СЕКЦИЯ 1
Математическое и компьютерное моделирование

Р. Д. Сабирова, А. П. Девятков
Тюменский государственный университет, г. Тюмень

УДК 517.81

ГРУППА ЛИ ФОРМАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

Аннотация. *В данной статье рассматривается группа Ли G_n формальных разложений до n-го порядка включительно и соответствующая этой группе Ли с точностью до изоморфизма алгебра Ли L_n, где $n = 1, 2, \ldots$; доказывается, что G_n и L_n имеют соответственно n инвариантных подгрупп и n идеалов некоторого определенного вида.*

Ключевые слова: *формальное разложение, группа Ли, алгебра Ли, идеал, инвариантная подгруппа.*

Введение. Целью данной работы является нахождение всех инвариантных подгрупп группы Ли G_n, $n = 1,2, \ldots$. Исследование группы Ли G_n сводится к исследованию ее «матричного аналога», группы Ли MG_n, найденной с помощью статьи [1] Э. Жаботинского (1963), и алгебры Ли L_n группы Ли MG_n.

Цель исследования не так тривиальна, как может показаться, и не лишена актуальности, так как группа Ли G_n является разрешимой. В отличие от полупростых групп Ли полная классификация разрешимых групп Ли пока не найдена. Тем не менее в разделе 6 доказана теорема, в которой перечислены все идеалы алгебры Ли L_n. Как следствие этого на основании монографии [2] Л. С. Понтрягина (1984) в разделе 7 найдены все инвариантные подгруппы группы Ли G_n, чем и достигается цель работы.

Заметим, что в работе также используется учебное пособие [3] М. М. Постникова (1987).

1. Формальные степенные ряды

1.1. Пусть $\mathbb{R}$ есть поле действительных чисел.

Определение. Формальным степенным рядом называется формальное выражение вида

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m x^m \,,\; f_m \in \mathbb{R}\; \forall m = 1, 2, \ldots$$

Таким образом, формальный степенной ряд есть обычный степенной ряд, вопрос о сходимости которого не рассматривается, так что формальный степенной ряд может, вообще говоря, расходиться.

В данном разделе мы будем рассматривать те из формальных степенных рядов, которые удовлетворяют условию $f_0 = 0$, то есть формальные степенные ряды вида

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m x^m. \tag{1.1}$$

На множестве формальных выражений вида (1.1) можно очевидным образом ввести операции формального сложения, формального умножения, формальной композиции, формального интегрирования и формального дифференцирования, которые аналогичны операциям над степенными рядами, но отличаются от них тем, что могут производиться над рядами вне зависимости от того сходятся последние или нет. При этом для определенных таким образом операций сохраняются обычные правила, известные из математического анализа.

1.2. Пусть n есть произвольное натуральное число, и пусть дано некоторое счетное множество формальных выражений вида (1.1):

$$f_1(x) = \sum_{m=1}^{\infty} f_{1m} x^m \,.$$

$$f_2(x) = \sum_{m=1}^{\infty} f_{2m} x^m \,.$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$f_n(x) = \sum_{m=1}^{\infty} f_{nm} x^m.$$

Поставим в соответствие данным выражениям бесконечную матрицу, элементы первой строки которой суть коэффициенты выражения $f_1(x)$, элементы второй строки — коэффициенты выражения $f_2(x)$, элементы третьей строки — коэффициенты выражения $f_3(x)$ и т. д. Тогда такую матрицу формально можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \dots \\ f_n(x) \\ \dots \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Таким образом, элементу вида (1.1) $g(x) = \sum_{m=1}^{\infty} g_m x^m$ соответствует матрица

$$\begin{pmatrix} g(x) \\ g^2(x) \\ \dots \\ g^n(x) \\ \dots \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

если положить в (1.2) $f_1(x) = g(x), f_2(x) = g^2(x), \dots, f_n(x) = g^n(x)$, ...

Несложно проверить, что

$$\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \dots \\ f_n(x) \\ \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g(x) \\ g^2(x) \\ \dots \\ g^n(x) \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1\big(g(x)\big) \\ f_2\big(g^2(x)\big) \\ \dots \\ f_n\big(g^n(x)\big) \\ \dots \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Пусть дан еще один элемент вида (1.1): $f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m x^m$. Тогда, полагая в (1.4) $f_1(x) = f(x), f_2(x) = f^2(x), \dots, f_n(x) =$ $= f^n(x)$, ..., получим:

$$\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \dots \\ f_n(x) \\ \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g(x) \\ g^2(x) \\ \dots \\ g^n(x) \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f\big(g(x)\big) \\ f^2\big(g^2(x)\big) \\ \dots \\ f^n\big(g^n(x)\big) \\ \dots \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы получили, что матрица вида (1.3), соответствующая композиции $f(g(x))$ выражений $f(x), g(x)$ вида (1.1) равна произведению матрицы вида (1.3), соответствующей выражению $f(x)$, на матрицу того же вида, соответствующей выражению $g(x)$.

1.3. Пусть дано выражение вида (1.1), зависящее от параметра t, пробегающего некоторое множество значений:

$$f(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(t) x^m.$$

Тогда матрица вида (1.3) для данного выражения будет матрицей параметра t, то есть

$$A(t) = \begin{pmatrix} f(x,t) \\ f^2(x,t) \\ \dots \\ f^n(x,t) \\ \dots \end{pmatrix}.$$

Нетрудно понять, что матрица вида (1.3) для выражения $\partial_t f(x,t)$ равна производной по t от матрицы вида (1.3) для выражения $f(x,t)$, то есть

$$\begin{pmatrix} f'(x,t) \\ f'^2(x,t) \\ \dots \\ f'^n(x,t) \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x,t) \\ f^2(x,t) \\ \dots \\ f^n(x,t) \\ \dots \end{pmatrix}'. \qquad (1.5)$$

1.4. *Определение. Формальным разложением* называется — «отрезок» формального степенного ряда, то есть формальное выражение вида

$$f(x) = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \cdots + f_n x^n + o(x^n), \qquad (1.6)$$

где n — некоторое натуральное число; $f_0, f_1, \dots, f_n \in \mathbb{R}$; $o(x^n)$ есть бесконечно малая сравнительно с x^n величина.

Все приведенные в данном разделе факты верны и для формальных разложений с $f_0 = 0$.

2. Группа Ли G_n

2.1. Пусть n есть произвольное натуральное число. Рассмотрим над полем действительных чисел $\mathbb{R}$ множество G_n всех формальных выражений вида (1.6), у которых $f_0 = 0, f_1 \neq 0$.

2.2. Пусть $\mathbb{R}^n$ есть n −мерное векторное пространство, наделенное гладкой структурой. Рассмотрим отображение $h: G_n \to \mathbb{R}^n$ из множества G_n в пространство $\mathbb{R}^n$ такое, что

$$G_n \ni f(x) = f_1 x + f_2 x^2 + \cdots + f_n x^n + o(x^n) \longmapsto (f_1, f_2, \dots, f_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Очевидно, что отображение h является биекцией множества G_n на его образ $h(G_n)$ в $\mathbb{R}^n$. Тогда на G_n существует единственная гладкая структура, относительно которой отображение $\mathrm{Pr} \circ h: G_n \to h(G_n)$ является диффеоморфизмом (см. [3; 126-127]). Здесь $\mathrm{Pr}: \mathbb{R}^n \to h(G_n)$ есть отображение проекции пространства $\mathbb{R}^n$ на его подпространство $h(G_n)$.

Следовательно, множество G_n диффеоморфно вкладывается в пространство $\mathbb{R}^n$ и его можно рассматривать как открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$. И значит, мы можем полагать

$$G_n \ni f(x) = f_1 x + f_2 x^2 + \cdots + f_n x^n \equiv (f_1, f_2, \dots, f_n) \in \mathbb{R}^n. \qquad (2.1)$$

2.3. Рассмотрим множество G_n с алгебраической точки зрения. Нетрудно проверить, что множество G_n образует группу, если на G_n для всех $f(x), g(x) \in G_n$ определить операцию $\circ: G_n \times G_n \to G_n$, называемую операцией композиции, по правилу:

$$\big(f(x)\big) \circ \big(g(x)\big) = (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big),$$

где $f\big(g(x)\big)$ следует понимать как композицию с точностью до членов выше n −того порядка. Ее единичным элементом будет $I(x) = x + o(x^n)$.

2.4. Таким образом, на множестве G_n определены сразу несколько структур: структура группы и структура гладкого многообразия.

Теорема. Множество G_n является группой Ли.

Доказательство. Согласно определению группы Ли нам осталось лишь доказать, что операция композиции $\circ: G_n \times G_n \to G_n$ и порожденная ею операция взятия обратного элемента $\mathrm{inv}: G_n \to G_n$ являются гладкими отображениями. Пусть $f, g \in G_n$. Согласно (2.1) можем записать $f = (f_1, f_2, \dots, f_n), g = (g_1, g_2, \dots, g_n)$. Тогда имеем

$$\circ\,(f, g) = \circ\big((f_1, f_2, \dots, f_n), (g_1, g_2, \dots, g_n)\big) = (P_1, P_2, \dots, P_n),$$

где $P_1, P_2, \dots, P_n$ — некоторые полиномы, зависящие от коэффициентов $f_1, f_2, \dots, f_n;\ g_1, g_2, \dots, g_n$. Отображение $\circ$ гладко тогда и только тогда, когда гладки все функции $P_1, P_2, \dots, P_n$. А они гладки.

Аналогично доказывается, что гладко отображение inv.

2.5. Таким образом, множество G_n формальных разложений до n −того порядка включительно является группой Ли. Дальнейшая задача состоит в изучении данной группы Ли, что мы намереваемся сделать посредством нахождения и последующего исследования соответствующей группе Ли G_n алгебры Ли.

Наша задача становится сильно легче благодаря некоторым результатам статьи [1] (речь о которой пойдет в следующем разделе), касающимся матричного представления исследуемой нами группы.

3. Изоморфизм Жаботинского

3.1. В статье [1] Эри Жаботинский рассматривает над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ степенные ряды вида:

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k z^k, \tag{3.1}$$

где $f_1 = 1, |z| < \rho_F, \rho_F > 0$. Там же Жаботинский утверждает, что множество рядов вида (3.1) образует группу относительно операции композиции, и что эта группа изоморфна некоторой группе матриц с обычной операцией умножения матриц, которую строит следующим образом.

Для любого целого числа m Жаботинский рассматривает выражения

$$\big(F(z)\big)^m = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_{m,k} z^k, -\infty < m < +\infty, \tag{3.2}$$

где k пробегает целые числа, $f_{m,k} = 0$ при $m > k$ для любых $-\infty < m, k < +\infty$; а затем полагает, что элементы искомой группы матриц имеют вид

$$\mathcal{F} = ||f_{m,k}||,$$

то есть представляют собой бесконечномерные матрицы, коэффициенты $f_{m,k}$ которых определяются из (3.2).

3.2. Понятно, что для формальных разложений описанное соответствие совпадает с соответствием, определенным в параграфе 1.2. Опишем это соответствие еще раз.

Пусть $f(x) = f_1x + f_2x^2 + \cdots + f_nx^n + o(x^n) \in G_n$. Поставим в соответствие элементу $f(x)$ матрицу размера $n \times n$, первая строка которой состоит из коэффициентов выражения $f(x)$, вторая строка — из коэффициентов выражения $f^2(x)$, третья строка — из коэффициентов выражения $f^3(x)$ и т. д., n −тая строка — из коэффициентов выражения $f^n(x)$. Множество матриц описанного вида обозначим MG_n.

Например, для элемента $f(x) = f_1x + f_2x^2 + \cdots + f_nx^n + o(x^n)$ из G_n при $n = 2,3,4$ имеем следующие матрицы соответственно

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ 0 & f_1^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ 0 & f_1^2 & 2f_1f_2 \\ 0 & 0 & f_1^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ 0 & f_1^2 & 2f_1f_2 & 2f_1f_3 + f_2^2 \\ 0 & 0 & f_1^3 & 3f_1^2f_2 \\ 0 & 0 & 0 & f_1^4 \end{pmatrix}.$$

Матрицу из MG_n, соответствующую элементу $f(x) \in G_n$, можем записать в более компактном виде следующим образом:

$$\begin{pmatrix} f(x) \\ f^2(x) \\ \dots \\ f^n(x) \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

3.3. *Теорема. Множество MG_n является группой Ли (в качестве групповой операции рассматривается операция обычного умножения матриц).*

Доказательство. MG_n является подгруппой в группе $\mathrm{T}(n)$ всех верхних

треугольных матриц размера $n \times n$, причем

$$MG_n = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathrm{T}(n) \mid a_{ij} = \right.$$

$$\left. = P_{ij}(a_{11}; a_{12}; \dots a_{1n}) \ \forall i, j = 1, \dots, n \right\},$$

где P_{ij} — некоторый полином, $i, j = 1, \dots, n$. Легко видеть, что MG_n замкнуто в группе Ли $\mathrm{T}(n)$ (то, что $\mathrm{T}(n)$ является группой Ли, считаем известным). А значит, MG_n является подгруппой Ли.

3.4. Как уже говорилось выше, группы G_n и MG_n изоморфны как алгебраические объекты. Это, однако, не доказывает существования изоморфизма между ними как между группами Ли.

Теорема. Пусть $\phi: G_n \to MG_n$ — изоморфизм, обеспеченный статьей [1]. Тогда ϕ является гладким отображением, и, следовательно, группы Ли G_n и MG_n изоморфны.

Доказательство. Гладкость отображения ϕ следует из того, что элементы матриц из группы Ли MG_n являются полиномами от коэффициентов формального разложения группы Ли G_n. Таким образом, гладкость отображения ϕ обеспечивается гладкостью полиномов.

3.5. *Замечание.* Таким образом, группы Ли G_n и MG_n неотличимы с точки зрения теории групп Ли, поэтому в последующих разделах все необходимые исследования будем производить над группой Ли MG_n.

4. Алгебра Ли группы Ли MG_n

4.1. В данном разделе мы намереваемся найти и изучить алгебру Ли группы Ли MG_n. Обозначим ее через L_n. Отметим прежде всего, что алгебры Ли групп Ли G_n и MG_n изоморфны, что следует из теоремы 3.4 согласно теореме 84 из [2], а значит, все результаты, которые будут получены для алгебры Ли L_n, могут быть перенесены на алгебру Ли группы Ли G_n.

Алгебра Ли L_n является матричной алгеброй Ли. Соответственно, определенные в L_n скобки Ли $[\cdot,\cdot]: L_n \times L_n \to L_n$ представляют собой коммутатор матриц, то есть

$$[A, B] = AB - BA \; \forall A, B \in L_n.$$

4.2. *Теорема. Произвольный элемент алгебры Ли L_n имеет вид*

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ 0 & 2a_1 & 2a_2 & \dots & 2a_{n-1} \\ 0 & 0 & 3a_1 & \dots & 3a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & na_1 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Пусть $q(x,t) = q_1(t)x + q_2(t)x^2 + \cdots + q_n(t)x^n + o(x^n)$ — кривая группы Ли G_n, проходящая через единицу. Согласно (3.3) матрица из группы Ли MG_n, соответствующая элементу $q(x,t)$, имеет вид

$$\begin{pmatrix} q(x,t) \\ q^2(x,t) \\ \dots \\ q^n(x,t) \end{pmatrix}.$$

Тогда согласно (1.5)

$$A'(0) = \begin{pmatrix} q'(x,t) \\ 2q(x,0)q'(x,0) \\ \dots \\ nq^{n-1}(x,0)q'(x,0) \end{pmatrix}.$$

Так как данная кривая проходит через единицу группы Ли G_n, то $q(x,0) = x + o(x^n)$, а значит

$$A'(0) = \begin{pmatrix} q'(x,t) \\ 2xq'(x,0) \\ \dots \\ nx^{n-1}q'(x,0) \end{pmatrix}.$$

Учитывая введенное обозначение (3.3), получим необходимую матрицу, если положим $q'(x,0) = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + o(x^n)$.

4.3. Зафиксируем в пространстве L_n базис $\{A_k\}_{k=1}^n$, где

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n-k+1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Матрица сдвига и несколько ее приложений к L_n

5.1. Введем в рассмотрение так называемую *матрицу сдвига* размера $n \times n$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

все элементы которой равны нулю, кроме тех, которые располагаются над главной диагональю. Они равны единице.

Для любого $\alpha = 0,1,2,\dots$ умножение некоторой матрицы A справа на матрицу T_n^α есть сдвиг строк матрицы A вверх на α позиций. Умножение слева матрицы A на матрицу T_n^α есть сдвиг столбцов матрицы A вправо на α позиций.

Утверждение 1.

$$A_\alpha = A_1 T_n^{\alpha-1}\ \forall\alpha = 1,2,\dots,n. \tag{5.1}$$

Утверждение 2. $T_n^\alpha \neq 0$, если $\alpha = 0,1,\dots,n-1$, и $T_n^\alpha = 0$, если $\alpha \geq n$, где 0 — нулевая матрица.

Доказательство утверждений 1 и 2 следует непосредственно из приведенных определений умножения на произвольную степень α матрицы сдвига.

5.2. *Предложение.*

$$[T_n^\alpha, A_1] = \alpha T_n^\alpha\ \forall\alpha = 0,1,2,\dots \tag{5.2}$$

Доказательство.

$$T_n^\alpha A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha+1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \alpha+2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha+(n-\alpha) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A_1 T_n^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n-\alpha \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$T_n^\alpha A_1 - A_1 T_n^\alpha = [T_n^\alpha, A_1] =$$

$$
= \begin{pmatrix}
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \alpha & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \alpha & \dots & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0
\end{pmatrix} = \alpha T_n^{\alpha}.
$$

5.3. *Теорема.*

$$
[A_p, A_q] = (p-q)A_{p+q-1} \tag{5.3}
$$

для всех $p = 1, \dots, n, q = 1, \dots, n-p+1$. *Причем, если* $n-p+1 < q \leq n$, *то* $\left[A_p, A_q\right] = 0$ *для всех* $p = 1, \dots, n$.

Доказательство. Если $p = q$, то утверждение тривиально верно. Пусть $p > q \geq 1$. Используя (5.1) и (5.2), получим

$$
\left[A_p, A_q\right] = \left[A_1 T_n^{p-1}, A_1 T_n^{q-1}\right] = A_1 T_n^{p-1} A_1 T_n^{q-1} - A_1 T_n^{q-1} A_1 T_n^{p-1}
$$

$$
= A_1 T_n^{q-1}\left(T_n^{p-q} A_1 - A_1 T_n^{p-q}\right) T_n^{q-1} = A_1 T_n^{q-1}\left[T_n^{p-q}, A_1\right] T_n^{q-1}
$$

$$
= A_1 T_n^{q-1}(p-q) T_n^{p-q} T_n^{q-1} = (p-q) A_1 T_n^{p+q-2} = (p-q) A_{p+q-1}.
$$

Если $q > p \geq 1$, то из доказанного

$$
\left[A_p, A_q\right] = -\left[A_q, A_p\right] = -(q-p) A_{q+p-1} = (p-q) A_{p+q-1}.
$$

То есть теорема верна при любых натуральных p и q, при которых определен вектор A_{p+q-1}, то есть при таких, что $q + p < n + 2$. При этом согласно утверждению 2 $T_n^{p+q-2} = 0$ при $p + q - 2 \geq n$, то есть при $q \geq n - p + 2$. Следовательно, (по доказанному) при $n - p + 2 \leq q \leq n$ $\left[A_p, A_q\right] = (p-q) A_1 T_n^{p+q-2} = 0$ для любого $p = 1, \dots, n$.

5.4. *Замечание.* На формулу (5.3) можно смотреть несколько проще, если положить $A_k = 0$ при $k > n$, где 0 — нулевая матрица. Тогда можно считать, что $[A_p, A_q] = (p-q)A_{p+q-1}$ для всех $p,\ q = 1, \dots, n$.

6. Теорема о единственности

Все утверждения данного раздела направлены на доказательство следующего факта, который мы назовем *теоремой о единственности*.

Теорема (о единственности) *Алгебра Ли* L_n *имеет следующие идеалы:*

$$I_n = \{a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 + a_4A_4 + a_5A_5 + \cdots + a_{n-1}A_{n-1} + a_nA_n\}$$

$$I_{n-1} = \{a_2A_2 + a_3A_3 + a_4A_4 + a_5A_5 + \cdots + a_{n-1}A_{n-1} + a_nA_n\}$$

$$I_{n-2} = \{a_3A_3 + a_4A_4 + a_5A_5 + \cdots + a_{n-1}A_{n-1} + a_nA_n\}$$

$$I_{n-3} = \{a_4A_4 + a_5A_5 + \cdots + a_{n-1}A_{n-1} + a_nA_n\}$$

$$I_{n-4} = \{a_5A_5 + \cdots + a_{n-1}A_{n-1} + a_nA_n\} \qquad (6.1)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$I_2 = \{a_{n-1}A_{n-1} + a_nA_n\}$$

$$I_1 = \{a_nA_n\}$$

$$I_0 = \{0\}$$

и

$$\tilde{I}_{n-2} = \{a_2A_2 + a_4A_4 + a_5A_5 + \cdots + a_{n-1}A_{n-1} + a_nA_n\}.$$

Этими идеалами исчерпывается семейство идеалов алгебры Ли L_n.

Используя формулу (5.3), легко убедиться в том, что указанные подпространства алгебры Ли L_n являются ее идеалами. Займемся доказательством единственности.

6.1. *Теорема. Идеал* I_{n-1} *содержит в качестве подпространств все собственные идеалы алгебры Ли* L_n.

Доказательство. Пусть ненулевой идеал I алгебры Ли L_n таков, что I не содержится в идеале I_{n-1}. Тогда в идеале I найдется вектор вида $X = A_1 + a_2A_2 + \cdots + a_nA_n$. Имеем

$$[A_n, X] = (n-1)A_n.$$

Если $n = 1$, то утверждение теоремы верно, так как алгебра Ли L_1 вообще не имеет собственных идеалов.

Пусть $n > 1$. Следовательно, $A_n \in I$. Имеем

$$[A_{n-1}, X] = (n-2)A_{n-1} + a_2(n-3)A_n .$$

Так как $A_n \in I$, то $(n-2)A_{n-1} \in I$. Если $n = 2$, то утверждение теоремы верно, так как тогда $X = A_1 + a_2A_2$, $A_n = A_2 \in I$, а значит, $A_1 \in I$; то есть идеал I содержит все базисные векторы и, значит, совпадает с L_2.

Пусть $n > 2$. Следовательно, $A_{n-1} \in I$. Имеем

$$[A_{n-2}, X] = (n-3)A_{n-2} + a_2(n-4)A_{n-1} + a_3(n-5)A_{n.}$$

Так как $A_{n-1}, A_n \in I$, то $(n-3)A_{n-2}$. Если $n = 3$, то утверждение теоремы верно, так как тогда $X = A_1 + a_2A_2 + a_3A_3$, $A_{n-1} = \mathrm{A}_2$, $A_n = \mathrm{A}_3 \in \mathrm{I}$, а значит, $A_1 \in I$; то есть идеал I содержит все базисные векторы и, значит, совпадает с L_3.

Пусть $n > 3$. Следовательно, $A_{n-2} \in I$. И так далее.

Пусть $n > k$ $(k = 3,4,5, \ldots)$ и пусть уже доказано, что $A_n, A_{n-1}, A_{n-2}, \ldots, A_{n-k+3}, A_{n-k+2}, A_{n-k+1} \in I$. Имеем

$$[A_{n-k}, X] = (n-k-1)A_{n-k} + a_{2(n-k-2)}A_{n-k+1} + \cdots$$
$$+ a_{k+1}(n-2k-1)A_n.$$

Так как $A_{n-k+1}, A_{n-k+2}, \ldots, A_{n-1}, A_n \in I$, то $(n-k-1)A_{n-k} \in I$. Если $n = k+1$, то утверждение теоремы верно, так как тогда $X = A_1 + a_2A_2 + \cdots + a_{k+1}A_{k+1}$, $A_{n-k+1} = A_2, A_{n-k+2} = A_3, \ldots, A_{n-1} = A_k, A_n = A_{k+1} \in I$, а значит, $A_1 \in I$; то есть идеал I содержит все базисные векторы и, значит, совпадает с L_{k+1}.

Пусть $n > k+1$. Следовательно, $A_{n-k} \in I$.

Так как n конечно, а k произвольно, таким образом получим, что

$$A_2, A_3, A_4, \ldots, A_{n-1}, A_n \in I.$$

Следовательно, и $A_1 \in I$, то есть идеал I содержит все базисные векторы и совпадает с L_n.

6.2. *Следствие. Идеал* I_{n-1} *— единственный* $(n-1)$*-мерный идеал алгебры Ли* L_n.

6.3. *Теорема.* При $n > 3$ все ненулевые идеалы алгебры Ли L_n содержат базисный вектор A_n.

Доказательство. Пусть I — произвольный ненулевой идеал алгебры Ли L_n. Тогда в идеале I найдется вектор вида $X = a_2A_2 + \cdots + a_nA_n$, где хотя бы одно из чисел a_k, где $k = 2,3,\dots,n$, отлично от нуля. Обозначим через a_{k_0} — первый коэффициент в разложении вектора X, не равный нулю. Пусть $n = k_0 + m$. Рассмотрим сначала случай, когда $k_0 = 2$. Имеем

$$\underbrace{[A_2,[A_2,\dots,[A_2}_{m-2},[A_3,X]]\dots]]$$
$$= \underbrace{[A_2,[A_2,\dots,[A_2}_{m-2},a_2A_2 - a_4A_6 + \cdots + (5-n)a_{n-2}A_n]\dots]]$$
$$= (-1)^m(m-1)!\,a_2A_n.$$

Следовательно, $A_n \in I$. Пусть теперь $k_0 > 2$. Если $m = 0$, то доказывать нечего. Пусть $m > 0$. Имеем

$$\underbrace{[A_2,[A_2,\dots,[A_2,[A_2}_{m},X]]\dots]] = (-1)^m\frac{(k_0+m-3)!}{(k_0-3)!}\,a_{k_0}A_n.$$

Следовательно, $A_n \in I$.

6.4. Следствие. Пусть $n > 3$. Идеал I_1 — единственный 1-мерный идеал алгебры Ли L_n.

6.5. *Теорема. Пусть* I *— идеал алгебры Ли* L_n, $n > 4$. *Пусть для некоторого натурального* t, $1 \le t \le n-4$, *идеал* I *содержит базисные векторы*

$$A_n, A_{n-1}, \dots, A_{n-t+1}.$$

Тогда либо 1) идеал I *имеет размерность* t *и, следовательно, совпадает с идеалом* I_t, *либо 2) идеал* I *содержит также вектор* A_{n-t}.

Доказательство. Предположим, что размерность идеала $I > t$. Тогда в идеале I найдется вектор вида $X = a_2A_2 + \cdots + a_nA_n$, где хотя бы одно из чисел a_k, где $1 < k < n-t+1$, отлично от нуля.

Обозначим через a_{k_0} — первый коэффициент в разложении вектора X, не равный нулю. По построению $1 < k_0 < n - t + 1$. Пусть $n - t = k_0 + m$. Рассмотрим сначала случай, когда $k_0 = 2$. Имеем

$$\underbrace{[A_2, [A_2, \dots, [A_2}_{m-2}, [A_3, X]] \dots]]$$
$$= \underbrace{[A_2, [A_2, \dots, [A_2}_{m-2}, a_2 A_4 - a_4 A_6 - 2a_5 A_7 + \cdots$$
$$\dots + (5 - n + t) a_{n-t-2} A_{n-t} + (4 - n + t) a_{n-t-1} A_{n-t+1} + \cdots$$
$$+ \big((5 - t) - n + t\big) a_{n-2} A_n] \dots]] = (-1)^m (m-1)!\, a_2 A_{n-t}$$
$$+ (-1)^{m-1} \frac{(m+1)!}{3!} a_4 A_{n-t+2} + \cdots$$
$$+ (-1)^{m-1} (t-1) \frac{(m+t-1)!}{(t+1)!}\, a_{t+2} A_n$$

Так как $A_{n-t+2}, \dots, A_n \in I$, то $A_{n-t} \in I$. Пусть теперь $k_0 > 2$. Если $m = 0$, то доказывать нечего. Пусть $m > 0$. Имеем

$$\underbrace{[A_2, [A_2, \dots, [A_2, [A_2}_{m}, X]] \dots]] = (-1)^m \frac{(k_0 + m - 3)!}{(k_0 - 3)!}\, a_{k_0} A_{n-t}$$
$$+ (-1)^m \frac{(k_0 + m - 2)!}{(k_0 - 2)!}\, a_{k_0+1} A_{n-t+1} + \cdots$$
$$+ (-1)^m \frac{(k_0 + m + t - 3)!}{(k_0 + t - 3)!}\, a_{k_0+t} A_n$$

Так как $A_{n-t+1}, \dots, A_n \in I$, то $A_{n-t} \in I$.

6.6. *Следствие.* t*-мерный идеал* I_t *является единственным* t*-мерным идеалом алгебры Ли* L_n, $n > 3$, *для любого* $t = 1, 2, \dots, n-3$.

6.7. *Теорема.* Идеалы I_{n-2} и $\tilde{I}_{n-2}$ являются единственными $(n-2)$-мерными идеалами алгебры Ли L_n, $n > 3$.

Доказательство. Пусть I — произвольный $(n-2)$-мерный идеал алгебры Ли L_n. По теореме 6.5 и теореме 6.3 $A_n, A_{n-1}, \dots, A_5, A_4 \in I$. Тогда в идеале I найдется ненулевой вектор $X = a_2 A_2 + a_3 A_3$ такой, что система $\{X, A_4, A_5, \dots, A_n\}$ образует базис пространства I. Предположим, что $a_2 \neq 0$ и $a_3 \neq 0$. Тогда имеем

$[A_1, X] = -a_2 A_2 - 2a_3 A_3$. Но полученный коммутатор не принадлежит I, так как не может быть представлен в виде линейной комбинации указанных базисных векторов. Получили противоречие с определением идеала. Следовательно, или $a_2 = 0$, или $a_3 = 0$, то есть или $I = I_{n-2}$, или $I = \tilde{I}_{n-2}$ соответственно.

6.8. *Замечание.* В доказательстве теоремы 6.7 мы использовали теорему 6.5 несмотря на то, что она верна при $n > 4$, хотя в этой теореме мы предполагаем $n > 3$. Это несколько лишает доказательство точности, но не составляет логической ошибки. Действительно, при $n = 4$ принадлежность идеалу I векторов $A_4, \dots, A_n$ сводится к принадлежности идеалу I вектора $A_n = A_4$, что следует из теоремы 6.3. Таким образом, при $n = 4$ использовать теорему 6.5 вообще не нужно.

6.9. Несмотря на то, что некоторые из выше приведенных теорем были сформулированы для алгебры Ли L_n при $n > 4$ или $n > 3$, теорема о единственности верна и для L_1, и для L_2, и для L_3, и для L_4.

Действительно, алгебра Ли L_1 вообще не имеет собственных подалгебр, а значит, и собственных идеалов, то есть при $n = 1$ теорема о единственности верна.

Пусть $n = 2$. Алгебра Ли L_2 имеет лишь 1-мерные собственные подалгебры. По следствию 6.2, которое верно для всех натуральных n, L_2 имеет единственный $(n-1)$-мерный, то есть 1-мерный, идеал. Таким образом, теорема о единственности верна и при $n = 2$.

Пусть теперь $n = 3$. Алгебра Ли L_3 имеет собственные 2-мерные и 1-мерные подалгебры. По следствию 6.2 L_3 имеет единственный 2-мерный идеал, состоящий из векторов вида $a_2 A_2 + a_3 A_3$. Нетрудно проверить, используя соотношение (5.3), что L_3 имеет в точности два 1-мерных идеала, состоящих из векторов вида $a_2 A_2$ и $a_3 A_3$. Это соответствует теореме о единственности.

Пусть, наконец, $n = 4$. Алгебра Ли L_4 имеет 3-мерные, 2-мерные и 1-мерные собственные подалгебры. По следствию 6.2 L_4 имеет единственный 3-мерный идеал. По теореме 6.7 L_4 имеет в точности два 2-мерных идеала, а по следствию 6.4 — единственный 1-мерный идеал. А это соответствует теореме о единственности.

Таким образом, идеалы $I_n, I_{n-1}, I_{n-2}, \dots, I_1$ и $\tilde{I}_{n-2}$ являются единственными собственными идеалами алгебры Ли L_n для любого $n = 1, 2, \dots$. Следовательно, теорема о единственности доказана полностью.

6.10.* Пусть $n > 1$ (случай $n = 1$ нет необходимости рассматривать: L_1 не имеет собственных подалгебр) для любого $k = 2,3,\dots,n$ произвольный собственный идеал I_{n-k+1} алгебры Ли L_n, таким образом, состоит из элементов вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_k & a_{k+1} & a_{k+2} & \dots & a_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2a_k & 2a_{k+1} & \dots & 2a_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 3a_k & \dots & 3a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (n-k+1)a_k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

а идеал $\tilde{I}_{n-2}$ — из элементов вида

$$\begin{pmatrix} 0 & a_2 & 0 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & \dots & a_n \\ 0 & 0 & 2a_2 & 0 & 2a_4 & 2a_5 & 2a_6 & \dots & 2a_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 3a_2 & 0 & 3a_4 & 3a_5 & \dots & 3a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (n-3)a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (n-1)a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Инвариантные подгруппы и гомоморфизмы

7.1. Рассмотрим следующую цепочку групп Ли и гомоморфизмов:

$$\begin{gathered} G_1 \xleftarrow{\varphi_{12}} G_2 \xleftarrow{\varphi_{23}} G_3 \xleftarrow{\varphi_{33}} G_3 \xleftarrow{\varphi_{34}} G_4 \xleftarrow{\varphi_{45}} G_5 \xleftarrow{\varphi_{56}} \dots \\ \xleftarrow{\varphi_{n-1,n}} G_n \xleftarrow{\varphi_{n,n+1}} \dots \end{gathered} \tag{7.1}$$

где для любого $n = 1, 2, \dots$ G_n есть рассматриваемая нами в разделе 2 группа Ли формальных разложений до n −того порядка включительно, а φ_{33} и $\varphi_{n,n+1}, n = 1, 2, \dots,$ — гомоморфизмы групп Ли, действующие по следующим правилам:

$$G_3 \ni f_1 x + f_2 x^2 + f_3 x^3 + o(x^3) \overset{\varphi_{33}}{\longmapsto} f_1 x + (f_3 - \frac{f_2^2}{f_1}) x^3 + o(x^3) \in G_3$$

$$G_{n+1} \ni f_1 x + f_2 x^2 + \dots + f_n x^n + f_{n+1} x^{n+1} + o(x^{n+1}) \overset{\varphi_{n,n+1}}{\longmapsto} f_1 x + f_2 x^2 + \dots + f_n x^n + o(x^n) \in G_n$$

для любого $n = 1,2, \dots$.

Известно, что алгебра Ли группы Ли G_n изоморфна алгебре Ли L_n, то есть — с точки зрения теории групп и алгебр Ли — группе Ли G_n соответствует алгебра Ли $L_n, n = 1,2, \dots$. При этом согласно теореме 84 из работы [2] каждому гомоморфизму групп Ли естественно соответствует гомоморфизм алгебр Ли. Тогда имеем соответствующую цепочке (7.1) цепочку алгебр Ли и гомоморфизмов:

$$L_1 \overset{\psi_{12}}{\longleftarrow} L_2 \overset{\psi_{23}}{\longleftarrow} L_3 \overset{\psi_{33}}{\longleftarrow} L_3 \overset{\psi_{34}}{\longleftarrow} L_4 \overset{\psi_{45}}{\longleftarrow} L_5 \overset{\psi_{56}}{\longleftarrow} \dots \overset{\psi_{n-1,n}}{\longleftarrow} L_n \overset{\psi_{n,n+1}}{\longleftarrow} \dots \qquad (7.2)$$

где ψ_{33} и $\psi_{n,n+1}, n = 1,2, \dots,$ — гомоморфизмы алгебр Ли.

Опишем, как устроены гомоморфизмы ψ_{33} и $\psi_{n,n+1}, n = 1,2, \dots$. Имеем

$$L_3 \ni \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 2a_1 & 2a_2 \\ 0 & 0 & 3a_1 \end{pmatrix} \overset{\psi_{33}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} a_1 & 0 & a_3 \\ 0 & 2a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 3a_1 \end{pmatrix} \in L_3$$

$$L_{n+1} \ni \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n & a_{n+1} \\ 0 & 2a_1 & \dots & 2a_{n-1} & 2a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & (n+1)a_1 \end{pmatrix} \overset{\psi_{n,n+1}}{\longmapsto}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & 2a_1 & \dots & 2a_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & na_1 \end{pmatrix} \in L_n$$

для любого $n = 1,2, \dots$.

Каждому идеалу из $L_n, n = 1,2, \ldots$, взаимно однозначно соответствует некоторый гомоморфизм из (7.2), ядром которого он является. А именно

$$\begin{gathered}
I_{n-1} \longmapsto \psi_{1n} = \psi_{12} \circ \psi_{23} \circ \ldots \circ \psi_{n-1,n} : L_n \to L_1 \\
I_{n-2} \longmapsto \psi_{2n} = \psi_{23} \circ \psi_{34} \circ \ldots \circ \psi_{n-1,n} : L_n \to L_2 \\
\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\
I_2 \longmapsto \psi_{n-2,n} = \psi_{n-2,n-1} \circ \psi_{n-1,n} : L_n \to L_{n-2} \\
I_1 \longmapsto \psi_{n-1,n} : L_n \to L_{n-1}
\end{gathered} \tag{7.3}$$

и

$$\tilde{I}_{n-2} \longmapsto \tilde{\psi}_{3n} = \psi_{33} \circ \psi_{34} \circ \ldots \circ \psi_{n-1,n} : L_n \to L_3.$$

Таким образом, используя гомоморфизмы ψ_{12}, ψ_{23}, ψ_{33}, ψ_{34}, $\ldots$, $\psi_{n-1,n}$, мы можем получить все идеалы алгебры Ли $L_n, n = 1,2, \ldots$. Так как отображениям ψ_{12}, ψ_{23}, ψ_{33}, $\psi_{34}, \ldots, \psi_{n-1,n}, \ldots$ взаимно однозначно соответствуют отображения φ_{12}, φ_{23}, φ_{33}, φ_{34}, $\ldots, \varphi_{n-1,n}, \ldots$, то и композициям первых взаимно однозначно соответствуют определенные композиции вторых. Таким образом, отображения

$$\begin{gathered}
\varphi_{1n} = \varphi_{12} \circ \varphi_{23} \circ \ldots \circ \varphi_{n-1,n} : G_n \to G_1 \\
\varphi_{2n} = \varphi_{23} \circ \varphi_{34} \circ \ldots \circ \varphi_{n-1,n} : G_n \to G_2 \\
\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\
\varphi_{n-2,n} = \varphi_{n-2,n-1} \circ \varphi_{n-1,n} : G_n \to G_{n-2} \\
\varphi_{n-1,n} : G_n \to G_{n-1}
\end{gathered} \tag{7.4}$$

и

$$\tilde{\varphi}_{3n} = \varphi_{33} \circ \varphi_{34} \circ \ldots \circ \varphi_{n-1,n} : L_n \to L_3$$

определяют все инвариантные подгруппы группы Ли G_n, то есть ядра этих гомоморфизмов исчерпывают все множество инвариантных подгрупп группы Ли G_n.

Действительно, если предположить, что существует еще одна инвариантная подгруппа, то мы получим тогда, что у алгебры Ли L_n существует идеал, отличный от идеалов (6.1), который соответствует этой инвариантной подгруппе. Но это противоречит теореме о единственности. Тем самым, мы приходим к противоречию по причине существования взаимно однозначного соответствия между инвариантными подгруппами группы Ли и идеалами соответствующей ей алгебры Ли.

Обозначим найденные инвариантные подгруппы в соответствии с (7.4) через $N_{n-1}, N_{n-2}, \dots, N_2, N_1$ и $\widetilde{N}_{n-2}$. Выпишем явно, из каких элементов они состоят, используя устройства отображений (7.1) и (7.4):

$$N_{n-1} = \{x + f_2x^2 + f_3x^3 + \dots + f_{n-1}x^{n-1} + f_nx^n + o(x^n)\}$$
$$N_{n-2} = \{x + f_3x^3 + \dots + f_{n-1}x^{n-1} + f_nx^n + o(x^n)\}$$
… … … … … … … … … … … … … … … … … …
$$N_2 = \{x + f_{n-1}x^{n-1} + f_nx^n + o(x^n)\}$$
$$N_1 = \{x + f_nx^n + o(x^n)\}$$

и

$$\widetilde{N}_{n-2} = \{x + f_2x^2 + f_2^2x^3 + f_4x^4 + \dots + f_nx^n + o(x^n)\}.$$

7.2. Выпишем, из каких матриц состоят инвариантные подгруппы группы Ли MG_n, соответствующие инвариантным подгруппам $N_{n-1}, N_{n-2}, \dots, N_2, N_1$ и $\widetilde{N}_{n-2}$ группы Ли G_n, при небольших n. Например, при $n = 2, 3, 4$.

Пусть $n = 2$. Группа Ли G_2 согласно доказанному имеет одну инвариантную подгруппу $N_1 = \{x + f_2x^2 + o(x^2)\}$. Соответствующая инвариантная подгруппа группы Ли MG_2 состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & f_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть теперь $n = 3$. Группа Ли G_3 имеет три инвариантные подгруппы $N_2 = \{x + f_2x^2 + f_3x^3 + o(x^3)\}, N_1 = \{x + f_3x^3 + o(x^3)\}$ и $\widetilde{N}_1 = \{x + f_2x^2 + f_2^2x^3 + o(x^3)\}$. Соответствующие инвариантные подгруппы группы Ли MG_3 состоят из матриц следующего вида

$$\begin{pmatrix} 1 & f_2 & f_3 \\ 0 & 1 & 2f_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & f_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & f_2 & f_2^2 \\ 0 & 1 & 2f_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть, наконец, $n = 4$. Группа Ли G_4 имеет 4 инвариантные подгруппы

$$N_3 = \{x + f_2x^2 + f_3x^3 + f_4x^4 + o(x^4)\},$$

$$N_2 = \{x + f_3x^3 + f_4x^4 + o(x^4)\},$$

$$N_1 = \{x + f_4x^4 + o(x^4)\}$$

$$\text{и } \widetilde{N}_2 = \{x + f_2x^2 + f_2^2x^3 + f_4x^4 + o(x^4)\}.$$

Соответствующие инвариантные подгруппы группы Ли MG_4 состоят из матриц следующего вида

$$\begin{pmatrix} 1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ 0 & 1 & 2f_2 & 2f_3 + f_2^2 \\ 0 & 0 & 1 & 3f_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & f_3 & f_4 \\ 0 & 1 & 0 & 2f_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & f_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & f_2 & f_2^2 & f_4 \\ 0 & 1 & 2f_2 & 3f_2^2 \\ 0 & 0 & 1 & 3f_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заключение. Таким образом, были получены следующие результаты:

1. Доказано, что множество G_n является группой Ли.
2. Найдена алгебра Ли L_n группы Ли G_n.
3. Найдена общая формула для коммутаторов базисных векторов алгебры Ли L_n.
4. Доказана теорема о единственности, утверждающая, что алгебра Ли L_n имеет в точности n идеалов некоторого вида, также указанного в формулировке теоремы.
5. Как следствие теоремы о единственности найдены все инвариантные подгруппы группы Ли G_n.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Jabotinsky E. Analytic iteration / E. Jabotinsky. — Text : direct // Trans. Amer. Math. Soc. — 1963. — № 108. — P. 457-477.
2. Понтрягин Л. С. Непрерывные группы / Л. С. Понтрягин. — 4-е изд. — Москва : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. — 520 с. — Текст : непосредственный.
3. Постников М. М. Лекции по геометрии. Семестр III. Гладкие многообразия / М. М. Постников. — Москва : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1987. — 480 с. — Текст : непосредственный.

Д. А. Гринь, А. В. Усвицкий

Тюменский государственный университет, г. Тюмень

УДК 33

ЦЕНТРАЛИЗАЦИЯ МАЙНИНГА КАК ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ ИСТОЧНИК ВОЛАТИЛЬНОСТИ: ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КРИПТОВАЛЮТНЫХ РЫНКОВ

Аннотация. *В этом исследовании мы анализируем влияние централизации в виде майнеров на рынок криптовалют. Мы проводим экономический эксперимент с моделированием рынка криптовалют с максимальной реалистичностью. Результаты нашего исследования не показали существенного влияния форм централизации на волатильность цен на крипторынке.*

Ключевые слова: *криптовалюты, моделирование рынка, волатильность, экономический эксперимент, эксперимент на финансовом рынке.*

Введение. Значительная популярность криптовалют и блокчейна как децентрализованной системы за последние несколько лет привела к появлению целой индустрии со множеством сервисов и бирж для покупки и продажи «монет», доступных всем слоям населения [4]. Большой интерес к децентрализованным активам, а также такие особенности блокчейн-системы, как анонимность и прозрачность данных транзакций, способствовали развитию исследований и анализа криптовалют [2, 5].