

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК
Кафедра фундаментальной математики и механики

РЕКОМЕНДОВАНО К ЗАЩИТЕ В ГЭК

Заведующий кафедрой

к.ф.-м.н.

А.П. Девятков

 27.06 20__ г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Магистерская диссертация

**НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ И ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ
ОБОБЩЕННОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ
СИСТЕМЫ КУКЛЕСА**

01.04.01 Математика

Магистерская программа «Вычислительная механика»

Выполнил работу
студент II курса
очной формы обучения



Мальков Иван
Николаевич

Руководитель
доцент



Мачулис Владислав
Владимирович

Рецензент
к.ф.-м.н.
доцент кафедры алгебры и математической логики
Тюменский государственный университет



Шармин Валентин
Геннадьевич

Тюмень

2022

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
ГЛАВА 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ	5
1.1 Система Куклеса	5
1.2 Исследования системы Куклеса	6
1.2.1 Неподвижная точка типа центр системы Куклеса	6
1.2.2 Фазовые портреты системы Куклеса	7
ГЛАВА 2. МЕТОДЫ И МАТЕРИАЛЫ	14
2.1. Основные определения качественной теории динамических систем	14
2.2. Устойчивость в первом приближении – метод линеаризации	15
2.2.1. Положения равновесия линейных автономных систем	15
2.2.2. Устойчивость в первом приближении	21
2.2.3. Сложные состояния равновесия	22
2.3. Компактификация Пуанкаре	25
2.4. Метод усреднения	27
2.5. Диофантовы уравнения	29
ГЛАВА 3. ИССЛЕДОВАНИЕ ОБОБЩЕННОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ КУКЛЕСА	30
3.1 Неподвижные точки системы	31
3.1.1 Конечные неподвижные точки	31
3.1.2 Бесконечные сингулярные точки	31
3.2 Фазовые портреты на диске Пуанкаре	37
3.3 Предельные циклы	37
3.4 Программная реализация	40
3.5 Апробация работы	41
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	43
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	44
ПРИЛОЖЕНИЯ	47

ВВЕДЕНИЕ

Данная работа посвящена изучению поведения траекторий обобщенной полиномиальной дифференциальной системы Куклеса четной степени $n \geq 2$ и исследованию периодических решений этой системы.

Актуальность темы. Исследование количества предельных циклов двумерных динамических систем - теоретическая математическая проблема, которая сформулирована на II Международном конгрессе математиков в Париже в 1900 году Давидом Гильбертом как 16 проблема. Теоретические разработки в этой области знаний имеют выход во многие прикладные задачи в различных науках: химия (например, колебательные реакции Белоусова-Жаботинского [5]), биология (например, популяционная модель Лотки-Вольтерры [21]), физика (например, осциллятор Ван дер Поля [22]) и другие. В этих моделях большое значение имеют предельные циклы, моделирующие устойчивое (или неустойчивое) поведение системы.

Цель работы. Целью работы являются обобщение ранее полученных результатов для полиномиальной системы Куклеса и получение новых оценок количества предельных циклов для системы 10 порядка.

Задачи, поставленные для решения проблемы:

1. Всестороннее исследование научных работ по тематике проблемы;
2. Обзор методологии, используемой для достижения поставленной цели;
3. Изучение характера устойчивости конечных и бесконечных неподвижных точек;
4. Применение теории усреднения для определения количества предельных циклов возмущенной системы для заранее заданного n .

Методы исследования. В работе использован обширный круг методов из разных областей математики: дифференциальные уравнения, качественная теория динамических систем, теория чисел.

- метод линеаризации дифференциальных систем;
- метод компактификации Пуанкаре;

– метод усреднения;

Магистерская диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и приложений.

В первой главе приведен обзор литературных источников, показаны основные результаты ранних исследований. Во второй главе рассматриваются основные методы анализа динамических систем, использованные в диссертации. В третьей главе применяются изложенные методы на примере системы Куллеса четной степени $n \geq 2$.

В работе изучено 24 литературных источника, включающих в себя как отечественную литературу, так и зарубежные исследования.

На основе магистерской диссертации составлена научная статья и отправлена в журнал «Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки». По результатам рецензии статья принята к публикации в выпуск №2 2022 г.

ГЛАВА 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

В этой главе представлен краткий обзор литературы об исследованиях фазового портрета и количества предельных циклов системы Куклеса. В открытых источниках найдены как работы 20-го века, так и современные (2017-2020 гг.). Также стоит отметить, что литература представлена не только русскими источниками, но и зарубежными. Эти факты говорят об актуальности темы в международной научной среде.

Всего изучено 24 литературных источника.

Таким образом, литература проведена в полном объеме.

1.1 Система Куклеса

Первые исследования системы Куклеса относятся к 1944 году [9], где И.С. Куклес исследует некоторые случаи отличия фокуса от центра (ещё одна из задач качественной теории динамических систем). В этой работе автор приводит условия, когда можно дать однозначный ответ на вопрос о характере неподвижной точки (фокус или центр). В частности, рассматривается пример системы вида:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= F(x, y)\end{aligned}\tag{1}$$

где $F(x, y)$ – полином пятой степени:

$$F(x, y) = -x + c_0x^2 + d_0x^3 + e_0x^4 + f_0x^5 + y(b_1x + c_1x^2 + d_1x^3 + e_1x^4) + y^2(a_2 + b_2x + c_2x^2 + d_2x^3) + y^3(a_3 + b_3x + c_3x^2) + y^4(a_4 + b_4x) + a_5y^5\tag{2}$$

Обобщение этой системы и называется системой Куклеса:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \pm y \\ \frac{dy}{dt} &= \mp x + F(x, y)\end{aligned}\tag{3}$$

Кажущаяся простота системы (3) привлекла и привлекается сейчас исследователей.

1.2 Исследования системы Куклеса

Системы Куклеса степени $n = 2, 3, \dots, 8$ рассматривались многими исследователями.

В работе [3] выдвинуто предположение, что система (3) имеет неподвижную точку типа центр в начале координат, если она симметрична относительно одной из осей координат. В работе [15] это доказано для $n = 2, 3, 4, 5$, а позднее и для всех n при дополнительных допущениях [16, 17].

В исследовании [4] рассмотрены фазовые портреты квадратичной системы, в статье [14] – кубической. Классификацию фазовых портретов для $n = 4$ предложили в [10]. Случаи $n = 5, 6$ рассмотрены в [18, 19]. Система (1) седьмой степени изучалась в работе [13]. Система Куклеса восьмого порядка исследована в работе [11].

Рассмотрим более подробно каждую из научных публикаций. Это позволит понять, какие классические методы применяются для исследования систем Куклеса.

1.2.1 Неподвижная точка типа центр системы Куклеса

Авторы работы [3] в 1999 году на основе анализа систем различных степеней выдвинули следующий вопрос: «Верно ли, что у системы Куклеса с нелинейностью степени выше двух начало координат является центром только в том случае, если поле направлений симметрично относительно какой-либо из координатных осей?»

Позднее, в 2001 году, авторами работы [15] сформулированы и доказаны следующие теоремы для систем степени $n = 2, 3, 4, 5$.

Теорема 1. Рассмотрим систему вида

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y \\ \frac{dy}{dt} &= x + b_{40}x^4 + b_{31}x^3y + b_{22}x^2y^2 + b_{13}xy^3 + b_{04}y^4 \end{aligned} \quad (4)$$

Начало координат является центром тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

- $b_{40} = b_{22} = b_{04}$

- $b_{31} = b_{13} = 0$.

Теорема 2. Рассмотрим систему вида

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y \\ \frac{dy}{dt} &= x + b_{50}x^5 + b_{41}x^4y + b_{32}x^3y^2 + b_{23}x^2y^3 + b_{14}xy^4 + b_{05}y^5 \end{aligned} \quad (5)$$

Начало координат является центром тогда и только тогда, когда $b_{41} = b_{23} = b_{05} = 0$.

Далее, в 2015 и 2017 гг. результат был обобщен для системы Куклеса нечетной [16] и четной [17] степени соответственно.

Теорема 3. Система Куклеса вида

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y \\ \frac{dy}{dt} &= x + \sum_{j=0}^n c_j x^j y^{n-j} \end{aligned} \quad (6)$$

где $c_j \in \mathbb{R}$, нечетной степени $n \geq 5$ имеет центр в начале координат тогда и только тогда, когда $c_{2j} = 0, j = 0, \dots, (n-1)/2$.

Теорема 4. Система Куклеса четной степени $n \geq 4$ имеет центр в начале координат тогда и только тогда, когда она симметрична относительно одной из осей координат, или она имеет локальный аналитический первый интеграл, который является непрерывным в окрестности нуля в пространстве параметров.

1.2.2 Фазовые портреты системы Куклеса

В работе [14] исследовали кубическую систему Куклеса. Сформулируем основную теорему, доказанную в статье.

Теорема 5. Рассмотрим полиномиальное векторное поле $X: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, задаваемая в виде $X(x) = L(x) + g(x)$, где L – линейная часть и g – однородное полиномиальное векторное поле третьей степени. Предположим, что X удовлетворяет условиям Н1 и Н2. Тогда фазовый портрет поля X является топологически эквивалентным одному из 47 фазовых портретов, задаваемых рисунком 1.

Н1. Векторное поле X является обратимым по отношению к линейному преобразованию $\varphi: R^2 \rightarrow R^2$ (т.е. $\varphi \circ X = -X \circ \varphi$) такое, что размерность фиксированного множества точек отображения φ равняется одному.

Н2. Собственные значения линейной части $L \pm \alpha i$, $\alpha \neq 0$.

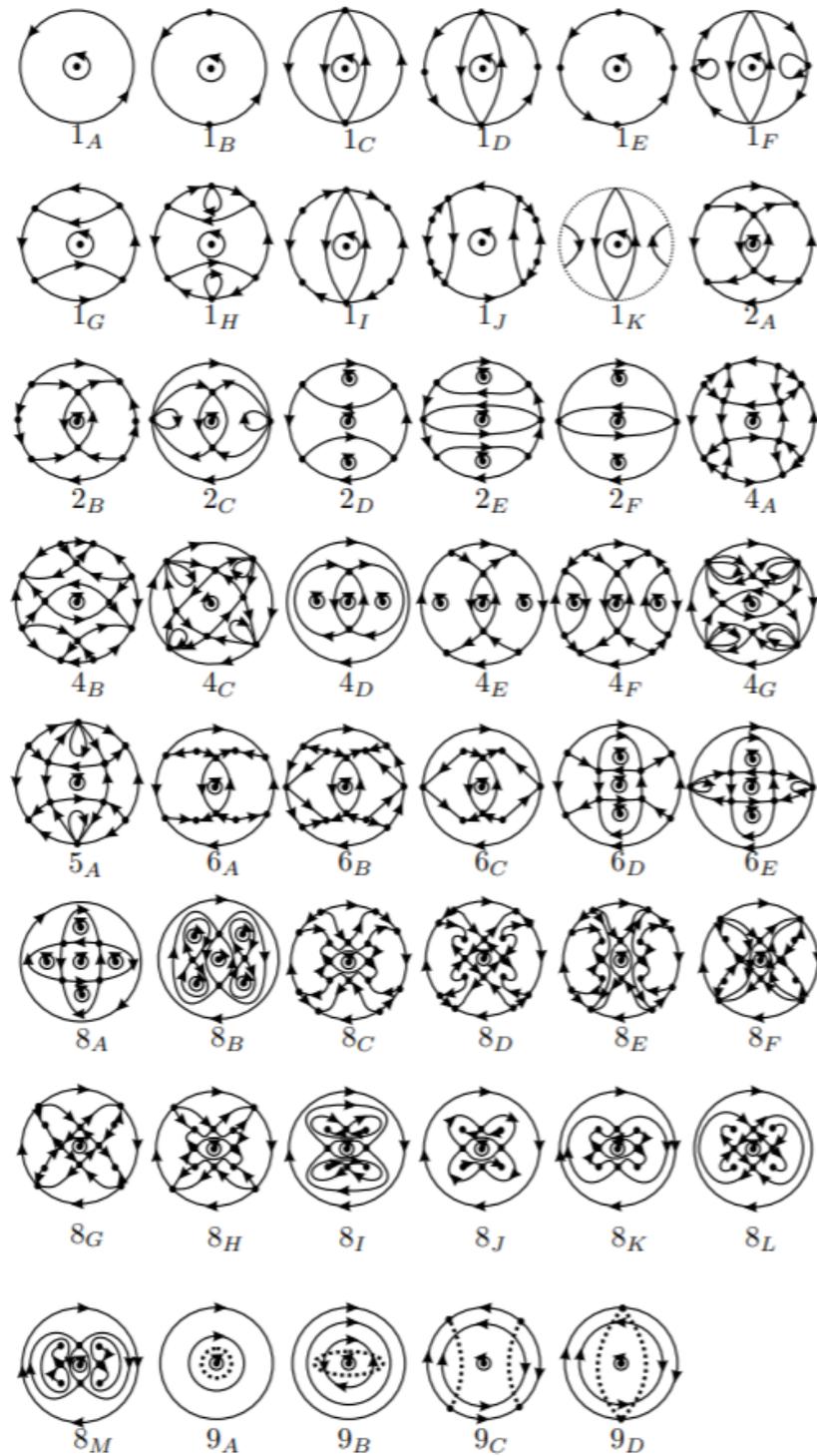


Рисунок 1 – Фазовый портрет кубической системы Куклеса на диске Пуанкаре

В исследовании [10] рассматривалась система Куклеса четвертой степени

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -y \\ \frac{dy}{dt} &= x + ax^3y + bxy^3\end{aligned}\tag{7}$$

и получен следующий результат

Теорема 6. Полиномиальная дифференциальная система (8) при $a^2 + b^2 \neq 0$ имеет фазовый портрет на диске Пуанкаре топологически эквивалентный одному из фазовых портретов, изображенных на рисунке 2.

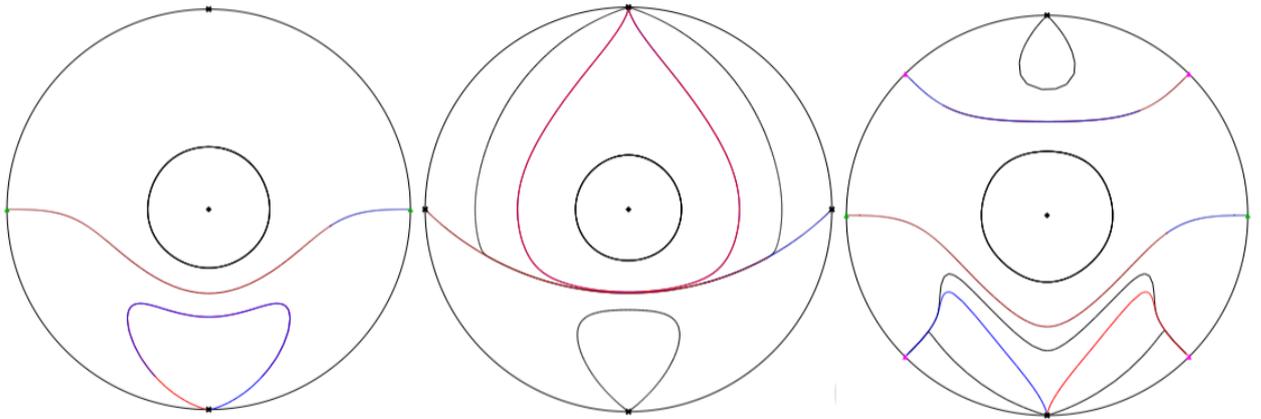


Рисунок 2 – Фазовый портрет системы Куклеса (8) на диске Пуанкаре

Также в работе показано, что возмущенная в классе полиномов четвертой степени система (8) имеет до двух предельных циклов при определенных условиях.

В статье [18] рассматривается система Куклеса пятой степени, вида:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -y \\ \frac{dy}{dt} &= x + ax^5 + bx^3y^2 + cxy^4\end{aligned}\tag{8}$$

Получен следующий результат:

Теорема 7. Система (9) на диске Пуанкаре топологически эквивалентна одному из фазовых портретов, изображенных на рисунке 3.

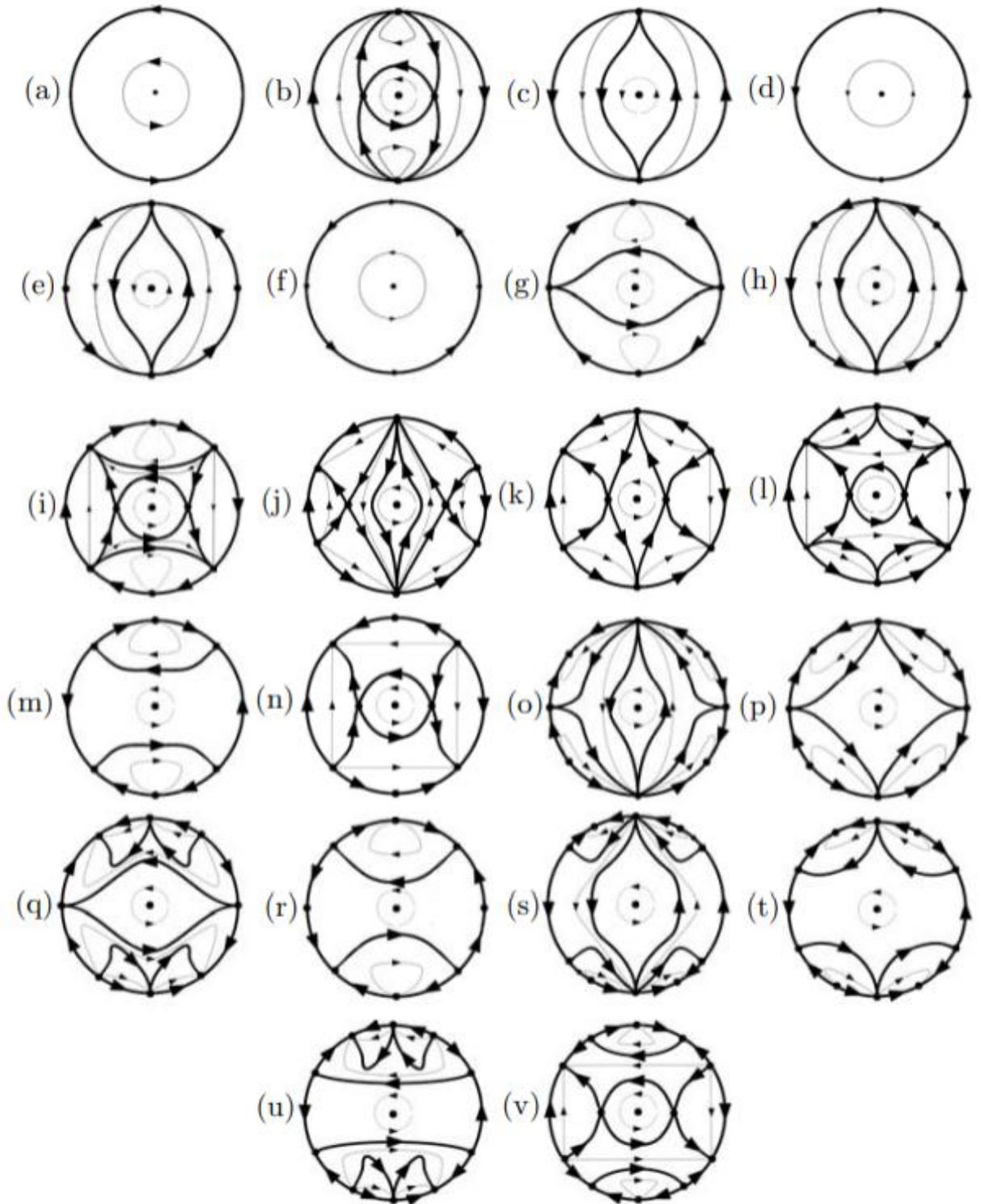


Рисунок 3 – Фазовый портрет системы Куклеса (9) на диске Пуанкаре

В статье [19] рассматривается система Куклеса шестой степени, вида:

$$\frac{dx}{dt} = -y$$

$$\frac{dy}{dt} = x + ax^5y + bx^3y^3 + cxy^5$$

(9)

Получен следующий результат:

Теорема 8. Предположим, что $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. Тогда глобальные фазовые портреты на диске Пуанкаре системы (10) топологически эквивалентны одному из фазовых портретов, изображенных на рисунке (4).

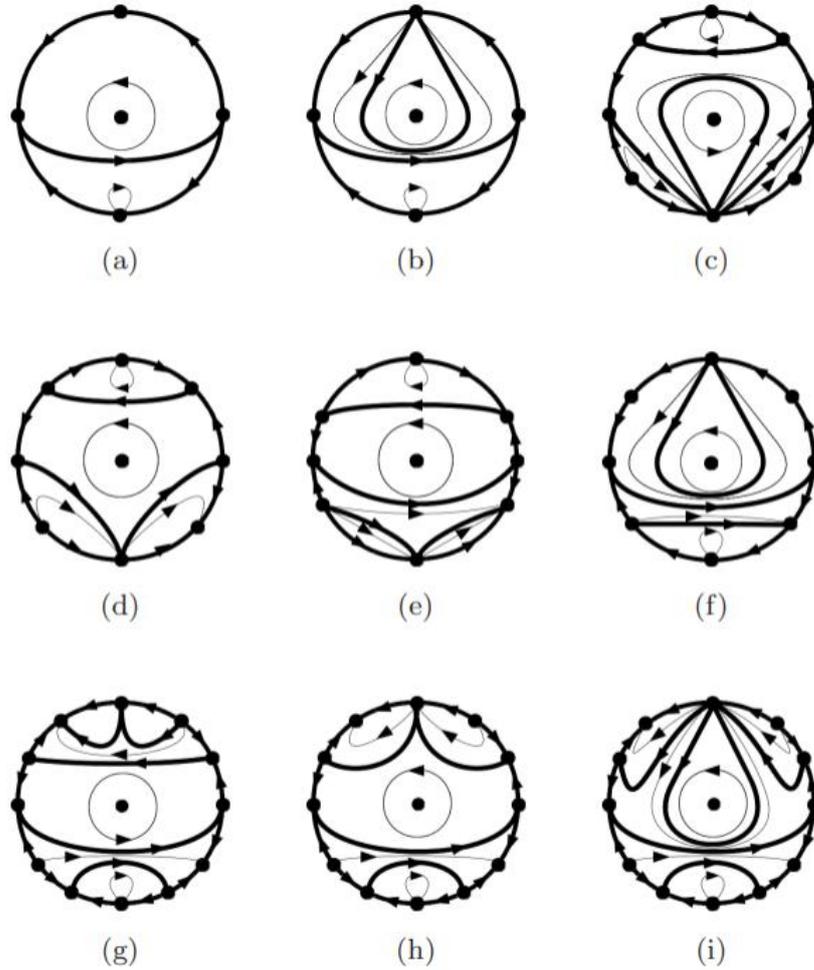


Рисунок 4 – Фазовый портрет системы Куклеса (10) на диске Пуанкаре

Также в работе показано, что возмущенная в классе полиномов шестой степени система (10) имеет до двух предельных циклов при определенных условиях.

В исследовании [13] рассматривается система Куклеса седьмой степени, вида:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y \\ \frac{dy}{dt} &= x + axy^6 + bx^3y^4 + cx^5y^2 + dx^7 \end{aligned} \quad (10)$$

Получен следующий результат:

Теорема 9. Предположим, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$. Тогда глобальные фазовые портреты на диске Пуанкаре системы (11) топологически эквивалентны одному из фазовых портретов, изображенных на рисунке 5.

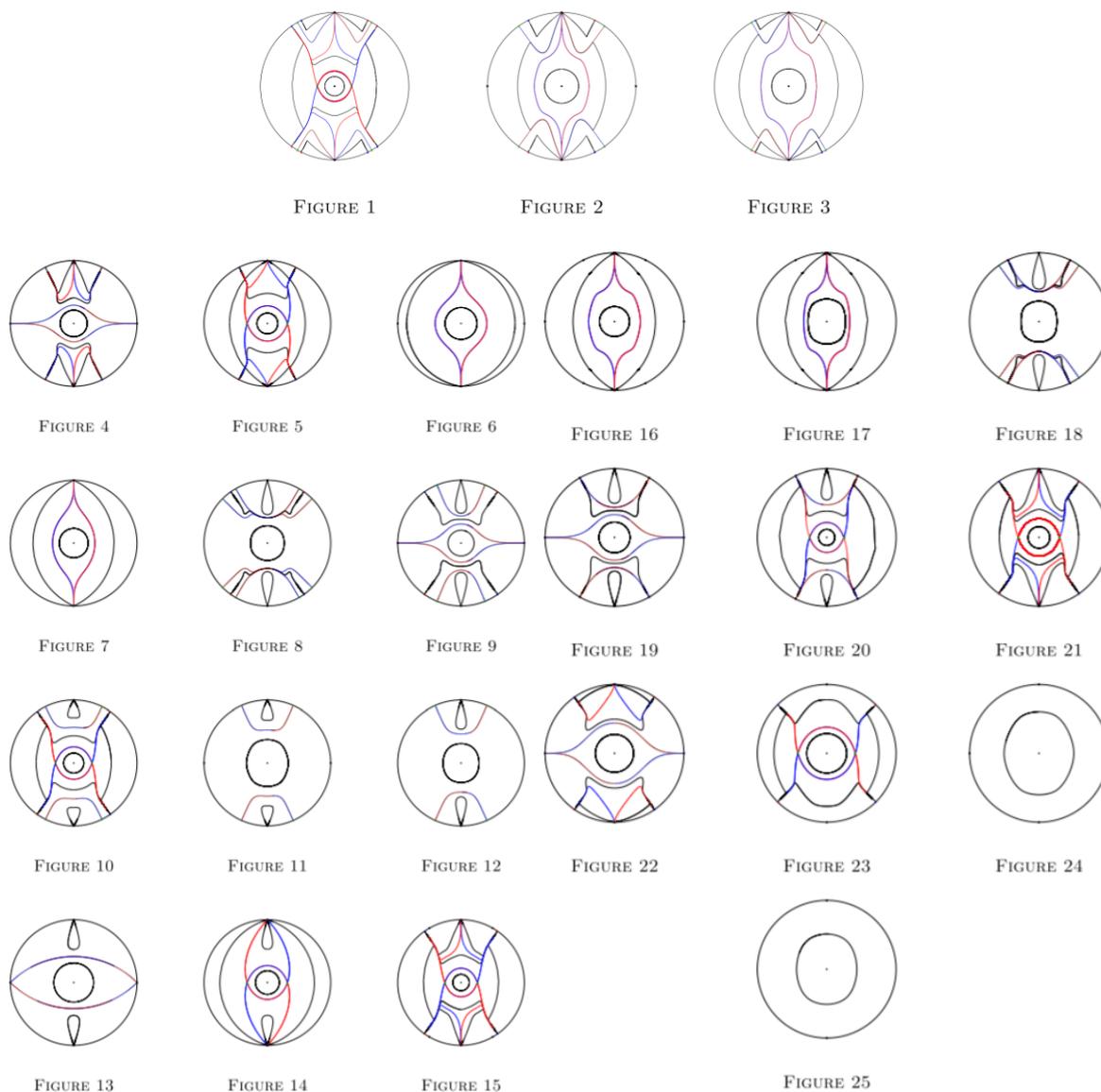


Рисунок 5 – Фазовый портрет системы Куклеса (11) на диске Пуанкаре

Также в работе показано, что возмущенная в классе полиномов шестой степени система (11) имеет до двух предельных циклов при определенных условиях.

В работе [11] авторы исследовали систему Куклеса восьмого порядка, вида:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -y \\ \frac{dy}{dt} &= x + ax^8 + bx^4y^4 + cy^8\end{aligned}\tag{11}$$

Теорема 10. Предположим, что $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$. Тогда глобальные фазовые портреты на диске Пуанкаре системы 12 топологически эквивалентны одному из фазовых портретов, изображенных на рисунке 6.

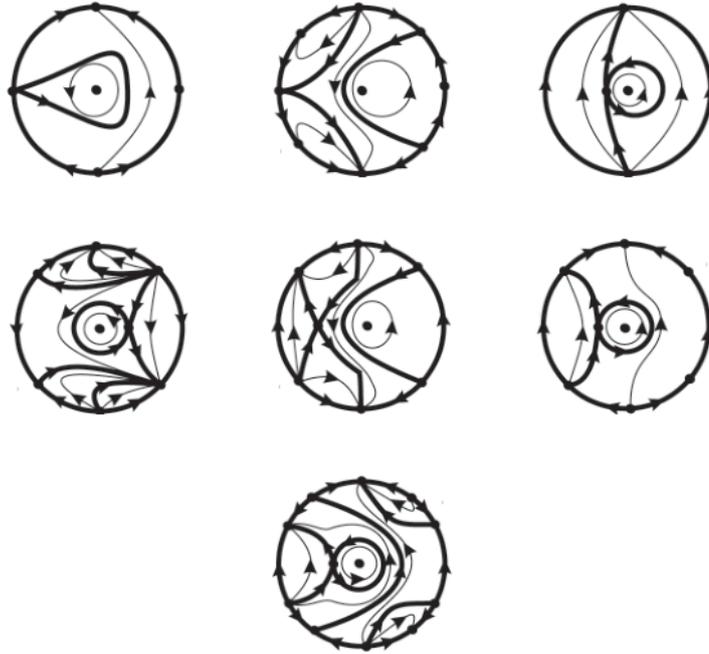


Рисунок 6 – Фазовый портрет системы Куклеса (12) на диске Пуанкаре

Также в работе показано, что возмущенная в классе полиномов шестой степени система (12) имеет до трех предельных циклов при определенных условиях.

Таким образом, проблему существования центра в начале координат окончательно решили в 2017 году. Стоит отметить методы, которые использовались для доказательств. Для исследования характера устойчивости неподвижных точек используется метод линеаризации и использование специальных теорем о характеристических числах. Для анализа бесконечных неподвижных точек применяется метод компактификации Пуанкаре – отображение исходной системы на единичную сферу. Для ответа на вопрос о количестве предельных циклов используется теория усреднения.

ГЛАВА 2. МЕТОДЫ И МАТЕРИАЛЫ

В этой главе представлена теория, которая будет полезна в дальнейших исследованиях. Все теоремы изложены без доказательств, при необходимости их можно найти в указанных источниках.

2.1. Основные определения качественной теории динамических систем

Динамическая система (ДС) – математическая модель, представленная дифференциальными уравнениями, описывающим некоторые процессы, явления. Или математически:

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, \dots, x_n, t), \quad x_i = x_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Чаще всего в практических задачах параметр t обозначает время, x_i – пространственная координата, $i = 1, \dots, n$.

Автономная динамическая система (АДС) – динамическая система, явно независимая от времени.

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, \dots, x_n), \quad x_i = x_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Неподвижными (сингулярными) точками АДС будем называть точки, которые являются решением уравнения

$$F_i(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

Матрица Якоби (матрица линеаризации) отображения $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ в точке $x \in \mathbb{R}^n$ описывает главную линейную часть произвольного отображения F в точке x . Или математически:

$$J(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial u_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}.$$

Гиперболическая неподвижная точка – неподвижная точка, действительная часть собственных чисел матрицы Якоби которой не равна нулю, иначе точка называется негиперболической.

Фазовый портрет – совокупность всех траекторий динамической системы.

Предельный цикл – замкнутая (периодическая) изолированная траектория в фазовом пространстве динамической системы.

Решение $x = \varphi_0(t), y = \psi_0(t)$ будем называть **устойчивым по Ляпунову**, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$ ($\delta = \delta(\varepsilon)$), что для всех решений $x = \varphi(t), y = \psi(t)$, для которых выполняются неравенства

$$|\varphi_0(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta, \quad |\psi_0(t_0) - \psi(t_0)| < \delta,$$

при всех $t > t_0$ будут выполняться неравенства

$$|\varphi_0(t) - \varphi(t)| < \varepsilon, \quad |\psi_0(t) - \psi(t)| < \varepsilon.$$

Если решение $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ устойчиво по Ляпунову и если при достаточно малом $\delta > 0$ будут выполняться условия

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\varphi_0(t) - \varphi(t)| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |\psi_0(t) - \psi(t)| = 0,$$

то решение $\varphi_0(t)$ и $\psi_0(t)$ называется **асимптотически устойчивым**.

2.2. Устойчивость в первом приближении – метод линеаризации

Метод линеаризации является одним из классических методов исследования поведения динамических систем в окрестности сингулярных точек, но у этого метода есть границы применимости. Рассмотрим более подробно теорию, на которую опирается данный метод.

2.2.1. Положения равновесия линейных автономных систем

Пусть дана линейная однородная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{11}x + a_{12}y \\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}x + a_{22}y \end{aligned} \tag{12}$$

или в матричной форме

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}, \text{ где } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Неподвижные точки системы находятся из решения уравнения:

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{0}.$$

Это уравнение имеет единственную сингулярную точку $\mathbf{X} = \mathbf{0}$, если $\det(A) \neq 0$. В случае $\det(A) = 0$ система имеет бесконечное множество точек равновесия.

Классификация характера равновесия определяется собственными значениями λ_1, λ_2 матрицы A . Собственные значения находятся из решения характеристического уравнения:

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0 \quad (13)$$

Рассмотрим различные случаи, которые могут быть решениями уравнения (2).

1) Корни λ_1, λ_2 действительны, различны и одного знака.

Для определенности положим $|\lambda_1| \neq |\lambda_2|$. Общее решение системы (13) имеет вид

$$\mathbf{X}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{V}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{V}_2 \quad (14)$$

где $\mathbf{V}_1 = (V_{11}, V_{21})^T, \mathbf{V}_2 = (V_{12}, V_{22})^T$ – собственные векторы, соответствующие числам λ_1, λ_2 , а C_1, C_2 – произвольные константы.

В случае отрицательных собственных значениях решение $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ является асимптотически устойчивым. Если собственные значения положительны, то решение $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ является неустойчивым. Такие положения равновесия называются узлом (рисунок 7).

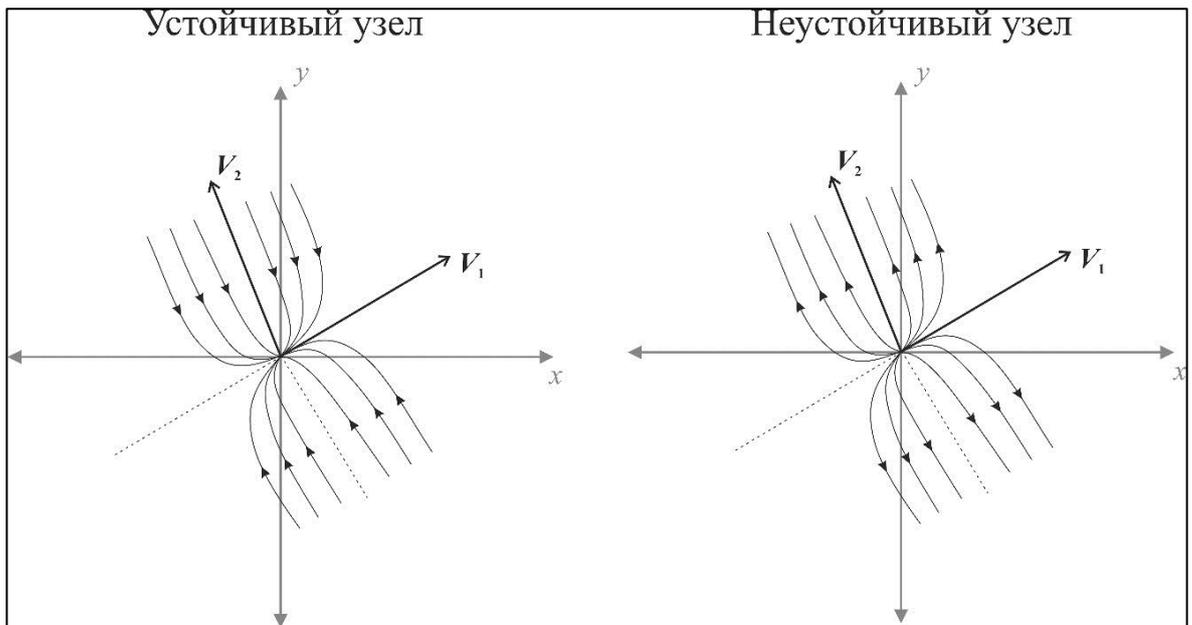


Рисунок 7 – Пример фазового портрета устойчивого и неустойчивого узла

2) Корни λ_1, λ_2 действительны, различны и разных знаков.

Положение равновесия в этом случае называется седлом – неустойчивый характер. В этом случае прямые, направленные вдоль собственных векторов V_1, V_2 , называют сепаратрисами (рисунок 8).

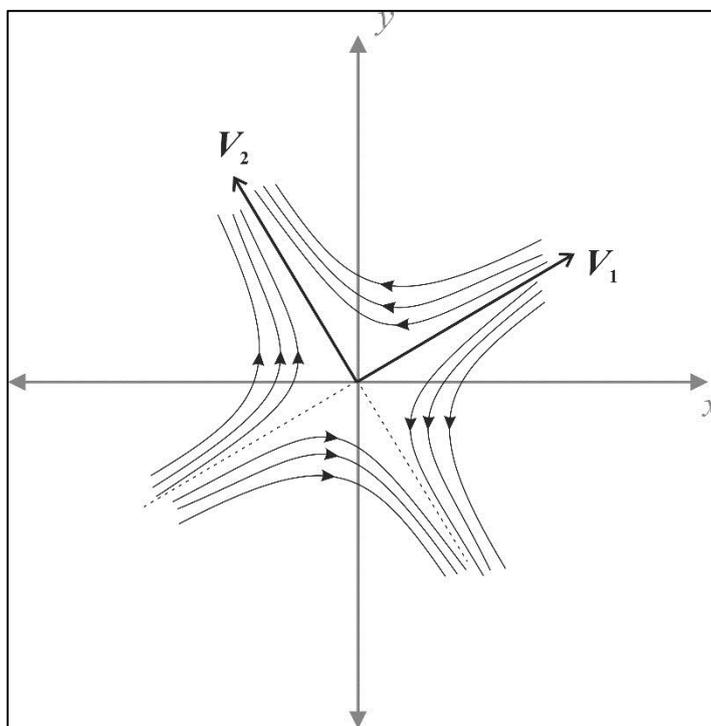


Рисунок 8 – Пример фазового портрета седла

3) Корни $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$. При этом система имеет базис из двух собственных векторов, т.е. геометрическая кратность собственного значения равна 2. Такое положение равновесия называется дикритическим узлом. При отрицательном λ дикритический узел называется устойчивым, иначе – неустойчивым (рисунок 9).

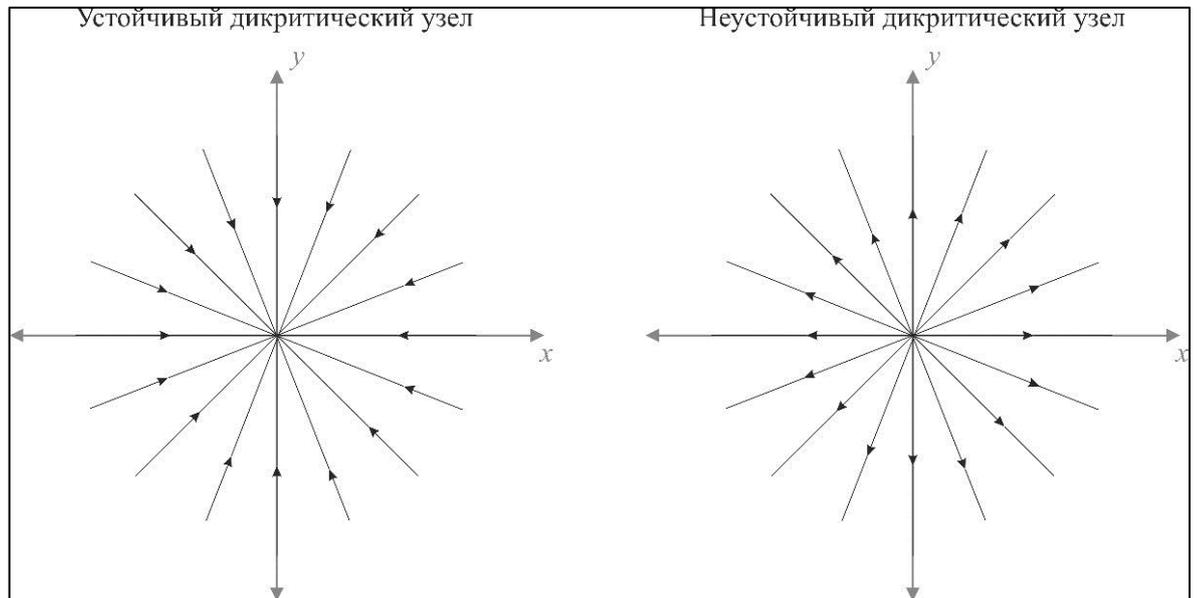


Рисунок 9 – Пример фазового портрета устойчивого и неустойчивого дикритического узла

4) Корни $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$. В этом случае предположим, что геометрическая кратность собственного значения равна 1. В этом случае неподвижную точку называют вырожденным узлом. При отрицательном λ вырожденный узел называется устойчивым, иначе – неустойчивым (рисунок 10).

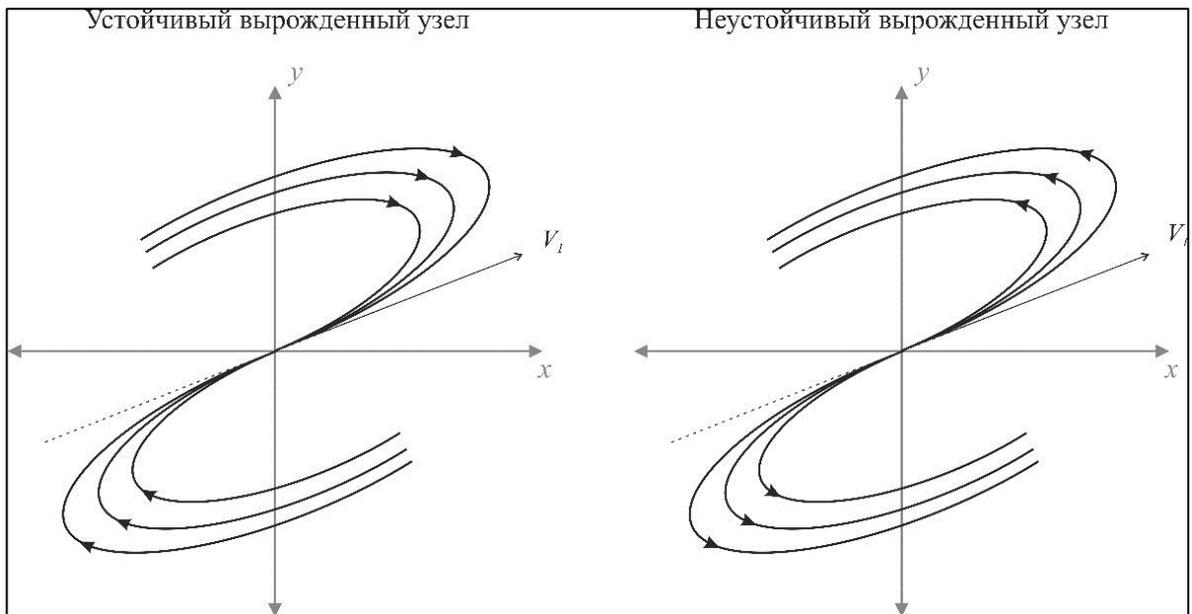


Рисунок 10 – Пример фазового портрета устойчивого и неустойчивого вырожденного узла

5) Пусть λ_1, λ_2 являются комплексными числами, действительные части которых не равны нулю. Построим комплексное решение $X_1(t)$ соответствующее собственному числу $\lambda_1 = \alpha \pm i\beta$:

$$X_1(t) = e^{\lambda_1 t} V_1 = e^{(\alpha + i\beta)t} (U + iW),$$

где $V_1 = U + iW$ – комплекснозначный собственный вектор, ассоциированный с числом λ_1 , U и W – действительные векторные функции. В результате преобразований получаем общее решение системы:

$$X(t) = e^{\alpha t} [U(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)) + W(C_2 \cos(\beta t) - C_1 \sin(\beta t))]$$

Представляя $C_1 = C \sin(\delta)$, $C_2 = C \cos(\delta)$, где δ – вспомогательный угол, решение можно записать в виде:

$$X(t) = C e^{\alpha t} [U \sin(\beta t + \delta) + W \cos(\beta t + \delta)].$$

Отсюда видно, что фазовые траектории представляют собой спирали. При $\alpha < 0$ спирали будут закручиваться, приближаясь к началу координат. Такое положение равновесия называется устойчивым фокусом. При $\alpha > 0$ – неустойчивый фокус (рисунок 11).

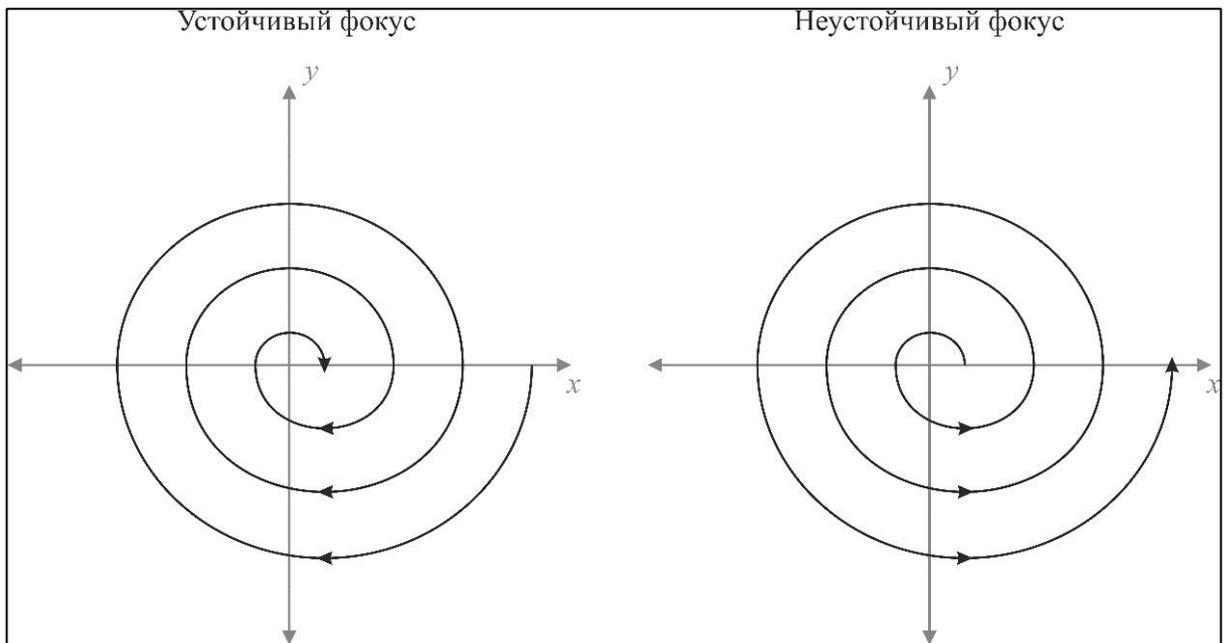


Рисунок 11 – Пример фазового портрета устойчивого и неустойчивого фокуса

б) Пусть λ_1, λ_2 чисто мнимые. В этом случае неподвижная точка называется центром. В этом случае фазовые траектории представляют собой эллипсы (рисунок 12). Положение равновесия типа «центр» является нейтрально устойчивым или устойчивым по Ляпунову.

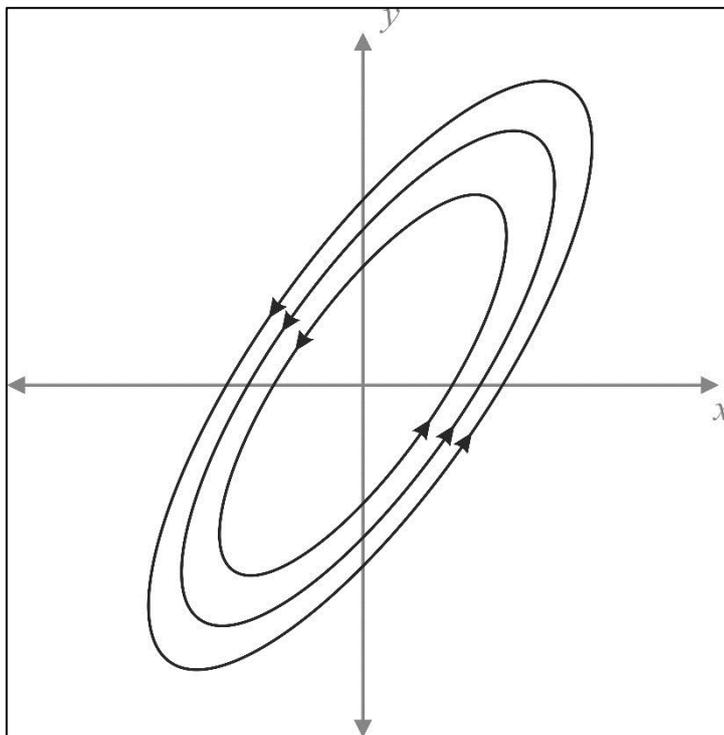


Рисунок 12 – Пример фазового портрета центра

2.2.2. Устойчивость в первом приближении

Рассмотрим автономную систему n дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

или в векторной форме

$$\dot{X} = f(X), \quad \text{где } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Для простоты изложения будем считать, что данная система имеет положение равновесия $X = \mathbf{0}$, которое будем исследовать на устойчивость.

Разложим функции f_i в ряд Тейлора по x в окрестности начала координат.

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + R_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

где $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(0, \dots, 0)$, R_i – члены второго порядка малости относительно x_1, \dots, x_n . Тогда исходную систему можно переписать в виде:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + R_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Вместо системы выше рассмотрим, так называемую, линеаризованную систему

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Для определения поведения траекторий в окрестности гиперболической неподвижной точки нелинейной динамической системы используется теорема Гробмана-Хартмана. В случае негиперболической неподвижной точки, необходимы дополнительные исследования, описанные в разделе 2.2.3.

Теорема 11 (Гробмана-Хартмана [6])

Пусть p – гиперболическая неподвижная точка диффеоморфизма f , а $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – линейная часть отображения f в точке p , записанная в локальных

координатах. Тогда найдутся окрестности U и V точки 0 и гомеоморфизм $h: (U \cup f(U)) \rightarrow (V \cup L(V))$, что $h \circ f = L \circ h$ на U .

Простыми словами, теорема утверждает, что поведение нелинейной динамической системы в окрестности гиперболической точки совпадает с её линейной частью в разложении Тейлора.

2.2.3. Сложные состояния равновесия

Рассмотренные положения равновесия в разделе 2.1.1 принято называть простыми состояниями, так как в нелинейных динамических системах при характеристических числах, не равных нулю, влиянием нелинейных членов можно пренебречь в некоторой окрестности неподвижной точки. Когда хотя бы одно из характеристических чисел обращается в ноль, нелинейные члены уже оказывают существенное влияние. Следовательно, нужны новые методы качественного анализа для описания поведения векторного поля в окрестности сингулярности. Далее в изложении будем следовать [1].

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = P(x, y), \dot{y} = Q(x, y)$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – аналитические функции.

Для простоты положим, что начало координат – сложное состояние равновесия, т.е.

$$\begin{aligned} P(0,0) = 0, \quad Q(0,0) = 0, \\ \Delta = \begin{vmatrix} P'_x(0,0) & P'_y(0,0) \\ Q'_x(0,0) & Q'_y(0,0) \end{vmatrix} = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Будем рассматривать случай, когда один из элементов матрицы Якоби, вычисленный в точке $(0,0)$, не равен нулю, т.е.

$$|P'_x(0,0)| + |P'_y(0,0)| + |Q'_x(0,0)| + |Q'_y(0,0)| \neq 0$$

Рассмотрим также сумму диагональных элементов линеаризованной системы σ

$$\sigma = P'_x(0,0) + Q'_y(0,0)$$

Из (16) вытекает два случая $\sigma \neq 0$ и $\sigma = 0$.

Характеристический вид уравнения имеет вид

$$\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0$$

I. $\Delta = 0, \sigma \neq 0$. В этом случае существует неособое линейное преобразование, тогда исходную систему можно представить в каноническом виде:

$$\dot{x} = P^*(x, y), \quad \dot{y} = by + Q^*(x, y),$$

где $b \neq 0$, а разложения по степеням x, y функций $P^*(x, y), Q^*(x, y)$ начинаются с членов не менее чем второго порядка.

Рассмотрим функцию

$$y = \varphi(x),$$

которая является решением уравнения

$$by + Q^*(x, y) = 0$$

Также введем функцию

$$\psi(x) = P^*(x, \varphi(x)) = \Delta_m x^m + \dots,$$

где $m \geq 2$. Число m характеризует кратность общей точки кривых $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Теорема 12. Состояние равновесия $(0,0)$, для которого $\Delta = 0, \sigma \neq 0$ может иметь следующий качественный характер:

а) характер седла (при m нечетном и $\Delta_m > 0$). В этом случае характер неподвижной точки будет называться сложным седлом;

б) характер узла (при m нечетном и $\Delta_m < 0$); причем при $b < 0$ узел устойчивый, при $b > 0$ – неустойчивый. В этом случае характер неподвижной точки будет называться сложным узлом;

в) состояние равновесия с одним узловым сектором и двумя седловыми (при m четном и любом знаке Δ_m). При $b < 0$ узловой сектор устойчивый, при $b > 0$ – неустойчивый. Кроме того, если $b\Delta_m < 0$, то траектории узлового сектора стремятся к началу координат слева от оси ординат. В этом случае точка называется седло-узлом.

II. $\Delta = 0, \sigma = 0$. В этом случае существует неособое линейное преобразование, с помощью которого система в окрестности начала координат может быть представлена в следующем каноническом виде:

$$\dot{x} = y + P_2^*(x, y), \quad \dot{y} = Q_2^*(x, y),$$

где $P_2^*(x, y), Q_2^*(x, y)$ – аналитические функции, разложения которых по степеням x, y начинаются с членов не менее чем второго порядка.

Рассмотрим следующие функции:

- 1) $y = \varphi(x)$, являющуюся решением уравнения

$$y + P^*(x, y) = 0$$

- 2) $y = \psi(x)$, определяемую формулой

$$\psi(x) = Q^*(x, \varphi(x)) = a_k x^k + \dots,$$

где $m \geq 2$. Число m характеризует кратность общей точки кривых $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

- 3) функцию

$$\sigma(x) = P_{2x}^*(x, \varphi(x)) + Q_{2y}^*(x, \varphi(x)) = b_n x^n + \dots$$

Теорема 13. Пусть k четное, $k = 2m$. Тогда:

- 1) в случае, если $n < m$, особая точки $(0,0)$ – седло-узел;
- 2) в случае, когда $n \geq m$, окрестность особой точки состоит из двух седловых секторов. В этом случае говорят о вырожденном седло-узле.

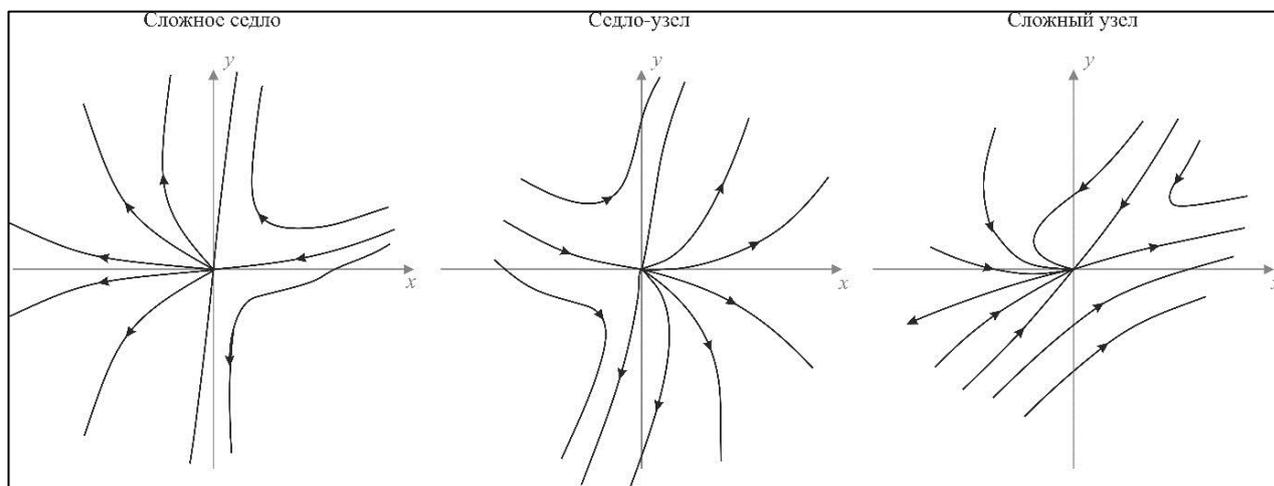


Рисунок 13 – Пример сложных состояний равновесия

Теорема 14. Пусть $k = 2m+1$ – нечетное число и $a_{2m+1} \neq 0$, и пусть $\gamma = b_n^2 + 4(m+1)a_{2m+1}$. Тогда:

- 1) если $a_{2m+1} > 0$, то особая точка имеет качественный характер седла;
- 2) если $a_{2m+1} < 0$, то особая точка имеет:
 - a) характер фокуса или центра при $n > m$, а также при $n = m$ и $\gamma < 0$;
 - b) характер узла, если n четное и при этом $n < m$ или $n = m$ и $\gamma \geq 0$;

- с) одну замкнутую узловую (эллиптическую) область, две сопровождающие её узловые области и одну седловую область, если n – нечетное число и при этом $n < t$ или $n = t$ и $\gamma \geq 0$.

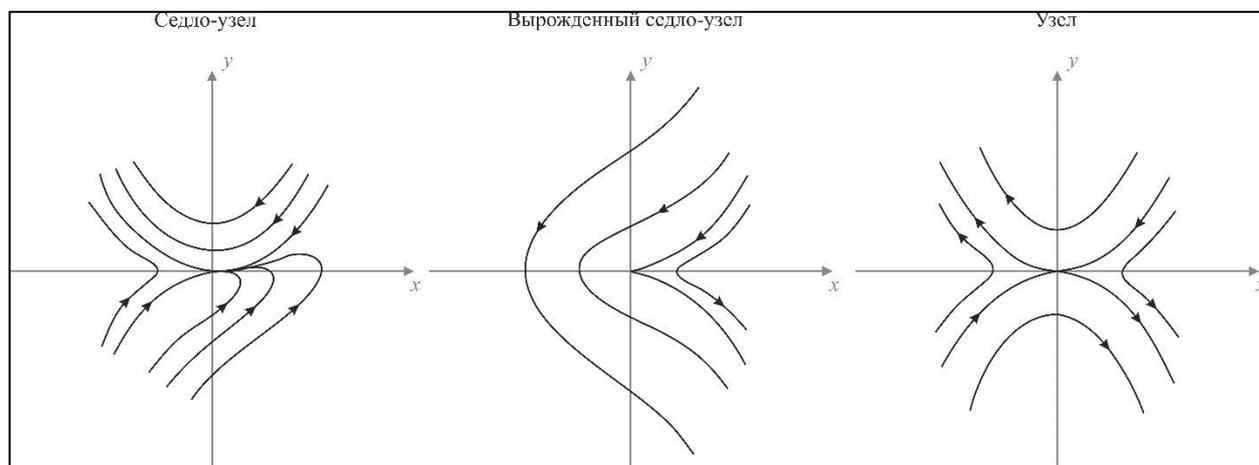


Рисунок 14 – Пример сложных состояний равновесия

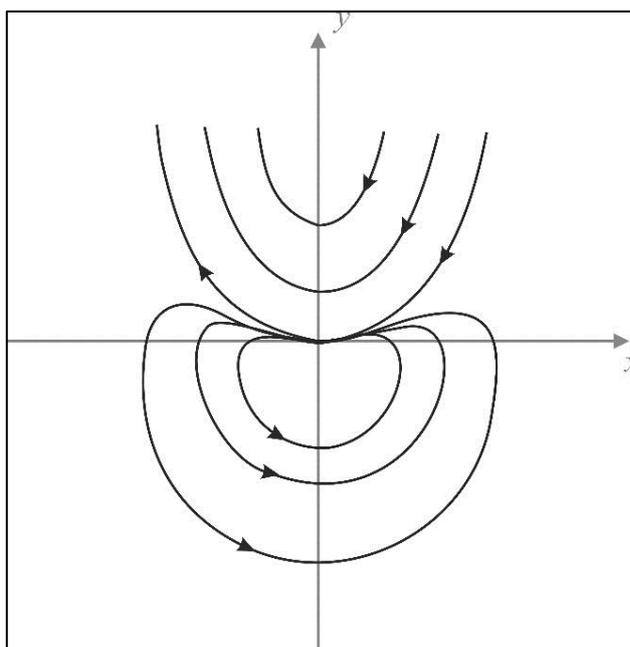


Рисунок 15 – Пример сложного состояния равновесия

2.3. Компактификация Пуанкаре

Для изучения поведения траекторий при удалении в бесконечность используется отображение на сферу Пуанкаре (или компактификация Пуанкаре).

Метод компактификации состоит в том, что точки (x, y) плоскости отображаются на сферу так, чтобы прямая, проходящая через точки на плоскости и сфере, проходила через центр сферы. Тогда на экватор (большой

круг, параллельный плоскости (x, y)) отображаются бесконечно удаленные точки плоскости (рисунок 16).

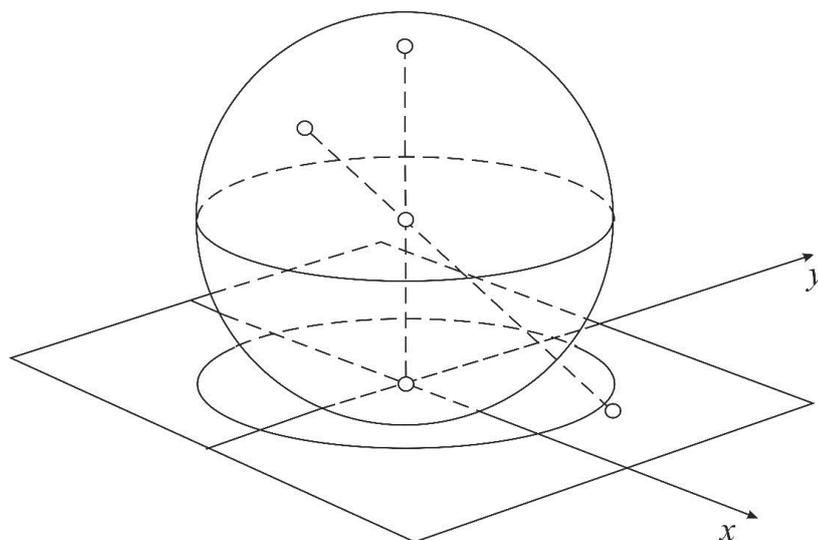


Рисунок 16 – Сфера Пуанкаре

Траектории, лежащие на плоскости, перейдут при этом в соответственные кривые сферы, причем кривые в окрестности гиперболических точек сохраняют вид.

Как было сказано, на экватор отобразятся бесконечно удаленные точки, среди которых будут новые сингулярные точки. Часто это будут особые точки высших порядков. Ортогональная проекция нижнего полушария на плоскость, касательную к сфере, дает удобное окончательное отображение всей плоскости (x, y) на внутренность круга.

Рассмотрим систему:

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y), \quad (16)$$

где $P(x, y)$, $Q(x, y)$ – многочлены по x и y .

Определим сферу Пуанкаре как $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ и определим центральную проекцию $f: T_{(0,0,1)} \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ ($T_{(0,0,1)} \mathbb{S}^2$ касательное пространство \mathbb{S}^2 в точке $(0,0,1)$) такое, что для каждой точки $q \in T_{(0,0,1)} \mathbb{S}^2$, пространство $T_{(0,0,1)} \mathbb{S}^2$ ставит в соответствие две точки пересечения прямой линии, которая соединяет q и $(0,0)$. Экватор $\mathbb{S}^1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2: z = 0\}$ описывает бесконечные точки из \mathbb{R}^2 . Необходимо выполнить исследования

сферы Пуанкаре в окрестности карт $U_i = \{Y \in \mathbb{S}^2: y_i > 0\}$ с диффеоморфизмом $F_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^2, i = 1, 2$.

На практике применяется преобразование вида $x = l/z, y = u/z$, с помощью которого удобно изучать особые точки, принадлежащие экватору сферы Пуанкаре, но это преобразование не позволяет изучать точки, которые соответствуют «концам» оси y . В таком случае следует воспользоваться отображением вида $x = v/z, y = l/z$. В этом случае плоскость (z, v) будет располагаться параллельно оси x .

Таким образом, для исследования поведения траекторий при удалении в бесконечность, необходимо выполнить компактификацию Пуанкаре, с помощью которой можно исследовать бесконечно удаленные неподвижные точки.

2.4. Метод усреднения

В качестве основного материала по теории усреднения будем использовать источник [20], где качественно и подробно описаны необходимые нам методы.

Рассматривается система вида:

$$x'(t) = \sum_{i=0}^k \varepsilon^i F_i(t, x) + \varepsilon^{k+1} R(t, x, \varepsilon). \quad (17)$$

где $F_i: \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n, i = 1, 2 \dots k$ и $R: \mathbb{R} \times D \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ – непрерывные функции, T -периодические в первой переменной в случае открытого подмножества $D \subset \mathbb{R}^n$.

Для усреднения уравнения выше необходимо ввести обозначения. Пусть $x = (x_1, \dots, x_n) \in D$ и пусть $y_j = (y_{j1}, \dots, y_{jn}) \in \mathbb{R}^n$ при $j = 1 \dots l$. Обозначим через $\frac{\partial^L}{\partial x^L} F_m(s, x)$ симметричную L -мультилинейную карту, применяемую к производной L векторов из \mathbb{R}^n , которую обозначим как $\odot_{j=1}^l y_j^{b_j} \in \mathbb{R}^{nL}$, где $L = b_1 + b_2 + \dots + b_l$ и $y_j^{b_j} = (y_j, \dots, y_j) \in \mathbb{R}^{nb_j}$. Определение L -мультилинейной карты:

$$\frac{\partial^L}{\partial x^L} F_m(s, x) \odot_{j=1}^l y_j^{b_j} = \sum_{i_1, \dots, i_L=1}^n \frac{\partial^L F_j(s, x)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_L}} y_{1i_1} \dots y_{1i_{b_1}} y_{2i_{b_1+1}} \dots y_{2i_{b_1+b_2}} y_{li_{b_1+\dots+b_{l-1}+1}} \dots y_{li_{b_1+\dots+b_l}} \quad (18)$$

Определим $f_i: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ при $i = 1 \dots k$ как

$$f_i(z) = y_i(T, z)/i!, \quad (19)$$

где $y_i \in \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ при $i = 1, 2, \dots, k-1$, определенные рекуррентно следующими интегральными уравнениями:

$$y_i(t, z) = i! \int_0^t \left(F_i(s, z) + \sum_{l=1}^i \sum_{S_l} \frac{1}{b_1! b_2! 2!^{b_2} \dots b_l! l!^{b_l}} \frac{\partial^L}{\partial z^L} F_{i-l}(s, z) \odot_{j=1}^l y_j(s, z)^{b_j} \right) ds \quad (20)$$

где

- (b_1, b_2, \dots, b_l) – неотрицательные корни уравнения

$$b_1 + 2b_2 + \dots + lb_l = l \quad (21)$$

- $L = b_1 + \dots + b_l$

- S_l – множество всех неотрицательных наборов (b_1, b_2, \dots, b_l) .

Теорема 15. Пусть $F_0 \equiv 0$. Также для функций дифференциальной системы (3) предполагаем следующие условия

(i) $F_i(t, *) \in C^{k-i}$ для всех $t \in \mathbb{R}$ при $i = 1, 2 \dots k$, и R и F_k удовлетворяют условию Липшица по x .

(ii) Предположим, что $f_i \equiv 0$ при $i = 1, 2 \dots r-1$ и $f_r \not\equiv 0$ при $r \in \{1, 2, \dots, k\}$ (здесь по определению $f_0(z) \equiv 0$). Более того, предположим, что для $a \in D$ при $f_r(a) = 0$ существует окрестность $V \subset D$ такая, что $f_r(z) \neq 0$ для всех $z \in \bar{V} \setminus \{a\}$ и что показатель Бrouwera $d_B(f_r(z), V, a) \neq 0$.

Тогда для достаточно малого $|\varepsilon| > 0$ существует T -периодическое решение $x(*, \varepsilon)$ системы (3), такое что $x(0, \varepsilon) \rightarrow a$, где $\varepsilon \rightarrow 0$.

Недостатком этого алгоритма является большой объём вычислений, который сопряжен с «тяжелыми» операциями такими, как: вычисление факториала, возведение в степень и их произведение. Показательная функция и

факториал являются быстрорастущими, поэтому их использование замедляет и усложняет вычисления при росте порядка усреднения.

2.5. Диофантовы уравнения

Диофантовыми уравнениями называют уравнения с целыми коэффициентами, для которых требуется найти целочисленные решения.

В нашей работе достаточным будет рассмотреть линейные неоднородные диофантовы уравнения вида:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

Для решения этого уравнения будем пользоваться теоремой из [7].

Теорема 16. Любое решение линейного диофантового уравнения $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$, при $(a_1, a_2, \dots, a_n) | b$ имеет вид $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$, где $a_k x_k^{(0)} \equiv b_k \pmod{\Delta_{k+1}}$ при $1 \leq k \leq n - 1$; $x_n^{(0)} = \frac{b_n}{\Delta_n}$; b_k определяются рекуррентными соотношениями $b_k = b_{k-1} - a_{k-1}x_{k-1}^{(0)}$; $2 \leq k \leq n$. $\Delta_i = \text{НОД}(a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$.

Теорема является удобной в использовании, так как задает алгоритм поиска корней диофантового уравнения, используя рекуррентные соотношения, что легко переносится в программный код.

Программная реализация данной теоремы представлена в виде блок-схемы в приложениях 1-3.

ГЛАВА 3. ИССЛЕДОВАНИЕ ОБОБЩЕННОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ КУКЛЕСА

В этой главе изложены результаты исследования конечных и бесконечных неподвижных точек, а также классификация глобальных фазовых траекторий на диске Пуанкаре. В последнем разделе главы представлены результаты исследования количества предельных циклов возмущенной системы Куклеса.

Перейдем к рассмотрению системы Куклеса четной степени $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y \\ \dot{y} &= x + ax^n + bx^{n/2}y^{n/2} + cy^n \end{aligned} \quad (22)$$

где $x, y \in \mathbb{R}$ и $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$, $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Необходимо найти конечные и бесконечные сингулярные точки системы (23) и исследовать количество предельных циклов в возмущенной системе Куклеса (24):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + \sum_{s=1}^n \varepsilon^s \sum_{0 \leq i+j \leq n} \alpha_{ij}^{(s)} x^i y^j \\ \dot{y} &= x + ax^n + bx^{\frac{n}{2}} y^{\frac{n}{2}} + cy^n + \sum_{s=1}^n \varepsilon^s \sum_{0 \leq i+j \leq n} \beta_{ij}^{(s)} x^i y^j \end{aligned} \quad (23)$$

Замечание. Система (23) инвариантна относительно замены

$$(x, y, t, a, b, c) \rightarrow (-x, y, -t, -a, -b, -c).$$

Тогда нам достаточно изучать фазовые портреты системы (23), когда:

1. $a = 0, b \geq 0$ и $c \geq 0$;
2. $a = 0, b > 0$ и $c < 0$;
3. $a > 0, b \geq 0$ и $c \geq 0$;
4. $a < 0, b > 0$ и $c = 0$;
5. $a > 0, b \geq 0$ и $c < 0$;
6. $a > 0, b < 0, c > 0, b^2 - 4ac = 0$;
7. $a > 0, b < 0, c > 0$ и $b^2 - 4ac > 0$.

Также стоит отметить, что система (23) симметрична относительно оси ординат.

3.1 Неподвижные точки системы

3.1.1 Конечные неподвижные точки

Воспользуемся определением неподвижной точки:

$$-y = 0$$

$$x + ax^n + bx^{n/2}y^{n/2} + cy^n = 0$$

Система имеет две неподвижные точки $(0; 0)$ и $(\sqrt[n-1]{-1/a}; 0)$ при $a \neq 0$ и одну неподвижную точку $(0; 0)$ при $a = 0$. Исследуем тип равновесия этих точек и выясним их устойчивость в первом приближении. Линеаризованная система (23) примет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 + anx^{n-1} + \frac{bn}{2}x^{n/2-1}y^{n/2} & cny^{n-1} + \frac{bn}{2}x^{n/2}y^{n/2-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

1. Точка $(0; 0)$.

Вычислим матрицу Якоби в начале координат:

$$Ja(0; 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Легко найти собственные значения матрицы Якоби $Ja(0; 0)$: $\lambda_{1,2} = \pm i$. Таким образом, начало координат - негиперболическая точка. Следовательно, в данном случае нельзя воспользоваться теоремой Гробмана-Хартмана. Но, как было сказано в разделе 1.2.1, точка $(0,0)$ является неподвижной точкой типа центр в силу теоремы 4.

2. Точка $(\sqrt[n-1]{-1/a}; 0)$, $a \neq 0$.

Вычислим матрицу Якоби в точке равновесия:

$$J(\sqrt[n-1]{-1/a}; 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ n-1 & 0 \end{pmatrix}$$

Нетрудно найти собственные значения матрицы Якоби: $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{n-1}$. Следовательно, в характер неподвижной точки - седло.

3.1.2 Бесконечные сингулярные точки

Для исследования поведения траекторий на бесконечности будем использовать отображение на сферу Пуанкаре (раздел 2.2). Сформулируем теорему о бесконечных неподвижных точках и их характере на диске Пуанкаре.

Теорема 17. На карте (U_1, F_1) система (8) имеет:

- (a) начало координат как линейная нулевая неподвижная точка, и её локальный фазовый портрет состоит из четырех гиперболических секторов, если $a = 0, b \geq 0$ и $c \geq 0$;
- (b) три бесконечные неподвижные точки: начало координат и два седло-узла в точках $(\pm \sqrt[n/2]{-b/c}, 0)$, если $a = 0, b > 0, c < 0$;
- (c) нет неподвижных точек, если $a > 0, b \geq 0, c \geq 0$;
- (d) два бесконечных седло-узла $(\pm \sqrt[n/2]{-a/b}, 0)$, если $a < 0, b > 0, c = 0$;
- (e) два бесконечных седло-узла $(\pm \sqrt[n/2]{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}}, 0)$, если $a > 0, b \geq 0, c < 0$;
- (f) две бесконечные линейные нули неподвижные точки $(\pm \sqrt[n/2]{-b/2c}, 0)$ такие, что их локальные портреты состоят из двух гиперболических и двух параболических секторов, если $a > 0, c > 0, b^2 = 4ac$ и $b < 0$;
- (g) четыре бесконечных седло-узла

$$\left(\pm \sqrt[n/2]{(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})/(2c)}, 0\right), \left(\pm \sqrt[n/2]{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})/(-2c)}, 0\right),$$

если $a > 0, b^2 - 4ac > 0, b < 0$ и $c > 0$.

Начало координат на карте (U_2, F_2) :

- (h) устойчивый узел при $c > 0$ и неустойчивый узел при $c < 0$
- (i) линейный ноль. Неподвижная точка такая, что её локальный портрет состоит из четырех параболических секторов, если $c = 0$.

Доказательство.

Дифференциальная система (23) на карте U_1 задается системой:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= a + bu^{\frac{n}{2}} + cu^n + v^{n-1} + u^2v^{n-1} \\ \dot{v} &= uv^n \end{aligned} \tag{24}$$

- a) $a = 0, b \geq 0, c \geq 0$. В этом случае система примет вид:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= bu^{\frac{n}{2}} + cu^n + v^{n-1} + u^2v^{n-1} \\ \dot{v} &= uv^n \end{aligned} \tag{25}$$

В этом случае единственная неподвижная линейно нулевая точка $(0;0)$.

Чтобы изучить поведение траекторий в окрестности неподвижной точки, необходимо выполнить замену $(u, v) \rightarrow (u, w)$, $w = v/u$ и ремасштабирование $u^{\frac{n}{2}-1} dt = ds$. Имеем систему:

$$\begin{aligned}\dot{u} &= bu + cu^{\frac{n}{2}+1} + u^{\frac{n}{2}}w^{n-1} + u^{\frac{n}{2}+2}w^{n-1} \\ \dot{w} &= -bw - cu^{\frac{n}{2}}w - u^{\frac{n}{2}-1}w^n\end{aligned}\quad (26)$$

Система (27) имеет единственную точку равновесия $(0;0)$ с характеристическими числами $\lambda_{1,2} = \pm b$. Возвращаясь к исходной системе, можно заключить, что локальный фазовый портрет имеет четыре гиперболических сектора.

Если $a = 0$, $b = 0$, $c > 0$, то в этом случае система (23) примет вид:

$$\begin{aligned}\dot{u} &= cu^{\frac{n}{2}+1} + u^{\frac{n}{2}}w^{n-1} + u^{\frac{n}{2}+2}w^{n-1} \\ \dot{w} &= -cu^{\frac{n}{2}}w - u^{\frac{n}{2}-1}w^n\end{aligned}\quad (27)$$

Система (28) имеет линейно нулевую точку в начале координат. Делая замену $(u, w) \rightarrow (u, z)$, $z = w/u$ и ремасштабирование $u^{n-1} ds = d\tau$, получаем систему

$$\begin{aligned}\dot{u} &= cu + z^{n-1}u^{n-1} + z^{n-1}u^{n+1} \\ \dot{z} &= -2cz - 2z^n u^{n-2} - z^n u^n\end{aligned}\quad (28)$$

Система (29) имеет одно седло в центре координат с характеристическими числами $\lambda_1 = c$ и $\lambda_2 = -2c$. Возвращаясь к заменам, можно заключить, что локальный фазовый портрет в окрестности начала координат образован четырьмя гиперболическими секторами.

Если $a = 0$, $b > 0$, $c = 0$, то из системы (23) мы имеем следующую систему при замене переменных $u^{\frac{n}{2}-1} ds = d\tau$:

$$\begin{aligned}\dot{u} &= bu + u^{\frac{n}{2}}w^{n-1} + u^{\frac{n}{2}+2}w^{n-1} \\ \dot{w} &= -bw - u^{\frac{n}{2}-1}w^n\end{aligned}\quad (29)$$

Система (30) имеет одно седло в начале координат с собственными значениями $\lambda_{1,2} = \pm b$. Возвращаясь к замене переменных, окрестность начала координат состоит из четырех гиперболических секторов.

Таким образом, (a) доказано.

b) $a = 0, b > 0, c < 0$. В этом случае система (23) имеет три неподвижные точки: $(0;0)$ – такой же характер, как в пункте (a), $(\pm \sqrt[n]{-b/c}; 0)$ – бесконечные полугиперболические неподвижные точки с характеристическими числами $\lambda_1 = \mp \frac{n}{2} \frac{b^2}{c} (-c/b)^{\frac{2}{n}}$ и $\lambda_2 = 0$. По теореме 2 [1, с.87] эти точки – седло-узлы.

Таким образом, (b) доказано.

c) $a > 0, b \geq 0, c \geq 0$. Система (23) не имеет неподвижных точек.

d) $a < 0, b > 0, c = 0$. Система (23) примет вид:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= a + bu^{\frac{n}{2}} + v^{n-1} + u^2v^{n-1} \\ \dot{v} &= uv^n \end{aligned} \quad (30)$$

Эта система имеет две неподвижные точки $(\pm \sqrt[n]{-\frac{a}{b}}; 0)$ с характеристическими числами $\lambda_1 = \mp \frac{n}{2} \frac{b^2}{c} \left(-\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{n}}$ и $\lambda_2 = 0$. Применяем замену $u = z \pm \sqrt[n]{-\frac{a}{b}}$ к системе (31). В силу теоремы 2 [1, с.87] эти точки – седло-узел.

Таким образом, (d) доказано.

e) $a > 0, b \geq 0, c < 0$. Система (23) при $v = 0$ имеет две неподвижные точки. $(\pm \sqrt[n]{(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})/2c}; 0)$ с собственными значениями

$\lambda_1 = \frac{b}{2} \left(\pm \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c} \right)^{1 - \frac{2}{n}} + cn \left(\pm \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c} \right)^{2 - \frac{2}{n}}$ и $\lambda_2 = 0$. В силу теоремы 2 [1, с.87] эти точки – седло-узлы.

Таким образом, (e) доказано.

f) $a > 0, b^2 = 4ac, b < 0, c > 0$. Мы получаем следующую систему:

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \frac{(2a + bu^{\frac{n}{2}})^2}{4a} + (1 + u^2)v^{n-1} \\ \dot{v} &= uv^n\end{aligned}\quad (31)$$

Эта система имеет две неподвижные точки $(\pm \sqrt{\frac{n}{2}} \sqrt{-\frac{2a}{b}}; 0)$, которые являются линейно нулевыми. В силу симметричности системы (17) достаточно рассмотреть одну из точек, например, $(\sqrt{\frac{n}{2}} \sqrt{-\frac{2a}{b}}; 0)$. Выполним две замены:

$u = z - \sqrt{\frac{n}{2}} \sqrt{-\frac{2a}{b}}$ и $(z, v) \rightarrow (z, w)$, $w = v/z$. Получим систему:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \frac{a}{z} + \frac{b \left(z + \sqrt{\frac{n}{2}} \sqrt{-\frac{2a}{b}} \right)^{\frac{n}{2}}}{z} + \frac{b^2}{4az} \left(z + \sqrt{\frac{n}{2}} \sqrt{-\frac{2a}{b}} \right)^n + w^{n-1} z^{n-2} + \\ &+ w^{n-1} z^n + 2 \sqrt{\frac{n}{2}} \sqrt{-\frac{2a}{b}} w^{n-1} z^{n-1} + 2 \sqrt{\frac{n}{4}} \sqrt{-\frac{2a}{b}} w^{n-1} z^{n-2} \\ \dot{w} &= -\frac{aw}{z^2} - \frac{bw \left(z + \sqrt{\frac{n}{2}} \sqrt{-\frac{2a}{b}} \right)^{\frac{n}{2}}}{z^2} - \frac{b^2}{4az^2} w \left(z + \sqrt{\frac{n}{2}} \sqrt{-\frac{2a}{b}} \right)^n - \\ &- w^n z^{n-3} - w^n z^{n-2} \sqrt{\frac{n}{2}} \sqrt{-\frac{2a}{b}} - w^n z^{n-3} \sqrt{\frac{n}{4}} \sqrt{-\frac{2a}{b}}\end{aligned}\quad (32)$$

При $z = 0$ система (33) имеет одно седло в начале координат с собственными значениями $\pm \left(a \left(-\frac{2a}{b} \right)^{-\frac{4}{n}} (C_n^2 - 2C_{n/2}^2) \right)$, C_n^k – количество сочетаний. Делая обратную замену, получаем, что фазовый портрет в окрестности точки $\sqrt{\frac{n}{2}} \sqrt{-\frac{2a}{b}}$ образован двумя гиперболическими и двумя параболическими секторами.

Таким образом, (f) доказано.

g) $a > 0, b^2 - 4ac > 0, b < 0, c > 0$ В этом случае система (23) имеет четыре полугиперболические неподвижные точки: $(\pm \sqrt{\frac{n}{2}(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})/2c}; 0)$ с собственными значениями

$$\lambda_1 = n2^{\frac{2}{n}-4}(b^2 - 4ac)^{\frac{2}{n}}((-b + \sqrt{b^2 - 4ac})/c)^{1-\frac{2}{n}} \text{ и } \lambda_2 = 0;$$

$(\pm \sqrt{\frac{n}{2}(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})/2c}; 0)$ с собственными значениями

$\lambda_1 = -n2^{\frac{2}{n}-4}(b^2 - 4ac)^{\frac{2}{n}}((-b + \sqrt{b^2 - 4ac})/c)^{1-\frac{2}{n}}$ и $\lambda_2 = 0$. По теореме 2 [1, с.87] эти точки – седло-узлы.

Таким образом, (g) доказано.

Дифференциальная система (23) на карте U_2 задается следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -au^{n+1} - bu^{\frac{n}{2}+1} - cu - v^{n-1}(1 + u^2) \\ \dot{v} &= -au^n v - bu^{\frac{n}{2}}v - cv - uv^n \end{aligned} \quad (33)$$

Если $c \neq 0$, то система имеет в начале координат гиперболический узел с собственными значениями $-c$ и $-c$. Следовательно, точка будет устойчивой в случае положительного c , иначе – неустойчивой.

Если $c = 0$, то система примет вид:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -au^{n+1} - bu^{\frac{n}{2}+1} - v^{n-1}(1 + u^2) \\ \dot{v} &= -au^n v - bu^{\frac{n}{2}}v - uv^n \end{aligned} \quad (34)$$

В этом случае начало координат – линейно нулевая неподвижная точка дифференциальной системы (23). Выполним замену $(z, v) \rightarrow (z, w), w = v/z$ и ремасштабирование $u^{\frac{n}{2}}dt = ds$.

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -bu - au^{\frac{n}{2}+1} - (u^2 + 1)u^{\frac{n}{2}-1}w^{n-1} \\ \dot{v} &= u^{\frac{n}{2}-2}w^n \end{aligned} \quad (35)$$

Когда $u = 0$ начало координат – единственная неподвижная точка с собственными значениями 0 и $-b$. Следовательно, имеем полугиперболическую

точку. Характер её устойчивости – седло-узел. Возвращаясь к замене, можно заключить, что система имеет четыре параболических сектора.

Таким образом, теорема 3 доказана.

3.2 Фазовые портреты на диске Пуанкаре

Выяснив характер устойчивости конечных и бесконечных особых точек, приведенных в разделе 3.1, мы можем описать всевозможные фазовые портреты системы (1).

Теорема 18. Множество всех глобальных фазовых портретов на диске Пуанкаре дифференциальной системы (23) топологически эквивалентно фазовым портретам, изображенным на рисунке 17.

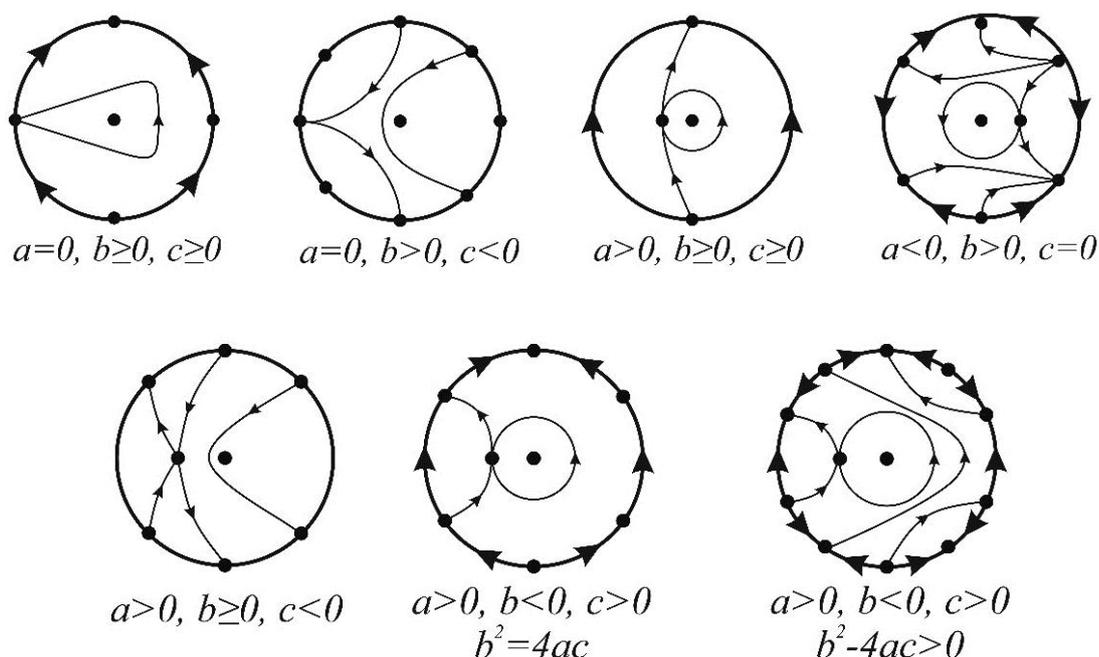


Рисунок 17 – Глобальные фазовые портреты на диске Пуанкаре системы

Таким образом, всего возможно семь возможных качественных глобальных фазовых портретов, зависящих от коэффициентов a, b, c . В дальнейшем планируется провести классификацию для полиномиальной системы Куклеса нечетной степени.

3.3 Предельные циклы

Рассмотрим возмущенную обобщенную полиномиальную дифференциальную систему Куклеса (23).

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + \sum_{s=1}^n \varepsilon^s \sum_{0 \leq i+j \leq n} \alpha_{ij}^{(s)} x^i y^j \\ \dot{y} &= x + ax^n + bx^{n/2}y^{n/2} + cy^n + \sum_{s=1}^n \varepsilon^s \sum_{0 \leq i+j \leq n} \beta_{ij}^{(s)} x^i y^j\end{aligned}\tag{36}$$

Для изучения периодических решений с помощью теории усреднения, систему (37) необходимо привести к специальному виду.

В первую очередь перейдем в полярную систему координат. Для этого воспользуемся соотношением:

$$\dot{r} = \frac{(x\dot{x} + y\dot{y})}{r}, \quad \dot{\theta} = \frac{(x\dot{y} - y\dot{x})}{r^2},$$

где $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$.

Далее, выбирая в качестве независимой переменной угол θ , получаем дифференциальное уравнение $dr/d\theta$ и, выполняя разложение в ряд Тейлора до выбранной степени осреднения, перепишем систему в виде

$$\frac{dr}{d\theta} = \sum_{i=0}^{avg-1} \varepsilon^i F_i(\theta, r) + O(\varepsilon^{avg})\tag{37}$$

Для дальнейшего анализа уравнения (38) применим теорию усреднения дифференциальных уравнений. Задача усреднения разбивается на три основных шага:

1. Поиск корней уравнения (22);
2. Составление функций y_i уравнения (21);
3. Вычисление f_i уравнения (20).

Особое внимание следует уделить пункту 1, так как это задача целочисленного программирования, а уравнение (22) относится к линейному неоднородному диофантовому уравнению, решение которого осуществлялось методике, описанной в разделе 2.5.

Блок-схемы реализованной программы представлены в приложениях 1-3.

Приведем сравнение результатов работы алгоритма с ранее полученными результатами, а также времени работы программы. Получен новый результат для системы (37) 10 порядка.

Таблица 1 – Результаты тестирования

Степень уравнения	Степень усреднения	Количество предельных циклов		Время работы алгоритма, с
		Ранее полученные результаты	Программная реализация	
10	1 / 2	-	0	1,164 / 1,181
	3 / 4	-	1	1,227 / 1,302
	5 / 6	-	2	1,499 / 1,952
	7 / 8	-	3	2,731 / 7,376
	9 / 10	-	4	21,62 / 36,51
8	1 / 2	0	0	1,059 / 1,101
	3 / 4	1	1	1,235 / 1,298
	5 / 6	2	2	1,548 / 1,963
	7 / 8	-	3	2,692 / 7,160
6	1 / 2	0	0	1,178 / 1,122
	3 / 4	1	1	1,182 / 1,447
	5 / 6	2	2	1,543 / 2,051
4	1 / 2	0	0	1,053 / 1,091
	3 / 4	1	1	1,228 / 1,369

Иллюстрация предельных циклов

В качестве иллюстрации предельных циклов выбрана система (37) порядка $n = 8$ со степенью осреднения 4. Коэффициенты $\alpha_{ij}^{(s)}, \beta_{ij}^{(s)}$ задавались случайным образом. На рисунке 18 показано векторное поле заданной системы и две траектории с различным начальным положением.

Так как внешняя траектория «закручивается» к центру, а внутренняя траектория «раскручивается» от центра, то существует предельная траектория, к которой стремятся эти две траектории. Следовательно, существует устойчивый предельный цикл.

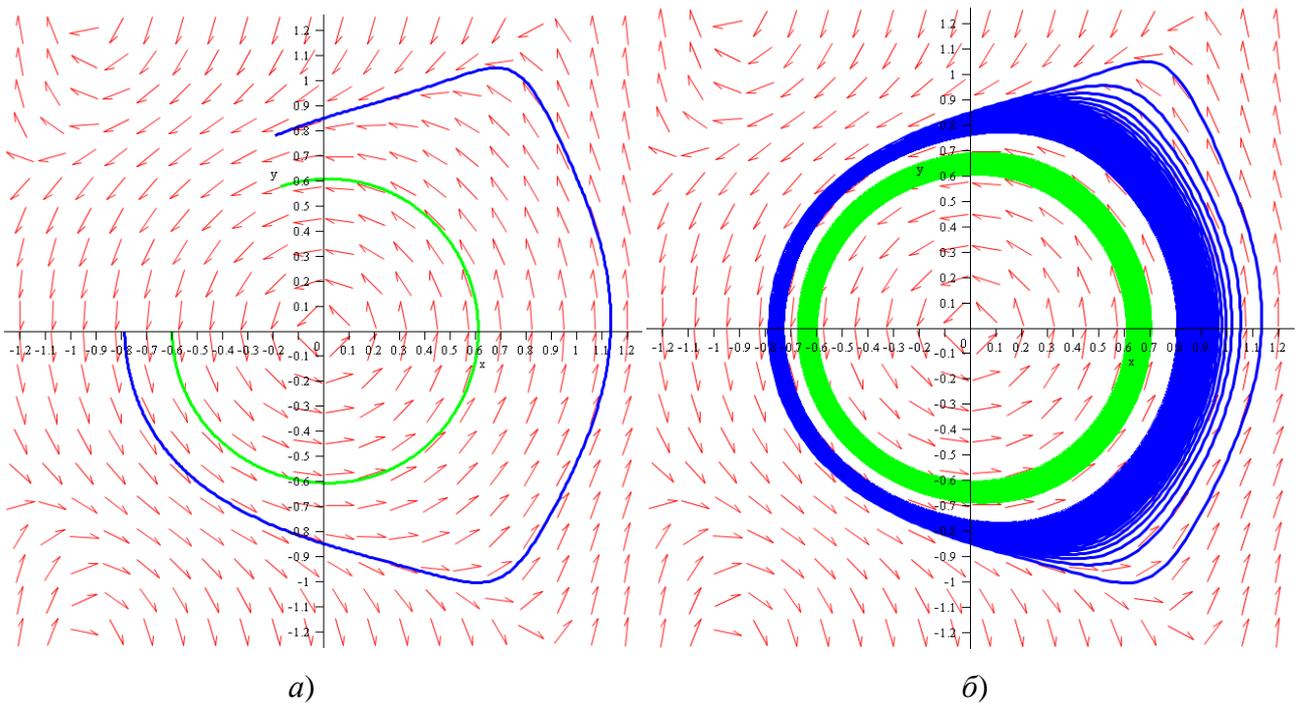


Рисунок 18 – Пример динамической системы с предельным циклом
 Эволюция траекторий системы (37) при $n = 8$ со степенью осреднения 4 и $a = 0, b = 3, c = -1, \varepsilon = 0.01$. Начальная точка траекторий: внешняя траектория: $x(0) = -0.788, y(0) = 0$; внутренняя траектория: $x(0) = -0.600, y(0) = 0$. а) $t = 0..5$, б) $t = 0..1000$.

3.4 Программная реализация

Описанные в работе алгоритмы были перенесены в программный код среды разработки Matlab.

В приложении 1 показан общий алгоритм решения задачи усреднения. Первым действием пользователь вводит порядок уравнения и степень усреднения. Далее программа с помощью перехода к полярной системе координат и разложении в ряд Тейлора приводит систему к специальному виду. После этого применяются алгоритмы теории усреднения (раздел 2.4) и программа дает ответ на вопрос о количестве предельных циклов системы.

В приложении 2 более детально описан алгоритм приведения системы к специальному виду. Как было сказано, для начала пользователь вводит порядок уравнения и степень усреднения. Далее программа записывает в память возмущённую систему Куклеса и переводит её в полярную систему координат с помощью элементарных преобразований. На последнем шаге алгоритм производит разложение в ряд Тейлора для дальнейших операций над системой.

В приложении 3 представлена блок-схема решения диофантового уравнений. Теорема, на которую опирается алгоритм, представлен в разделе 2.5. На вход программа получает степень усреднения, ранее введенную пользователем. Далее в цикле решается задача поиска корней уравнения. Следуя алгоритму, последовательно вычисляются НОД коэффициентов уравнения, вычисляется корень уравнения и преобразовывается правая часть для дальнейших вычислений. В конце работы алгоритма, пользователь может увидеть корни уравнения.

3.5 Апробация работы

По результатам исследования сформирована статья, которая была отправлена в журнал «Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки» (Россия, 440026, г. Пенза, ул. Красная, д. 40). Данное издание входит в Russian Science Citation Index (RSCI) на платформе Web of Science. Статья прошла двойное слепое рецензирование и принята к публикации в выпуск №2 за 2022 год. Справка-подтверждение о включении статьи в журнал представлена на рисунке 18.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Пензенский государственный университет»
(ФГБОУ ВО «ПГУ»)
ул. Красная, д. 40, г. Пенза, Россия, 440026
Тел/факс: (841-2) 56-51-22, e-mail: cnit@pnzgu.ru, <http://www.pnzgu.ru>
ОКПО 02069042, ОГРН 1025801440620, ИНН/КПП 5837003736/583701001

14.06.2022 № 31-285
На № _____ от _____

И.Н. Малькову, В.В. Мачулису

Редакция журнала «Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки» подтверждает, что статья И. Н. Малькова, В. В. Мачулиса «Неподвижные точки и предельные циклы обобщенной полиномиальной дифференциальной системы Куклеса» включена в содержание журнала №2 за 2022 год.

С уважением,
Проректор по НР и ИД ПГУ
д.э.н., профессор


Васин С.М.

Исп. Нач. РНЖ
Афанасьева Ю.Л.
тел: 64-32-89

Рисунок 19 – Справка-подтверждение о включении статьи в журнал

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Магистерская диссертация посвящена качественной теории динамических систем, а именно, изучению локальных и глобальных фазовых портретов и периодических решений.

В главе 1 представлен краткий обзор литературных источников, помогающий оценить научную освещённость изучаемой темы, увидеть основные тенденции международной научной среды, познакомиться с новыми методами исследования дифференциальных систем.

В связи с этим в главе 2 изложена методология, которая служит прочной базой для дальнейших исследований. Стоит отметить, что описанные способы исследования динамических систем, связывают, казалось бы, несвязанные области математики – динамические системы и теорию чисел (высшая арифметика). Это лишний раз доказывает единство математики.

В главе 3 исследованы неподвижные точки полиномиальной системы Куклеса четной степени $n \geq 2$. Представлена классификация глобальных фазовых портретов. Реализован программный код, ускоряющий поиск ответа на вопрос о количестве предельных циклов с помощью теории усреднения. Впервые получена оценка для системы Куклеса 10 порядка. Также представлен алгоритм решения задачи о количестве предельных циклов.

По результатам магистерской диссертации сформирована статья, которая принята к публикации в выпуск №2 2022 года в журнал «Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки» (RSCI).

В дальнейшем планируется получить аналитическую зависимость количества предельных циклов от порядка системы и степени её усреднения, а также исследовать систему Куклеса нечетной степени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

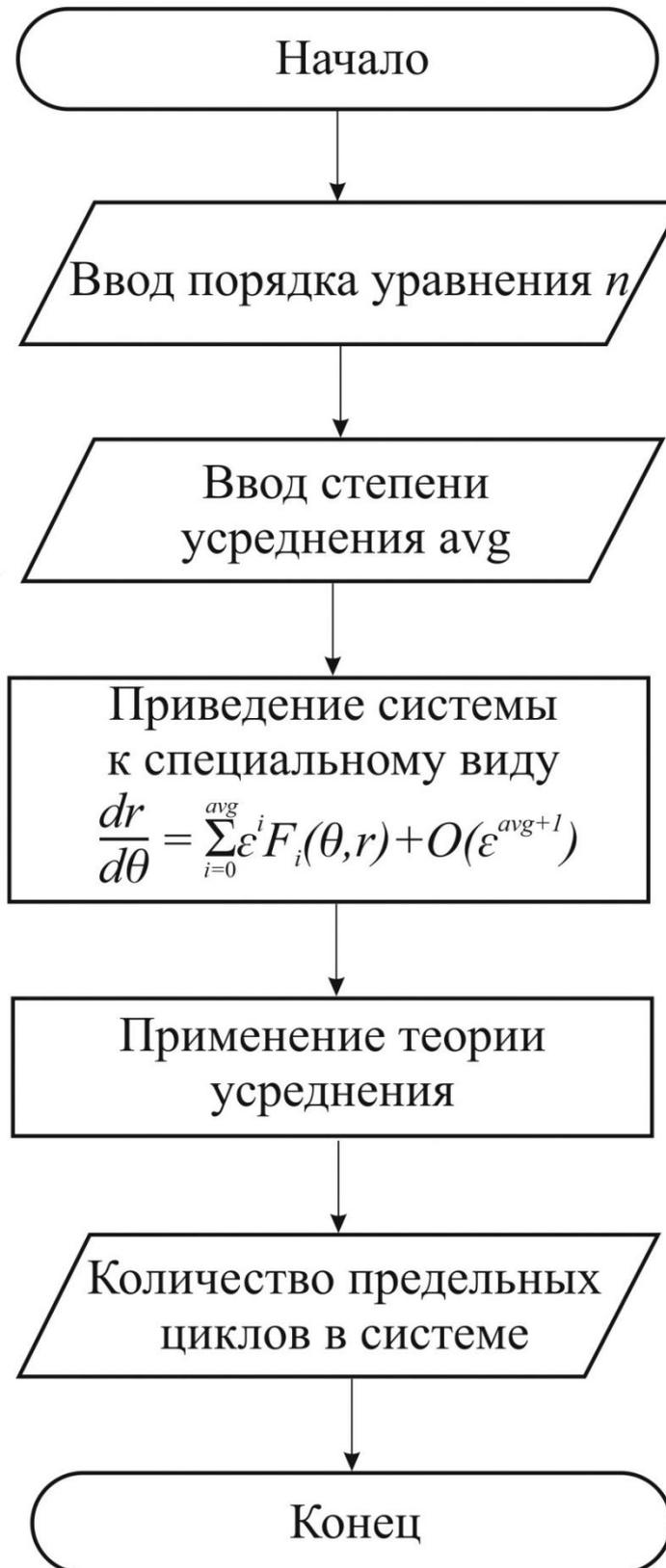
- [1] Баутин Н.Н., Леонтович Е.В. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. Новосибирск: Изд-во Наука, 1990. 490 с.
- [2] Белоусов Б.П. Периодически действующая реакция и её механизм // Сборник рефератов по радиационной медицине за 1958 г. -М: Медгиз, 1959, с.145.
- [3] Волокитин Е.П., Иванов В.В. Изохронность и коммутируемость полиномиальных векторных полей // Сибирский математический журнал. 1999. №1 (40). С. 30-48.
- [4] Вулпе Н. И., Сибирский К. С.. Центроаффинно инвариантные условия наличия центра дифференциальной системы с кубическими нелинейностями. Докл. АН СССР, 301:6 (1988), 1297–1301; Dokl. Math., 38:1 (1989), 198–201
- [5] Жаботинский А.М. Периодический процесс окисления малоновой кислоты растворе // Биофизика. 9: С.306-311.
- [6] Каток А. Б., Хассельблат Б.[de]. Введение в современную теорию динамических систем = Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems / пер. с англ. А. Кононенко при участии С. Ферлегера. — М.: Факториал, 1999. — С. 265. — 768 с. — ISBN 5-88688-042-9
- [7] Коваленко А.С., Тихонова Л.П. Сложные колебательные режимы и их эволюция в реакции Белоусова-Жаботинского // Ж. физ. химии. 1989. Т.63. №1. С.71-73.
- [8] Кодзоков А.Х., Бесланеев З.О., Нагоров А.Л., Тхамоков М.Б. О линейных диофантовых уравнениях и способах их решения. Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2016. №2 (13) С. 18-23. DOI: [0.18454/2079-6641-2016-13-2-18-23]
- [9] Куклес И.С. О некоторых случаях отличия фокуса от центра. Доклады Академии Наук СССР. 1944. Т. 42. - №5. С. 212-215.
- [10] Малкин К.Е. Критерии центра для одного дифференциального уравнения // Волжский математический сборник. 1964. №2. С. 87–91.

- [11] Belfar, R. Benterki. Centers and Limit Cycles of Generalized Kukles Polynomial Differential Systems: Phase Portraits and Limit Cycles // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2020; 13: 387–397. DOI: [10.17516/1997-1397-2020-13-4-387-397].
- [12] Benterki R., Llibre J. Centers and limit cycles of polynomial differential systems of degree 4 via averaging theory. Journal of Computational and Applied Mathematics. 2017;313: 273–283. DOI: [10.1016/j.cam.2016.08.047]
- [13] Benterki R., Llibre J. The centers and their cyclicity for a class of polynomial differential systems of degree 7 via averaging theory. Journal of Computational and Applied Mathematics. 2020; 368: 112456. DOI: [10.1016/j.cam.2019.112456]
- [14] Buzzi C.A., Llibre J., Medrado J.C. Phase portraits of reversible linear differential systems with cubic homogeneous polynomial nonlinearities having a non-degenerate center at the origin // Qualitative Theory of Dynamical Systems. 2009; 2:369–403.
- [15] Gine J. Conditions for the existence of a center for the Kukles homogenous systems. Computers & Mathematics with Applications. 2002;43: 1261–1269.
- [16] Gine J., Llibre J., Valls C. Centers for the Kukles homogeneous systems with odd degree. Bulletin of the London Mathematical Society. 2015; 47: 315–324.
- [17] Gine J., Llibre J., Valls C. Centers for the Kukles homogeneous systems with even degree. Journal of Applied Analysis & Computation. 2017; 7: 1534-1548. DOI: [10.11948/2017093]
- [18] Llibre J., da Silva M.F. Global phase portraits of Kukles differential systems with homogeneous polynomial nonlinearities of degree 6 having a center and their small limit cycles. International Journal of Bifurcation and Chaos. 2016;26: 1650044-1-1650044-25. DOI: [10.1142/S0218127416500449]
- [19] Llibre J., da Silva M.F., Global phase portraits of Kukles differential systems with homogenous polynomial nonlinearities of degree 5 having a center, Topological Methods in Nonlinear Analysis, 48(2016), 257–282.

- [20] Llibre J., Novaes D.D., Teixeira M.A. Higher order averaging theory for finding periodic solutions via Brouwer degree. *Nonlinearity*. 2014; 27: 563–583. DOI: [10.1088/0951-7715/27/3/563]
- [21] Lotka AJ. Analytical note on certain rhythmic relations in organic systems. *Proc Natl Acad Sci USA*. 1920; 6(7): 410–415.
- [22] Van der Pol, B. On relaxation-oscillations. *The London, Edinburgh and Dublin Phil. Mag. & J. of Sci.* 1927; 2(7), 978—992.
- [23] Zoladek H. Remarks on: The classification of reversible cubic systems with center. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*. 1996; 8: 335–342.
- [24] Zoladek H.. The classification of reversible cubic systems with center. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*. 1994; 4: 79–136.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1 – Блок-схема последовательности работы программы



Приложение 2 – Блок-схема приведения системы Куллеса к специальному виду



Приложение 3 – Блок-схема решения линейного диофантового уравнения

