины | CRMP | D-CRMP |
|--------------|-------|--------|
| PROD1 | 7,53 | 1,43 |
| PROD2 | 1,95 | 2,00 |
| PROD3 | 1,67 | 1,61 |
| PROD4 | 1,46 | 1,39 |
| PROD5 | 0,29 | 0,67 |
| Сумма | 12,89 | 7,10 |

Таким образом, в случаях, когда известно, что часть скважин добывающего фонда находилась в бездействии, аналитическая модель CRMP не применима и требуется использование дополнительных модификаций, например динамической модели D-CRMP.

ГЛАВА 3. ОПТИМИЗАЦИЯ ЗАВОДНЕНИЯ

Поздние стадии разработки месторождения характеризуются падением темпов добычи и, как следствие, активным введением мероприятий, направленных на поддержание дебитов по скважинам и поддержание пластового давления. Задача анализа и управления системой заводнения имеет высокую важность, так как грамотная оценка эффективности работы нагнетательного фонда, определение непроизводительных объемов закачки и расчет текущей компенсации по элементам заводнения и по отдельным добывающим скважинам способствуют установлению оптимальных режимов работы, направленных на максимальное поддержание темпов падения.

Для управления заводнением отличным инструментом могут служить CRM-модели. Представление о межскважинных связях, полученное в ходе настройки аналитической модели, позволяет судить о наиболее вероятном распределении закачки для конкретной нагнетательной скважины, и, как было отмечено ранее в разделе 1.2, позволяет выявлять скважины с непроизводительной закачкой.

Важным параметром для анализа системы ППД является компенсация по элементам заводнения в пластовых условиях. Компенсация рассчитывается как отношение закачиваемой жидкости в элемент заводнения к добываемой жидкости из элемента заводнения. Элементы заводнения, как правило, строятся таким образом, чтобы нагнетательные скважины были расположены в углах элемента. Для расчета объема закачиваемой жидкости необходимо знать доли закачки в элемент для каждой нагнетательной скважины. Традиционно задача решается геометрическим методом: коэффициент влияния рассчитывается пропорционально углам притоков к центрам элементов заводнения.

Для подбора оптимальных значений закачки также формулируется целевая функция, которая представляет собой зависимость накопленной добычи нефти за период прогноза от приемистостей нагнетательных скважин:

$$F = \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^{NP} q_j(t_n) \Delta t_n , \quad (3.1)$$

где Δt_n – количество дней на n -м шаге прогноза.

После настройки (обучения) CRMP-модели нам известны временная константа τ и коэффициенты взаимовлияния f_{ij} . Теперь необходимо найти максимум целевой функции, варьируя значения приемистостей. В качестве ограничений в работе [21] предлагают следующее:

1. Суммарная закачка по всем скважинам или по группам скважин не должна превышать заданное значение, например, среднее значение за последние полгода.
2. Минимальная закачка по скважине не ниже значения, при котором возможно замерзание воды.
3. Максимальная закачка по скважине не выше значения, при котором происходит автоГРП.

Для исследования применимости CRMP-модели к управлению заводнением выбраны задачи с горизонтальными скважинами (3а и 3б). Было решено ограничить суммарную закачку значением 400 м³/сут, закачку для одной скважины – значением 300 м³/сут и не задавать ограничение по минимальной закачке для одной скважины. Такая постановка допускает, что некоторые из нагнетательных скважин могут быть остановлены. Результаты оптимизации можно видеть на рисунке 16. В случае, когда ГС направлена в сторону от скважин, предлагается уменьшить закачку на INJ1 с 150 до 100 м³/сут и увеличить на INJ3 с 150 до 300 м³/сут; в другой постановке, когда ГС направлена в уплотнение, предлагается уменьшить закачку на INJ3 с 150 до 100 м³/сут и увеличить на INJ2 с 50 до 300 м³/сут. В обоих случаях скважину INJ4 предлагается остановить. Низкие коэффициенты взаимовлияния позволяют судить о непроизводительной закачке, что согласуется с фактом – наличием барьера вокруг INJ4.

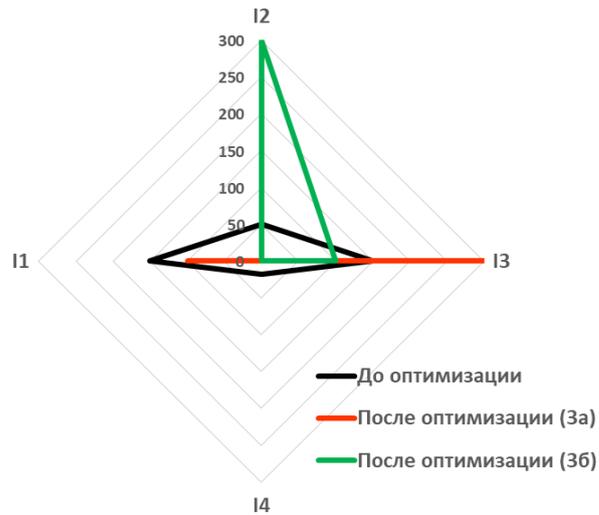


Рис. 16. Распределение приемистостей до оптимизации и после.

В ходе решения задачи оптимизации удалось увеличить накопленную добычу жидкости на 15 тыс. м³ и 32 тыс. м³ для задач 3а и 3б соответственно (рисунок 17). Это соответствует увеличению накопленной добычи нефти на 4,5 тыс. м³ и 9,6 тыс. м³ при обводненности 70%.

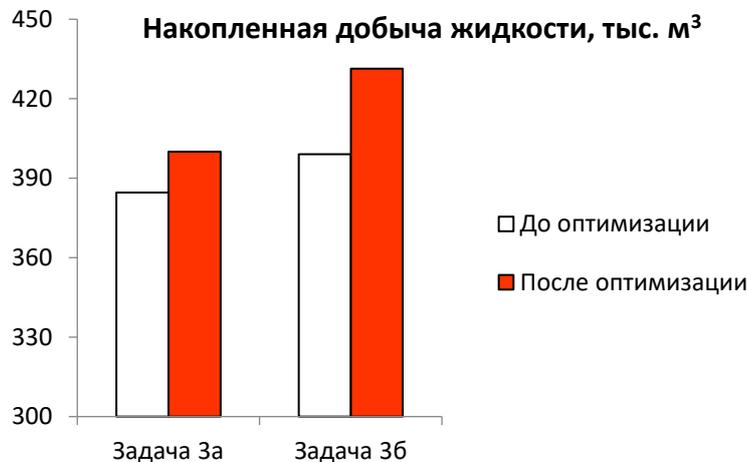


Рис. 17. Накопленная добыча жидкости для задач 3а и 3б.

Стоит отметить, что увеличение накопленной добычи жидкости не является приоритетным показателем при управлении заводнением. Более важные аспекты, на которые стоит обратить внимание в первую очередь – реакция дебита нефти и обводненности скважины на изменения закачки. Увеличение дебита жидкости отдельной скважины может являться следствием ее значительного обводнения, а значит снижения дебита нефти.

Эффективность заводнения можно повысить, если допустить остановку некоторых добывающих скважин или частичное закрытие перфораций. Скважины с высокой обводненностью (более 90 %) могут оказывать влияние на сложившуюся картину потоков в пласте. Остановка некоторых скважин приведет к перераспределению потоков, в результате чего добываемые ранее объемы жидкости будут способствовать притоку к другим скважинам. Применяемая для такой задачи CRM-модель должна быть динамической, то есть учитывать изменение коэффициентов взаимовлияния вследствие остановки скважин. Основой для такого подхода может стать уравнение 1.8.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основной целью этого исследования была оценка применимости модели CRMP к задаче управления заводнением, включая использование предложенной модели в коллекторах как с наклонно – направленными, так и с горизонтальными скважинами. Сопоставление результатов работы модели CRMP с результатами расчетов на гидродинамическом симуляторе показало пригодность модели к воспроизведению динамики работы добывающих скважин. Адекватность настройки модели подтверждается удовлетворительными значениями суммарной невязки между дебитами ГДМ и дебитами CRMP. При решении прямой задачи установлено, что использование горизонтальной скважины вместо вертикальной скважины усиливает гидродинамическую связь, особенно с ближними нагнетательными скважинами, а также увеличивает радиус влияния для горизонтальной скважины. Показано, что при решении задачи с остановкой добывающей скважины модель CRMP работает некорректно и требует внесения дополнений.

Исследована применимость CRMP к задаче оптимизации управления заводнением: для синтетической модели получен положительный результат – увеличение накопленной добычи жидкости на 6% путем распределения закачки.

Также в работе рассмотрено влияние различных численных процедур на эффективность решения. Работоспособность модели CRMP во многом зависит от качества решения оптимизационной задачи. Установлено, что на настройку модели при использовании метода обобщенного приведенного градиента существенно влияет начальное приближение для параметра τ . Анализ настраиваемых параметров показал, что удовлетворительная настройка модели на этапе обучения не может уверенно гарантировать точность прогноза. Это связано с допущением о постоянстве настраиваемых параметров, которые в реальности чувствительны к резким изменениям закачки.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- 1) Audun Daniel Dørum, Stensgaard. Estimating the Value of Information Using Closed Loop Reservoir Management of Capacitance Resistive Models // Petroleum Geoscience and Engineering. 2015, June 2016, 99 p.
- 2) Fraguio M., Lacivita A., Valle J., Marzano M. Integrating a Data Driven Model into a Multilayer Pattern Waterflood Simulator. In: SPE Latin American and Caribbean Mature Fields Symposium. Society of Petroleum Engineers, 2017.
- 3) Gentil, P.H. The Use of Multilinear Regression Models in Patterned Waterfloods: Physical Meaning of the Regression Coefficients. Master's Thesis, University of Texas, Austin, TX, USA, 2005.
- 4) Holanda R. W., Gildin E., Jensen L. Jerry. Improved Waterflood Analysis Using the Capacitance-Resistance Model Within a Control Systems Framework. In: SPE Latin American and Caribbean Petroleum Engineering Conference. Society of Petroleum Engineers, 2015.
- 5) Holanda R.W., Gildin E., Jensen J.L., Lake L.W., Kabir C. S. 2018. «A State-of-the-Art Literature Review on Capacitance Resistance Models for Reservoir Characterization and Performance Forecasting». Energies, 2018.
- 6) Jong S. Kim, Larry W. Lake. Integrated Capacitance-Resistance model for Characterizing Waterflooded Reservoirs // June 2012.
- 7) Moreno, G.A. Multilayer capacitance-resistance model with dynamic connectivities // Journal of Petroleum Science and Engineering. 2013, 109, 298–307.
- 8) Salehian M. Development of a Capacitance-Resistive Model Accounting for Shut-in Wells: Petroleum and Natural Gas Engineering Programme, June 2018.
- 9) Salehian M., Çınar M. Reservoir characterization using dynamic capacitance–resistance model with application to shut-in and horizontal wells // Journal of Petroleum Exploration and Production Technology. 2019. 9:2811–2830 pp.

- 10) Sayarpour, M. Development and Application of Capacitance-Resistive Models to Water/CO₂ Floods. Ph.D. Dissertation, University of Texas, Austin, TX, USA, 2008.
- 11) Soroush, M. Interwell Connectivity Evaluation Using Injection and Production Fluctuation Data: Ph.D. Dissertation, University of Calgary, Calgary, AB, Canada, 2013.
- 12) Suleiman A. Addressing capacitance-resistance modeling limitations and introducing a new practical formulation: Energy and Mineral Engineering: Master of Science, 2015, 96 p.
- 13) Weber D., Edgar T.F., Lake W. Lake, Lasdon L.S., Kawas S., Sayarpour M. Improvements in capacitance–resistive modeling and optimization of large scale reservoirs. In: SPE western regional meeting. Society of Petroleum Engineers, 2009.
- 14) Yoursefi S. H., Rashidi F., Sharifi M., Soroush M. On Determination of Interwell Connectivity Under Immiscible Gas Injection Process: Modified Capacitance-Resistance Model // The Canadian Journal of Chemical Engineering. 2018. Volume 97 (4).
- 15) Абидов Д. Г., Камартдинов М. Р. Метод материального баланса, как первичный инструмент оценки показателей разработки участка месторождения при заводнении // Известия Томского политехнического университета. 2013. Т. 322. С. 91 – 96.
- 16) Афанаскин И. В., Крыганов П. В., Глушаков А. А., Ялов П. В. Использование CRM-моделей интерференции скважин для оценки фильтрационно-емкостных свойств пласта по данным разработки. Успехи кибернетики. 2020;1(1):17 – 27.
- 17) Гольдштейн А. Л. Оптимизация в среде MATLAB: учеб. пособие / А. Л. Гольдштейн. – Пермь: Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2015. – 192 с.
- 18) Нестеров Ю. Е. Методы выпуклой оптимизации. Москва: Издательство МЦНМО, 2010. 281 с.

19) Оленчиков Д., Посвянский Д. Применение CRM-подобных моделей для экспресс прогнозирования и оптимизации разработки месторождений: SPE, 22 – 24 октября 2019, Москва, Россия.

20) Поспелова Т. А., Зеленин Д. В., Ручкин А. А., Бекман А. Д. Применение CRM модели для анализа эффективности системы заводнения; Сетевое научное издание «Нефтяная провинция», №1 (21) 2020.

21) Сопровождение разработки нефтяных месторождений с использованием моделей CRM: монография / С. В. Степанов, А. Д. Бекман, А. А. Ручкин, Т. А. Поспелова. – Тюмень: ИПЦ «Экспресс», 2021. 300 с.

22) Степанов С. В. Проблематика оценки взаимовлияния добывающих и нагнетательных скважин на основе математического моделирования / С.В. Степанов, С.В. Соколов, А.А. Ручкин, А.В. Степанов, А.В. Князев, А.В. Корытов // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2018. Том 4. № 3. С. 146 – 164.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ВНУТРЕННЕЙ ТОЧКИ

Идея метода внутренней точки заключается в сведении задачи на условный минимум к решению последовательности задач поиска минимума вспомогательной функции

$$L(x, r) = F(x) + P(x, r),$$

$$P(x, r) = -r \sum_{j=1}^m \frac{1}{g_j(x)},$$

где $P(x, r)$ - барьерная функция, r - барьерный параметр, $g_j(x) > 0$ - функция ограничений неравенств, m - количество ограничений.

При решении задачи используется именно обратный барьер, а не логарифмический, так как его скорость сходимости выше. Для нашей задачи с учетом ограничений барьерная функция примет вид:

$$P(x, r) = -r \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} + \frac{1}{f_4} + \frac{1}{1-f_1} + \frac{1}{1-f_2} + \frac{1}{1-f_3} + \frac{1}{1-f_4} \right)$$

$$L = \sum_{n=1}^N (\tilde{q}(t_n) - q(t_n) + P(x, r))^2$$

$$L = \sum_{n=1}^N \left(\tilde{q}(t_n) - q(t_{n-1})e^{-\frac{1}{\tau}} - \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}}\right) (f_1 I_1(t_n) + f_2 I_2(t_n) + f_3 I_3(t_n) + f_4 I_4(t_n)) - r \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} + \frac{1}{f_4} + \frac{1}{1-f_1} + \frac{1}{1-f_2} + \frac{1}{1-f_3} + \frac{1}{1-f_4} \right) \right)^2$$

$$\frac{\delta L}{\delta \tau} = 2 \frac{e^{-\frac{1}{\tau}}}{\tau^2} \sum_{n=1}^N (\tilde{q}_n - q_n + P(x, r)) \left(f_1 I_{1n} + f_2 I_{2n} + f_3 I_{3n} + f_4 I_{4n} - q_{n-1} + r e^{\frac{1}{\tau}} \right)$$

*для удобства $k = 1, 2, 3, 4$; $m = 1, 2, 3, 4$

$$\frac{\delta L}{\delta f_k} = 2 \sum_{n=1}^N (\tilde{q}_n - q_n + P(x, r)) \left(\frac{r}{f_k^2} - \frac{r}{(1-f_k)^2} - \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}}\right) I_{kn} \right)$$

**Гессиан целевой функции симметричен

$$\frac{\delta^2 L}{\delta \tau^2} = \frac{2}{\tau^4} \sum_{n=1}^N \left[e^{-\frac{1}{\tau}} (1 - 2\tau) (\tilde{q}_n - q_n + P(x, r)) \left(f_1 I_{1n} + f_2 I_{2n} + f_3 I_{3n} + f_4 I_{4n} - q_{n-1} + r e^{\frac{1}{\tau}} \right) \right. \\ \left. + e^{-\frac{2}{\tau}} \left(f_1 I_{1n} + f_2 I_{2n} + f_3 I_{3n} + f_4 I_{4n} - q_{n-1} + r e^{\frac{1}{\tau}} \right)^2 - r (\tilde{q}_n - q_n + P(x, r)) \right]$$

$$\frac{\delta^2 L}{\delta \tau \delta f_k} = 2 \frac{e^{-\frac{1}{\tau}}}{\tau^2} \sum_{n=1}^N \left[\left(\frac{r}{f_k^2} - \frac{r}{(1-f_k)^2} - \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}} \right) I_{kn} \right) \left(f_1 I_{1n} + f_2 I_{2n} + f_3 I_{3n} + f_4 I_{4n} - q_{n-1} \right. \right. \\ \left. \left. + r e^{\frac{1}{\tau}} \right) + (\tilde{q}_n - q_n + P(x, r)) I_{kn} \right]$$

$$\frac{\delta^2 L}{\delta f_k^2} = 2 \sum_{n=1}^N \left[\left(\frac{r}{f_k^2} - \frac{r}{(1-f_k)^2} - \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}} \right) I_{kn} \right)^2 + (\tilde{q}_n - q_n + P(x, r)) \left(-\frac{2r}{f_k^3} - \frac{2r}{(1-f_k)^3} \right) \right]$$

*** для случаев $k \neq m$

$$\frac{\delta^2 L}{\delta f_k \delta f_m} = 2 \sum_{n=1}^N \left(\frac{r}{f_k^2} - \frac{r}{(1-f_k)^2} - \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}} \right) I_{kn} \right) \left(\frac{r}{f_m^2} - \frac{r}{(1-f_m)^2} - \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}} \right) I_{mn} \right)$$

Минимум вспомогательной функции предлагается искать методом Ньютона:

$$\begin{pmatrix} \tau \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix}^{[j+1]} = \begin{pmatrix} \tau \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix}^{[j]} - H^{-1}(L(\tau, f_1, f_2, f_3, f_4)^{[j]}) * \nabla L(\tau, f_1, f_2, f_3, f_4)^{[j]}$$

ПРОГРАММНЫЙ КОД

```

#include <stdio.h>

#include <math.h>

#include <iostream>

#include <fstream>

#define A 60 // Изменить при изменении размера массива данных

using namespace std;

int main()
{
    setlocale(LC_ALL, "Russian");

    double q_hist[A], I1[A], I2[A], I3[A], I4[A], P[A], t[A];

    double f1, f2, f3, f4, tau;

    double f1_new, f2_new, f3_new, f4_new, tau_new;

    int n;

    double q[A];

    double r; // Множитель для метода внутренней точки

    double g; // Слагаемое из ограничений для метода внутренней
    точки

    double F; // Целевая функция

    ifstream file("vol.data"); // Считываем исторические значения
    из data файла

    double** x;

    x = new double* [A];

    for (int a = 0; a < A; a++)

```

```
        x[a] = new double[7]; // каждая строчка становится  
массивом из 7 значений
```

```
    for (int a = 0; a < A; a++)  
        for (int j = 0; j < 7; j++)  
            file >> x[a][j];
```

```
    for (int a = 0; a < A; a++) {  
        t[a] = x[a][0];  
        q_hist[a] = x[a][1];  
        I1[a] = x[a][2];  
        I2[a] = x[a][3];  
        I3[a] = x[a][4];  
        I4[a] = x[a][5];  
        P[a] = x[a][6];  
    }
```

```
    file.close();
```

```
    // Настраиваемые параметры для CRM
```

```
    f1 = 0.1; f2 = 0.1; f3 = 0.1; f4 = 0.1;
```

```
    tau = 60;
```

```
    q[0] = q_hist[0];
```

```
    r = 0.1;
```

```
    do { // С этого места начинается новая итерация, сюда  
возвращает условие выхода
```

```
        // Нахождение градиента для PROD
```

```

double dF_dt, dF_df1, dF_df2, dF_df3, dF_df4;

double S0 = 0; double S1 = 0; double S2 = 0; double S3 =
0; double S4 = 0;

n = 1; F = 0;

g = r * (1 / tau + 1 / f1 + 1 / f2 + 1 / f3 + 1 / f4 + 1 /
(1 - f1) + 1 / (1 - f2) + 1 / (1 - f3) + 1 / (1 - f4));

do { //

    S0 += (f1 * I1[n] + f2 * I2[n] + f3 * I3[n] + f4 *
I4[n] - q_hist[n - 1] + r * exp(1 / tau)) * (q_hist[n] - q_hist[n - 1]
* exp(-(1 / tau)) - (1 - exp(-(1 / tau))) * (f1 * I1[n] + f2 * I2[n] +
f3 * I3[n] + f4 * I4[n]) - g);

    S1 += (r / (f1 * f1) - r / pow((1 - f1), 2) - (1 -
exp(-(1 / tau))) * I1[n]) * (q_hist[n] - q_hist[n - 1] * exp(-(1 /
tau)) - (1 - exp(-(1 / tau))) * (f1 * I1[n] + f2 * I2[n] + f3 * I3[n] +
f4 * I4[n]) - g);

    S2 += (r / (f2 * f2) - r / pow((1 - f2), 2) - (1 -
exp(-(1 / tau))) * I2[n]) * (q_hist[n] - q_hist[n - 1] * exp(-(1 /
tau)) - (1 - exp(-(1 / tau))) * (f1 * I1[n] + f2 * I2[n] + f3 * I3[n] +
f4 * I4[n]) - g);

    S3 += (r / (f3 * f3) - r / pow((1 - f3), 2) - (1 -
exp(-(1 / tau))) * I3[n]) * (q_hist[n] - q_hist[n - 1] * exp(-(1 /
tau)) - (1 - exp(-(1 / tau))) * (f1 * I1[n] + f2 * I2[n] + f3 * I3[n] +
f4 * I4[n]) - g);

    S4 += (r / (f4 * f4) - r / pow((1 - f4), 2) - (1 -
exp(-(1 / tau))) * I4[n]) * (q_hist[n] - q_hist[n - 1] * exp(-(1 /
tau)) - (1 - exp(-(1 / tau))) * (f1 * I1[n] + f2 * I2[n] + f3 * I3[n] +
f4 * I4[n]) - g);

    n++;

} while (n < A);

dF_dt = 2 * exp(-1 / tau) * S0 / (tau * tau);

```

```

dF_df1 = 2 * S1;

dF_df2 = 2 * S2;

dF_df3 = 2 * S3;

dF_df4 = 2 * S4;

// Нахождение матрицы Гессе для PROD

double H[5][5], inv_H[5][5], S[5][5], det_H, M[5][5];

n = 1;

for (int i = 0; i < 5; i++) {
    for (int j = 0; j < 5; j++) {
        S[i][j] = 0;
    }
}

do {
    S[0][0] += exp(-1 / tau) * (1 - 2 * tau) * (q_hist[n]
- q_hist[n - 1] * exp(-(1 / tau)) - (1 - exp(-(1 / tau)))) * (f1 * I1[n]
+ f2 * I2[n] + f3 * I3[n] + f4 * I4[n]) - g) * (f1 * I1[n] + f2 * I2[n]
+ f3 * I3[n] + f4 * I4[n] - q_hist[n - 1] + r * exp(1 / tau)) + \
        exp(-2 / tau) * pow((f1 * I1[n] + f2 * I2[n] +
f3 * I3[n] + f4 * I4[n] - q_hist[n - 1] + r * exp(1 / tau)), 2) - r *
(q_hist[n] - q_hist[n - 1] * exp(-(1 / tau)) - (1 - exp(-(1 / tau)))) *
(f1 * I1[n] + f2 * I2[n] + f3 * I3[n] + f4 * I4[n]) - g);

    S[0][1] += (r / (f1 * f1) - r / pow((1 - f1), 2) - (1
- exp(-(1 / tau)))) * I1[n]) * (f1 * I1[n] + f2 * I2[n] + f3 * I3[n] +
f4 * I4[n] - q_hist[n - 1] + r * exp(1 / tau)) + I1[n] * (q_hist[n] -
q_hist[n - 1] * exp(-(1 / tau)) - (1 - exp(-(1 / tau)))) * (f1 * I1[n] +
f2 * I2[n] + f3 * I3[n] + f4 * I4[n]) - g);

```

$$S[0][2] += (r / (f2 * f2) - r / \text{pow}((1 - f2), 2) - (1 - \exp(-(1 / \text{tau}))) * I2[n]) * (f1 * I1[n] + f2 * I2[n] + f3 * I3[n] + f4 * I4[n] - q_hist[n - 1] + r * \exp(1 / \text{tau})) + I2[n] * (q_hist[n] - q_hist[n - 1] * \exp(-(1 / \text{tau})) - (1 - \exp(-(1 / \text{tau}))) * (f1 * I1[n] + f2 * I2[n] + f3 * I3[n] + f4 * I4[n])) - g);$$

$$S[0][3] += (r / (f3 * f3) - r / \text{pow}((1 - f3), 2) - (1 - \exp(-(1 / \text{tau}))) * I3[n]) * (f1 * I1[n] + f2 * I2[n] + f3 * I3[n] + f4 * I4[n] - q_hist[n - 1] + r * \exp(1 / \text{tau})) + I3[n] * (q_hist[n] - q_hist[n - 1] * \exp(-(1 / \text{tau})) - (1 - \exp(-(1 / \text{tau}))) * (f1 * I1[n] + f2 * I2[n] + f3 * I3[n] + f4 * I4[n])) - g);$$

$$S[0][4] += (r / (f4 * f4) - r / \text{pow}((1 - f4), 2) - (1 - \exp(-(1 / \text{tau}))) * I4[n]) * (f1 * I1[n] + f2 * I2[n] + f3 * I3[n] + f4 * I4[n] - q_hist[n - 1] + r * \exp(1 / \text{tau})) + I4[n] * (q_hist[n] - q_hist[n - 1] * \exp(-(1 / \text{tau})) - (1 - \exp(-(1 / \text{tau}))) * (f1 * I1[n] + f2 * I2[n] + f3 * I3[n] + f4 * I4[n])) - g);$$

$$S[1][1] += \text{pow}((r / (f1 * f1) - r / \text{pow}((1 - f1), 2) - (1 - \exp(-(1 / \text{tau}))) * I1[n]), 2) + (q_hist[n] - q_hist[n - 1] * \exp(-(1 / \text{tau})) - (1 - \exp(-(1 / \text{tau}))) * (f1 * I1[n] + f2 * I2[n] + f3 * I3[n] + f4 * I4[n]) - g) * (-2 * r / \text{pow}(f1, 3) - 2 * r / \text{pow}((1 - f1), 3)));$$

$$S[2][2] += \text{pow}((r / (f2 * f2) - r / \text{pow}((1 - f2), 2) - (1 - \exp(-(1 / \text{tau}))) * I2[n]), 2) + (q_hist[n] - q_hist[n - 1] * \exp(-(1 / \text{tau})) - (1 - \exp(-(1 / \text{tau}))) * (f1 * I1[n] + f2 * I2[n] + f3 * I3[n] + f4 * I4[n]) - g) * (-2 * r / \text{pow}(f2, 3) - 2 * r / \text{pow}((1 - f2), 3)));$$

$$S[3][3] += \text{pow}((r / (f3 * f3) - r / \text{pow}((1 - f3), 2) - (1 - \exp(-(1 / \text{tau}))) * I3[n]), 2) + (q_hist[n] - q_hist[n - 1] * \exp(-(1 / \text{tau})) - (1 - \exp(-(1 / \text{tau}))) * (f1 * I1[n] + f2 * I2[n] + f3 * I3[n] + f4 * I4[n]) - g) * (-2 * r / \text{pow}(f3, 3) - 2 * r / \text{pow}((1 - f3), 3)));$$

$$S[4][4] += \text{pow}((r / (f4 * f4) - r / \text{pow}((1 - f4), 2) - (1 - \exp(-(1 / \text{tau}))) * I4[n]), 2) + (q_hist[n] - q_hist[n - 1] * \exp(-$$

```
(1 / tau)) - (1 - exp(-(1 / tau))) * (f1 * I1[n] + f2 * I2[n] + f3 *
I3[n] + f4 * I4[n]) - g) * (-2 * r / pow(f4, 3) - 2 * r / pow((1 - f4),
3));
```

```
S[1][2] += (r / (f1 * f1) - r / pow((1 - f1), 2) - (1
- exp(-(1 / tau))) * I1[n]) * (r / (f2 * f2) - r / pow((1 - f2), 2) -
(1 - exp(-(1 / tau))) * I2[n]));
```

```
S[1][3] += (r / (f1 * f1) - r / pow((1 - f1), 2) - (1
- exp(-(1 / tau))) * I1[n]) * (r / (f3 * f3) - r / pow((1 - f3), 2) -
(1 - exp(-(1 / tau))) * I3[n]));
```

```
S[1][4] += (r / (f1 * f1) - r / pow((1 - f1), 2) - (1
- exp(-(1 / tau))) * I1[n]) * (r / (f4 * f4) - r / pow((1 - f4), 2) -
(1 - exp(-(1 / tau))) * I4[n]));
```

```
S[2][3] += (r / (f2 * f2) - r / pow((1 - f2), 2) - (1
- exp(-(1 / tau))) * I2[n]) * (r / (f3 * f3) - r / pow((1 - f3), 2) -
(1 - exp(-(1 / tau))) * I3[n]));
```

```
S[2][4] += (r / (f2 * f2) - r / pow((1 - f2), 2) - (1
- exp(-(1 / tau))) * I2[n]) * (r / (f4 * f4) - r / pow((1 - f4), 2) -
(1 - exp(-(1 / tau))) * I4[n]));
```

```
S[3][4] += (r / (f3 * f3) - r / pow((1 - f3), 2) - (1
- exp(-(1 / tau))) * I3[n]) * (r / (f4 * f4) - r / pow((1 - f4), 2) -
(1 - exp(-(1 / tau))) * I4[n]));
```

```
n++;
```

```
} while (n < A);
```

```
H[0][0] = 2 * S[0][0] / (pow(tau, 4));
```

```
H[0][1] = H[1][0] = 2 * exp(-1 / tau) * S[0][1] / (tau *
tau);
```

```
H[0][2] = H[2][0] = 2 * exp(-1 / tau) * S[0][2] / (tau *
tau);
```

$H[0][3] = H[3][0] = 2 * \exp(-1 / \tau) * S[0][3] / (\tau * \tau);$

$H[0][4] = H[4][0] = 2 * \exp(-1 / \tau) * S[0][4] / (\tau * \tau);$

$H[1][1] = 2 * S[1][1];$

$H[2][2] = 2 * S[2][2];$

$H[3][3] = 2 * S[3][3];$

$H[4][4] = 2 * S[4][4];$

$H[1][2] = H[2][1] = 2 * S[1][2];$

$H[1][3] = H[3][1] = 2 * S[1][3];$

$H[1][4] = H[4][1] = 2 * S[1][4];$

$H[2][3] = H[3][2] = 2 * S[2][3];$

$H[2][4] = H[4][2] = 2 * S[2][4];$

$H[3][4] = H[4][3] = 2 * S[3][4];$

// Нахождение определителя матрицы Гессе

$\det_H = (H[0][0] * H[1][1] - H[0][1] * H[1][0]) * (H[2][2] * H[3][3] * H[4][4] + H[2][4] * H[3][2] * H[4][3] + H[2][3] * H[3][4] * H[4][2] - H[2][4] * H[3][3] * H[4][2] - H[2][3] * H[3][2] * H[4][4] - H[2][2] * H[3][4] * H[4][3]) + \$

$(H[0][2] * H[1][0] - H[0][0] * H[1][2]) * (H[2][1] * H[3][3] * H[4][4] + H[2][4] * H[3][1] * H[4][3] + H[2][3] * H[3][4] * H[4][1] - H[2][4] * H[3][3] * H[4][1] - H[2][1] * H[3][4] * H[4][3] - H[2][3] * H[3][1] * H[4][4]) + \$

$(H[0][0] * H[1][3] - H[0][3] * H[1][0]) * (H[2][1] * H[3][2] * H[4][4] + H[2][2] * H[3][4] * H[4][1] + H[2][4] * H[3][1] * H[4][2] - H[2][4] * H[3][2] * H[4][1] - H[2][1] * H[3][4] * H[4][2] - H[2][2] * H[3][1] * H[4][4]) + \$

$$(H[0][4] * H[1][0] - H[0][0] * H[1][4]) * (H[2][1] * H[3][2] * H[4][3] + H[2][2] * H[3][3] * H[4][1] + H[2][3] * H[3][1] * H[4][2] - H[2][3] * H[3][2] * H[4][1] - H[2][1] * H[3][3] * H[4][2] - H[2][2] * H[3][1] * H[4][3]) + \$$

$$(H[0][1] * H[1][2] - H[0][2] * H[1][1]) * (H[2][0] * H[3][3] * H[4][4] + H[2][4] * H[3][0] * H[4][3] + H[2][3] * H[3][4] * H[4][0] - H[2][4] * H[3][3] * H[4][0] - H[2][0] * H[3][4] * H[4][3] - H[2][3] * H[3][0] * H[4][4]) + \$$

$$(H[0][3] * H[1][1] - H[0][1] * H[1][3]) * (H[2][0] * H[3][2] * H[4][4] + H[2][4] * H[3][0] * H[4][2] + H[2][2] * H[3][4] * H[4][0] - H[2][4] * H[3][2] * H[4][0] - H[2][0] * H[3][4] * H[4][2] - H[2][2] * H[3][0] * H[4][4]) + \$$

$$(H[0][1] * H[1][4] - H[0][4] * H[1][1]) * (H[2][0] * H[3][2] * H[4][3] + H[2][2] * H[3][3] * H[4][0] + H[2][3] * H[3][0] * H[4][2] - H[2][3] * H[3][2] * H[4][0] - H[2][0] * H[3][3] * H[4][2] - H[2][2] * H[3][0] * H[4][3]) + \$$

$$(H[0][2] * H[1][3] - H[0][3] * H[1][2]) * (H[2][0] * H[3][1] * H[4][4] + H[2][1] * H[3][4] * H[4][0] + H[2][4] * H[3][0] * H[4][1] - H[2][4] * H[3][1] * H[4][0] - H[2][0] * H[3][4] * H[4][1] - H[2][1] * H[3][0] * H[4][4]) + \$$

$$(H[0][4] * H[1][2] - H[0][2] * H[1][4]) * (H[2][0] * H[3][1] * H[4][3] + H[2][1] * H[3][3] * H[4][0] + H[2][3] * H[3][0] * H[4][1] - H[2][3] * H[3][1] * H[4][0] - H[2][0] * H[3][3] * H[4][1] - H[2][1] * H[3][0] * H[4][3]) + \$$

$$(H[0][3] * H[1][4] - H[0][4] * H[1][3]) * (H[2][0] * H[3][1] * H[4][2] + H[2][1] * H[3][2] * H[4][0] + H[2][2] * H[3][0] * H[4][1] - H[2][2] * H[3][1] * H[4][0] - H[2][1] * H[3][0] * H[4][2] - H[2][0] * H[3][2] * H[4][1]);$$

// Нахождение обратной матрицы Гессе

$$M[0][0] = H[1][1] * (H[2][2] * H[3][3] * H[4][4] + H[2][3] * H[3][4] * H[4][2] + H[2][4] * H[3][2] * H[4][3] - H[2][4] * H[3][3] * H[4][2] - H[2][2] * H[3][4] * H[4][3] - H[2][3] * H[3][2] * H[4][4]) - \$$

$$H[1][2] * (H[2][1] * H[3][3] * H[4][4] + H[2][3] * H[3][4] * H[4][1] + H[2][4] * H[3][1] * H[4][3] - H[2][4] * H[3][3] * H[4][1] - H[2][1] * H[3][4] * H[4][3] - H[2][3] * H[3][1] * H[4][4]) + \$$

$$H[1][3] * (H[2][1] * H[3][2] * H[4][4] + H[2][2] * H[3][4] * H[4][1] + H[2][4] * H[3][1] * H[4][2] - H[2][4] * H[3][2] * H[4][1] - H[2][1] * H[3][4] * H[4][2] - H[2][2] * H[3][1] * H[4][4]) - \$$

$$H[1][4] * (H[2][1] * H[3][2] * H[4][3] + H[2][2] * H[3][3] * H[4][1] + H[2][3] * H[3][1] * H[4][2] - H[2][3] * H[3][2] * H[4][1] - H[2][2] * H[3][1] * H[4][3] - H[2][1] * H[3][3] * H[4][2]);$$

$$M[0][1] = M[1][0] = -(H[1][0] * (H[2][2] * H[3][3] * H[4][4] + H[2][3] * H[3][4] * H[4][2] + H[2][4] * H[3][2] * H[4][3] - H[2][4] * H[3][3] * H[4][2] - H[2][2] * H[3][4] * H[4][3] - H[2][3] * H[3][2] * H[4][4]) - \$$

$$H[1][2] * (H[2][0] * H[3][3] * H[4][4] + H[2][3] * H[3][4] * H[4][0] + H[2][4] * H[3][0] * H[4][3] - H[2][4] * H[3][3] * H[4][0] - H[2][0] * H[3][4] * H[4][3] - H[2][3] * H[3][0] * H[4][4]) + \$$

$$H[1][3] * (H[2][0] * H[3][2] * H[4][4] + H[2][2] * H[3][4] * H[4][0] + H[2][4] * H[3][0] * H[4][2] - H[2][4] * H[3][2] * H[4][0] - H[2][0] * H[3][4] * H[4][2] - H[2][2] * H[3][0] * H[4][4]) - \$$

$$H[1][4] * (H[2][0] * H[3][2] * H[4][3] + H[2][2] * H[3][3] * H[4][0] + H[2][3] * H[3][0] * H[4][2] - H[2][3] * H[3][2] * H[4][0] - H[2][0] * H[3][3] * H[4][2] - H[2][2] * H[3][0] * H[4][3]));$$

$$M[0][2] = M[2][0] = H[1][0] * (H[2][1] * H[3][3] * H[4][4] + H[2][3] * H[3][4] * H[4][1] + H[2][4] * H[3][1] * H[4][3] - H[2][4] * H[3][3] * H[4][1] - H[2][1] * H[3][4] * H[4][3] - H[2][3] * H[3][1] * H[4][4]) - \$$

$$H[1][1] * (H[2][0] * H[3][3] * H[4][4] + H[2][3] * H[3][4] * H[4][0] + H[2][4] * H[3][0] * H[4][3] - H[2][4] * H[3][3] * H[4][0] - H[2][0] * H[3][4] * H[4][3] - H[2][3] * H[3][0] * H[4][4]) + \$$

$$H[1][3] * (H[2][0] * H[3][1] * H[4][4] + H[2][1] * H[3][4] * H[4][0] + H[2][4] * H[3][0] * H[4][1] - H[2][4] * H[3][1] * H[4][0] - H[2][0] * H[3][4] * H[4][1] - H[2][1] * H[3][0] * H[4][4]) - \$$

$$H[1][4] * (H[2][0] * H[3][1] * H[4][3] + H[2][1] * H[3][3] * H[4][0] + H[2][3] * H[3][0] * H[4][1] - H[2][3] * H[3][1] * H[4][0] - H[2][1] * H[3][0] * H[4][3] - H[2][0] * H[3][3] * H[4][1]);$$

$$M[0][3] = M[3][0] = -(H[1][0] * (H[2][1] * H[3][2] * H[4][4] + H[2][2] * H[3][4] * H[4][1] + H[2][4] * H[3][1] * H[4][2] - H[2][4] * H[3][2] * H[4][1] - H[2][1] * H[3][4] * H[4][2] - H[2][2] * H[3][1] * H[4][4]) - \$$

$$H[1][1] * (H[2][0] * H[3][2] * H[4][4] + H[2][2] * H[3][4] * H[4][0] + H[2][4] * H[3][0] * H[4][2] - H[2][4] * H[3][2] * H[4][0] - H[2][0] * H[3][4] * H[4][2] - H[2][2] * H[3][0] * H[4][4]) + \$$

$$H[1][2] * (H[2][0] * H[3][1] * H[4][4] + H[2][1] * H[3][4] * H[4][0] + H[2][4] * H[3][0] * H[4][1] - H[2][4] * H[3][1] * H[4][0] - H[2][0] * H[3][4] * H[4][1] - H[2][1] * H[3][0] * H[4][4]) - \$$

$$H[1][4] * (H[2][0] * H[3][1] * H[4][2] + H[2][1] * H[3][2] * H[4][0] + H[2][2] * H[3][0] * H[4][1] - H[2][2] * H[3][1] * H[4][0] - H[2][0] * H[3][2] * H[4][1] - H[2][1] * H[3][0] * H[4][2]));$$

$$M[0][4] = M[4][0] = H[1][0] * (H[2][1] * H[3][2] * H[4][3] + H[2][2] * H[3][3] * H[4][1] + H[2][3] * H[3][1] * H[4][2] - H[2][3] * H[3][2] * H[4][1] - H[2][2] * H[3][1] * H[4][3] - H[2][1] * H[3][3] * H[4][2]) - \$$

$$H[1][1] * (H[2][0] * H[3][2] * H[4][3] + H[2][2] * H[3][3] * H[4][0] + H[2][3] * H[3][0] * H[4][2] - H[2][3] * H[3][2] * H[4][0] - H[2][0] * H[3][3] * H[4][2] - H[2][2] * H[3][0] * H[4][3]) + \$$

$$H[1][2] * (H[2][0] * H[3][1] * H[4][3] + H[2][1] * H[3][3] * H[4][0] + H[2][3] * H[3][0] * H[4][1] - H[2][3] * H[3][1] * H[4][0] - H[2][1] * H[3][0] * H[4][3] - H[2][0] * H[3][3] * H[4][1]) - \$$

$$H[1][3] * (H[2][0] * H[3][1] * H[4][2] + H[2][1] * H[3][2] * H[4][0] + H[2][2] * H[3][0] * H[4][1] - H[2][2] * H[3][1] * H[4][0] - H[2][0] * H[3][2] * H[4][1] - H[2][1] * H[3][0] * H[4][2]);$$

$$M[1][1] = H[0][0] * (H[2][2] * H[3][3] * H[4][4] + H[2][3] * H[3][4] * H[4][2] + H[2][4] * H[3][2] * H[4][3] - H[2][4] * H[3][3] * H[4][2] - H[2][2] * H[3][4] * H[4][3] - H[2][3] * H[3][2] * H[4][4]) - \$$

$$H[0][2] * (H[2][0] * H[3][3] * H[4][4] + H[2][3] * H[3][4] * H[4][0] + H[2][4] * H[3][0] * H[4][3] - H[2][4] * H[3][3] * H[4][0] - H[2][0] * H[3][4] * H[4][3] - H[2][3] * H[3][0] * H[4][4]) + \$$

$$H[0][3] * (H[2][0] * H[3][2] * H[4][4] + H[2][2] * H[3][4] * H[4][0] + H[2][4] * H[3][0] * H[4][2] - H[2][4] * H[3][2] * H[4][0] - H[2][0] * H[3][4] * H[4][2] - H[2][2] * H[3][0] * H[4][4]);$$

$$H[4][0] - H[2][0] * H[3][4] * H[4][2] - H[2][2] * H[3][0] * H[4][4]) - \backslash$$

$$H[0][4] * (H[2][0] * H[3][2] * H[4][3] + H[2][2] * H[3][3] * H[4][0] + H[2][3] * H[3][0] * H[4][2] - H[2][3] * H[3][2] * H[4][0] - H[2][0] * H[3][3] * H[4][2] - H[2][2] * H[3][0] * H[4][3]);$$

$$M[1][2] = M[2][1] = -(H[0][0] * (H[2][1] * H[3][3] * H[4][4] + H[2][3] * H[3][4] * H[4][1] + H[2][4] * H[3][1] * H[4][3] - H[2][4] * H[3][3] * H[4][1] - H[2][1] * H[3][4] * H[4][3] - H[2][3] * H[3][1] * H[4][4]) - \backslash$$

$$H[0][1] * (H[2][0] * H[3][3] * H[4][4] + H[2][3] * H[3][4] * H[4][0] + H[2][4] * H[3][0] * H[4][3] - H[2][4] * H[3][3] * H[4][0] - H[2][0] * H[3][4] * H[4][3] - H[2][3] * H[3][0] * H[4][4]) + \backslash$$

$$H[0][3] * (H[2][0] * H[3][1] * H[4][4] + H[2][1] * H[3][4] * H[4][0] + H[2][4] * H[3][0] * H[4][1] - H[2][4] * H[3][1] * H[4][0] - H[2][0] * H[3][4] * H[4][1] - H[2][1] * H[3][0] * H[4][4]) - \backslash$$

$$H[0][4] * (H[2][0] * H[3][1] * H[4][3] + H[2][1] * H[3][3] * H[4][0] + H[2][3] * H[3][0] * H[4][1] - H[2][3] * H[3][1] * H[4][0] - H[2][1] * H[3][0] * H[4][3] - H[2][0] * H[3][3] * H[4][1]));$$

$$M[1][3] = M[3][1] = H[0][0] * (H[2][1] * H[3][2] * H[4][4] + H[2][2] * H[3][4] * H[4][1] + H[2][4] * H[3][1] * H[4][2] - H[2][4] * H[3][2] * H[4][1] - H[2][1] * H[3][4] * H[4][2] - H[2][2] * H[3][1] * H[4][4]) - \backslash$$

$$H[0][1] * (H[2][0] * H[3][2] * H[4][4] + H[2][2] * H[3][4] * H[4][0] + H[2][4] * H[3][0] * H[4][2] - H[2][4] * H[3][2] * H[4][0] - H[2][0] * H[3][4] * H[4][2] - H[2][2] * H[3][0] * H[4][4]) + \backslash$$

$$H[0][2] * (H[2][0] * H[3][1] * H[4][4] + H[2][1] * H[3][4] * H[4][0] + H[2][4] * H[3][0] * H[4][1] - H[2][4] * H[3][1] * H[4][0] - H[2][0] * H[3][4] * H[4][1] - H[2][1] * H[3][0] * H[4][4]) - \$$

$$H[0][4] * (H[2][0] * H[3][1] * H[4][2] + H[2][1] * H[3][2] * H[4][0] + H[2][2] * H[3][0] * H[4][1] - H[2][2] * H[3][1] * H[4][0] - H[2][0] * H[3][2] * H[4][1] - H[2][1] * H[3][0] * H[4][2]);$$

$$M[1][4] = M[4][1] = -(H[0][0] * (H[2][1] * H[3][2] * H[4][3] + H[2][2] * H[3][3] * H[4][1] + H[2][3] * H[3][1] * H[4][2] - H[2][3] * H[3][2] * H[4][1] - H[2][2] * H[3][1] * H[4][3] - H[2][1] * H[3][3] * H[4][2]) - \$$

$$H[0][1] * (H[2][0] * H[3][2] * H[4][3] + H[2][2] * H[3][3] * H[4][0] + H[2][3] * H[3][0] * H[4][2] - H[2][3] * H[3][2] * H[4][0] - H[2][0] * H[3][3] * H[4][2] - H[2][2] * H[3][0] * H[4][3]) + \$$

$$H[0][2] * (H[2][0] * H[3][1] * H[4][3] + H[2][1] * H[3][3] * H[4][0] + H[2][3] * H[3][0] * H[4][1] - H[2][3] * H[3][1] * H[4][0] - H[2][1] * H[3][0] * H[4][3] - H[2][0] * H[3][3] * H[4][1]) - \$$

$$H[0][3] * (H[2][0] * H[3][1] * H[4][2] + H[2][1] * H[3][2] * H[4][0] + H[2][2] * H[3][0] * H[4][1] - H[2][2] * H[3][1] * H[4][0] - H[2][0] * H[3][2] * H[4][1] - H[2][1] * H[3][0] * H[4][2]));$$

$$M[2][2] = H[0][0] * (H[1][1] * H[3][3] * H[4][4] + H[1][3] * H[3][4] * H[4][1] + H[1][4] * H[3][1] * H[4][3] - H[1][4] * H[3][3] * H[4][1] - H[1][1] * H[3][4] * H[4][3] - H[1][3] * H[3][1] * H[4][4]) - \$$

$$H[0][1] * (H[1][0] * H[3][3] * H[4][4] + H[1][3] * H[3][4] * H[4][0] + H[1][4] * H[3][0] * H[4][3] - H[1][4] * H[3][3] * H[4][0] - H[1][0] * H[3][4] * H[4][3] - H[1][3] * H[3][0] * H[4][4]);$$

$$H[4][0] - H[1][0] * H[3][4] * H[4][3] - H[1][3] * H[3][0] * H[4][4]) + \\ \backslash$$

$$H[0][3] * (H[1][0] * H[3][1] * H[4][4] + H[1][1] * H[3][4] * H[4][0] + H[1][4] * H[3][0] * H[4][1] - H[1][4] * H[3][1] * H[4][0] - H[1][0] * H[3][4] * H[4][1] - H[1][1] * H[3][0] * H[4][4]) - \\ \backslash$$

$$H[0][4] * (H[1][0] * H[3][1] * H[4][3] + H[1][1] * H[3][3] * H[4][0] + H[1][3] * H[3][0] * H[4][1] - H[1][3] * H[3][1] * H[4][0] - H[1][0] * H[3][3] * H[4][1] - H[1][1] * H[3][0] * H[4][3]);$$

$$M[2][3] = M[3][2] = -(H[0][0] * (H[1][1] * H[3][2] * H[4][4] + H[1][2] * H[3][4] * H[4][1] + H[1][4] * H[3][1] * H[4][2] - H[1][4] * H[3][2] * H[4][1] - H[1][1] * H[3][4] * H[4][2] - H[1][2] * H[3][1] * H[4][4]) - \\ \backslash$$

$$H[0][1] * (H[1][0] * H[3][2] * H[4][4] + H[1][4] * H[3][0] * H[4][2] + H[1][2] * H[3][4] * H[4][0] - H[1][4] * H[3][2] * H[4][0] - H[1][0] * H[3][4] * H[4][2] - H[1][2] * H[3][0] * H[4][4]) + \\ \backslash$$

$$H[0][2] * (H[1][0] * H[3][1] * H[4][4] + H[1][1] * H[3][4] * H[4][0] + H[1][4] * H[3][0] * H[4][1] - H[1][4] * H[3][1] * H[4][0] - H[1][0] * H[3][4] * H[4][1] - H[1][1] * H[3][0] * H[4][4]) - \\ \backslash$$

$$H[0][4] * (H[1][0] * H[3][1] * H[4][2] + H[1][1] * H[3][2] * H[4][0] + H[1][2] * H[3][0] * H[4][1] - H[1][2] * H[3][1] * H[4][0] - H[1][0] * H[3][2] * H[4][1] - H[1][1] * H[3][0] * H[4][2]));$$

$$M[2][4] = M[4][2] = H[0][0] * (H[1][1] * H[3][2] * H[4][3] + H[1][3] * H[3][1] * H[4][2] + H[1][2] * H[3][3] * H[4][1] - H[1][3] * H[3][2] * H[4][1] - H[1][1] * H[3][3] * H[4][2] - H[1][2] * H[3][1] * H[4][3]) - \\ \backslash$$

$$H[0][1] * (H[1][0] * H[3][2] * H[4][3] + H[1][2] * H[3][3] * H[4][0] + H[1][3] * H[3][0] * H[4][2] - H[1][3] * H[3][2] * H[4][0] - H[1][0] * H[3][3] * H[4][2] - H[1][2] * H[3][0] * H[4][3]) +$$

$$\backslash$$

$$H[0][2] * (H[1][0] * H[3][1] * H[4][3] + H[1][1] * H[3][3] * H[4][0] + H[1][3] * H[3][0] * H[4][1] - H[1][3] * H[3][1] * H[4][0] - H[1][0] * H[3][3] * H[4][1] - H[1][1] * H[3][0] * H[4][3]) -$$

$$\backslash$$

$$H[0][3] * (H[1][0] * H[3][1] * H[4][2] + H[1][1] * H[3][2] * H[4][0] + H[1][2] * H[3][0] * H[4][1] - H[1][2] * H[3][1] * H[4][0] - H[1][0] * H[3][2] * H[4][1] - H[1][1] * H[3][0] * H[4][2]);$$

$$M[3][3] = H[0][0] * (H[1][1] * H[2][2] * H[4][4] + H[1][4] * H[2][1] * H[4][2] + H[1][2] * H[2][4] * H[4][1] - H[1][4] * H[2][2] * H[4][1] - H[1][1] * H[2][4] * H[4][2] - H[1][2] * H[2][1] * H[4][4]) -$$

$$\backslash$$

$$H[0][1] * (H[1][0] * H[2][2] * H[4][4] + H[1][4] * H[2][0] * H[4][2] + H[1][2] * H[2][4] * H[4][0] - H[1][4] * H[2][2] * H[4][0] - H[1][0] * H[2][4] * H[4][2] - H[1][2] * H[2][0] * H[4][4]) +$$

$$\backslash$$

$$H[0][2] * (H[1][0] * H[2][1] * H[4][4] + H[1][4] * H[2][0] * H[4][1] + H[1][1] * H[2][4] * H[4][0] - H[1][4] * H[2][1] * H[4][0] - H[1][0] * H[2][4] * H[4][1] - H[1][1] * H[2][0] * H[4][4]) -$$

$$\backslash$$

$$H[0][4] * (H[1][0] * H[2][1] * H[4][2] + H[1][2] * H[2][0] * H[4][1] + H[1][1] * H[2][2] * H[4][0] - H[1][2] * H[2][1] * H[4][0] - H[1][0] * H[2][2] * H[4][1] - H[1][1] * H[2][0] * H[4][2]);$$

$$M[3][4] = M[4][3] = -(H[0][0] * (H[1][1] * H[2][2] * H[4][3] + H[1][3] * H[2][1] * H[4][2] + H[1][2] * H[2][3] * H[4][1] -$$

$$H[1][3] * H[2][2] * H[4][1] - H[1][1] * H[2][3] * H[4][2] - H[1][2] * H[2][1] * H[4][3]) - \backslash$$

$$H[0][1] * (H[1][0] * H[2][2] * H[4][3] + H[1][3] * H[2][0] * H[4][2] + H[1][2] * H[2][3] * H[4][0] - H[1][3] * H[2][2] * H[4][0] - H[1][0] * H[2][3] * H[4][2] - H[1][2] * H[2][0] * H[4][3]) + \backslash$$

$$H[0][2] * (H[1][0] * H[2][1] * H[4][3] + H[1][3] * H[2][0] * H[4][1] + H[1][1] * H[2][3] * H[4][0] - H[1][3] * H[2][1] * H[4][0] - H[1][0] * H[2][3] * H[4][1] - H[1][1] * H[2][0] * H[4][3]) - \backslash$$

$$H[0][3] * (H[1][0] * H[2][1] * H[4][2] + H[1][2] * H[2][0] * H[4][1] + H[1][1] * H[2][2] * H[4][0] - H[1][2] * H[2][1] * H[4][0] - H[1][0] * H[2][2] * H[4][1] - H[1][1] * H[2][0] * H[4][2]));$$

$$M[4][4] = H[0][0] * (H[1][1] * H[2][2] * H[3][3] + H[1][3] * H[2][1] * H[3][2] + H[1][2] * H[2][3] * H[3][1] - H[1][3] * H[2][2] * H[3][1] - H[1][1] * H[2][3] * H[3][2] - H[1][2] * H[2][1] * H[3][3]) - \backslash$$

$$H[0][1] * (H[1][0] * H[2][2] * H[3][3] + H[1][3] * H[2][0] * H[3][2] + H[1][2] * H[2][3] * H[3][0] - H[1][3] * H[2][2] * H[3][0] - H[1][0] * H[2][3] * H[3][2] - H[1][2] * H[2][0] * H[3][3]) + \backslash$$

$$H[0][2] * (H[1][0] * H[2][1] * H[3][3] + H[1][3] * H[2][0] * H[3][1] + H[1][1] * H[2][3] * H[3][0] - H[1][3] * H[2][1] * H[3][0] - H[1][0] * H[2][3] * H[3][1] - H[1][1] * H[2][0] * H[3][3]) - \backslash$$

$$H[0][3] * (H[1][0] * H[2][1] * H[3][2] + H[1][2] * H[2][0] * H[3][1] + H[1][1] * H[2][2] * H[3][0] - H[1][2] * H[2][1] * H[3][0] - H[1][0] * H[2][2] * H[3][1] - H[1][1] * H[2][0] * H[3][2]);$$

```

for (int i = 0; i < 5; i++) {
    for (int j = 0; j < 5; j++) {
        inv_H[i][j] = M[i][j] / det_H;
    }
}

// Метод Ньютона

tau_new = tau - (inv_H[0][0] * dF_dt + inv_H[0][1] *
dF_df1 + inv_H[0][2] * dF_df2 + inv_H[0][3] * dF_df3 + inv_H[0][4] *
dF_df4);

f1_new = f1 - (inv_H[1][0] * dF_dt + inv_H[1][1] * dF_df1
+ inv_H[1][2] * dF_df2 + inv_H[1][3] * dF_df3 + inv_H[1][4] * dF_df4);
f2_new = f2 - (inv_H[2][0] * dF_dt + inv_H[2][1] * dF_df1
+ inv_H[2][2] * dF_df2 + inv_H[2][3] * dF_df3 + inv_H[2][4] * dF_df4);
f3_new = f3 - (inv_H[3][0] * dF_dt + inv_H[3][1] * dF_df1
+ inv_H[3][2] * dF_df2 + inv_H[3][3] * dF_df3 + inv_H[3][4] * dF_df4);
f4_new = f4 - (inv_H[4][0] * dF_dt + inv_H[4][1] * dF_df1
+ inv_H[4][2] * dF_df2 + inv_H[4][3] * dF_df3 + inv_H[4][4] * dF_df4);

// Целевая функция

for (int i = 1; i < A; i++) {
    q[i] = q[i - 1] * exp(-1 / tau_new) + (1 - exp(-1 /
tau_new)) * (f1_new * I1[i] + f2_new * I2[i] + f3_new * I3[i] + f4_new
* I4[i]);
}

n = 1;

do {

```

```
        F += pow((q_hist[n] - q[n]), 2);
        n++;
    } while (n < A);

    tau = tau_new;

    f1 = f1_new;

    f2 = f2_new;

    f3 = f3_new;

    f4 = f4_new;

} while (F > 10); // Изменить условие выхода при необходимости

    ofstream file1;

    file1.open("CRM.txt");

    for (n = 0; n < A; n++)

        file1 << q[n] << endl;

    file1.close();

}
```