А. Ю. Сироткина, О. А. Безрученко, Д. В. Шармин
Тюменский государственный университет, г. Тюмень
УДК 372.851

ПРИМЕНЕНИЕ КООРДИНАТНОГО МЕТОДА К РЕШЕНИЮ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ ПРОФИЛЬНОГО УРОВНЯ

Аннотация. *В работе показана значимость координатного метода в школьном курсе геометрии и его преимущества над другими. Приведены примеры решений стереометрических задач из ЕГЭ по математике профильного уровня с использованием метода координат.*
Ключевые слова: *координатный метод, стереометрия, ЕГЭ, задача.*

Введение. Стереометрия является одним из самых сложных разделов школьной математики для учеников. Ежегодно ФГБНУ «Федеральный институт педагогических измерений» выпускает методические рекомендации для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ. По статистике, согласно анализам надежности экзаменационных вариантов, приведенных в данных документах, за последние несколько лет стереометрическую задачу № 13 единого государственного экзамена по математике профильного уровня решает 3-7% выпускников [2], что говорит о необходимости развивать пространственное мышление школьников, уделять больше времени геометрическим задачам различного уровня сложности, обучать различным методам решения.

Одним из самых универсальных методов является координатный, который доступен большинству учеников. Если уделить ему должное внимание, можно решать даже самые сложные задачи, поэтому рационально хотя бы в рамках элективного курса расширить школьный курс некоторыми сведениями из аналитической геометрии и показать возможность применения данного метода на заданиях ЕГЭ.

По мнению авторов пособия «Математика. Стереометрия. Эффективные методы решения задач» [1], применение метода координат значительно упрощает задачи, что способствует их лучшему усвоению у школьников. Данный метод позволяет решать геометрические задачи инструментами алгебры, с его помощью можно избежать дополнительных построений и их обоснований, что часто представляет наибольшую трудность у школьников. Все основные типы стереометрических задач, которые встречаются в ЕГЭ (задачи на вычисление углов и расстояний между прямыми и плоскостями, на построение сечений и измерение их площади и периметра, на нахождение объема многогранников) можно решать с применением координатного метода, зная его суть и основные формулы.

Проблема исследования. Недостаточное внимание школьного курса математики к методу координат. Задача исследования состоит в том, чтобы показать возможности и преимущества применения координатного метода на примере решения задач № 13 ЕГЭ по математике, направленных на формирование умения пользоваться данным методом.

Материалы и методы. В работе были использованы следующие методы исследования: анализ, синтез, классификация, сравнительный анализ, моделирование.

Результаты. В качестве примера можно привести несколько задач из единого государственного экзамена, решенных с помощью данного метода.

Задача 1. В правильной четырехугольной пирамиде SABCD проведена высота SH. K — середина ребра SD, N — середина ребра CD. Плоскость ABK пересекает ребро SC в точке P:

а) докажите, что прямая PK делит отрезок NS пополам;

б) найдите расстояние от точки P до плоскости ABS, если SH = 15, CD = 16 [3].

Дано:

SABCD — правильная пирамида

SH ⊥ (ABC)

K ∈ SD, SK = KD

N ∈ CD, CN = ND

(ABK) ∩ SC = P

а) доказать: SM = MN, где KP ∩ SN = M;

б) найти: ρ (P; (ABS)), если SH = 15, CD = 16.

Решение:

а) введем прямоугольную систему координат с началом в точке $D\ (0; 0; 0)$, как показано на рис. 1.

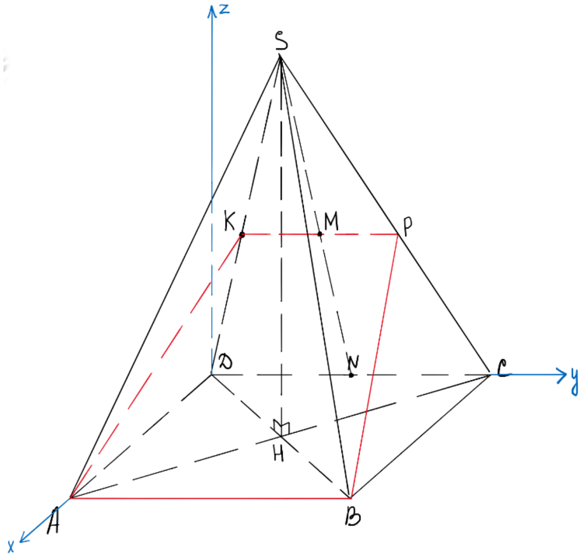

Рис. 1. Чертеж к задаче № 1

Найдем координаты используемых точек:

$A\ (16; 0; 0); B\ (16; 16; 0); C(0; 16; 0);\quad S\ (8; 8; 15);\ K\ \left(4; 4; \frac{15}{2}\right)$ (по формуле для нахождения координат середины отрезка).

Чтобы найти координаты точки пересечения ребра SC с плоскостью ABK, необходимо составить уравнение прямой и уравнение плоскости. Прямая SC задается системой (по двум точкам):

$$\begin{cases} x = 8t \\ y = 16 - 8t. \\ z = 15t \end{cases}$$

Составим уравнение плоскости ABK по трем точкам:

$$\begin{vmatrix} x-16 & y & z \\ 0 & 16 & 0 \\ -12 & 4 & \frac{15}{2} \end{vmatrix} = 0.$$

$$120x - 16 \cdot 120 + 12 \cdot 16z = 0 \implies 5x + 8z - 80 = 0.$$

Найдем координаты точки пересечения P этой плоскости с ребром SC, решив систему:

$$\begin{cases} 5x + 8z - 80 = 0 \\ x = 8t \\ y = 16 - 8t \\ z = 15t \end{cases} \Rightarrow 40t + 120t - 80 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow P\left(4; 12; \frac{15}{2}\right).$$

Заметим, что координаты точки P являются полусуммой координат точек S и C, а значит, P — середина ребра SC. Следовательно, PK — средняя линия треугольника SDC, тогда она пересекает медиану SN в середине, что и требовалось доказать;

б) найдем уравнение плоскости ABS:

$$\begin{vmatrix} x-16 & y & z \\ 0 & 16 & 0 \\ -8 & 8 & 15 \end{vmatrix} = 0$$

$$16 \cdot 15x - 16 \cdot 15 \cdot 16 + 8 \cdot 16z = 0 \Rightarrow 15x + 8z - 240 = 0$$

$P\left(4; 12; \frac{15}{2}\right)$

Воспользуемся формулой расстояния от точки до плоскости:

$$\rho\big(P;\ (ABC)\big) = \frac{\left|15 \cdot 4 + 8 \cdot \frac{15}{2} - 240\right|}{\sqrt{15^2 + 8^2}} = \frac{120}{17} \text{ ед.}$$

Ответ: $\frac{120}{17}$.

Такое решение проще воспринимается учащимися с недостаточной теоретической базой по классической стереометрии и слаборазвитым пространственным мышлением, так как для решения этой же задачи без использования координатного метода необходимы знания методов построения сечений, навык построения перпендикуляра к плоскости, а также широкое применение теорем планиметрии. В приведенном же выше решении требуется лишь определить положение точек в прямоугольной системе координат и выполнить аналитические преобразования, делая соответствующие выводы.

Задача 2. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$:

а) докажите, что прямая BD_1 перпендикулярна плоскости ACB_1;

б) найдите угол между плоскостями AD_1C_1 и A_1D_1C [3].

Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб

а) доказать: $BD_1 \perp (ACB_1)$;

б) найти: $\angle(AD_1C_1; A_1D_1C)$.

Решение:

а) введем прямоугольную систему координат с началом в точке B (0; 0; 0), как показано на рис. 2.

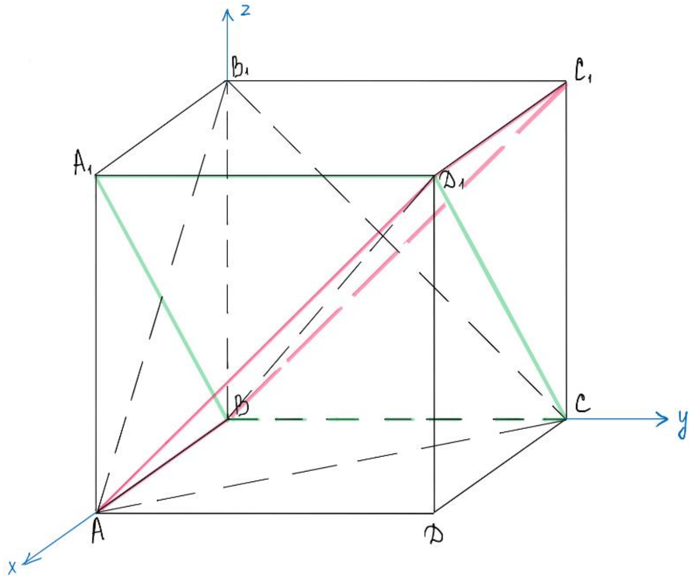

Рис. 2. Чертеж к задаче № 2

Чтобы найти угол между прямой и плоскостью, нужны координаты направляющего вектора этой прямой и координаты вектора нормали плоскости. Найдем координаты нужных точек, обозначив ребро куба за a: $AB = a$, тогда $A\ (a; 0; 0)$; $C\ (0; a; 0)$; $B_1\ (0; 0; a)$; $D_1\ (a; a; a)$.

Найдем координаты вектора с помощью координат его начала и конца: $\overrightarrow{BD_1}\,\{a; a; a\}$.

Составим уравнение плоскости ACB_1 по трем точкам:

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & a & 0 \\ -a & 0 & a \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow a^2x - a^3 + a^2y + a^2z = 0 \;\Rightarrow$$

$$x + y + z - a = 0 \;\Rightarrow\; \vec{n}\,\{1; 1; 1\}$$

Воспользуемся формулой для нахождения угла между прямой и плоскостью:

$$sin\angle\big(BD_1; (ACB_1)\big) = \frac{\left|\left(\overrightarrow{BD_1}; \vec{n}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{BD_1}\right| \cdot |\vec{n}|} = \frac{3a}{a\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = 1$$

$$\Rightarrow\; \angle\big(BD_1; (ACB_1)\big) = 90°,$$

то есть $BD_1 \perp (ACB_1)$, что и требовалось доказать;

б) угол между плоскостями равен углу между нормальными векторами этих плоскостей, поэтому необходимо составить уравнения данных плоскостей, для этого нужны координаты принадлежащих им точек:

$$A\,(a; 0; 0);\; D_1\,(a; a; a); C_1\,(0; a; a); A_1\,(a; 0; a); C\,(0; a; 0)$$

Составим уравнение плоскости AD_1C_1 по трем точкам:

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ 0 & a & a \\ -a & a & a \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; -a^2y + a^2z = 0 \;\Rightarrow y - z = 0$$

$$\Rightarrow\; \overrightarrow{n_1}\,\{0; 1;\; -1\}.$$

Составим уравнение плоскости A_1D_1C по трем точкам:

$$\begin{vmatrix} x & y-a & z \\ a & -a & a \\ a & 0 & a \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; -a^2x + a^2z = 0 \;\Rightarrow x - z = 0$$

$$\Rightarrow\; \overrightarrow{n_2}\,\{1; 0;\; -1\}.$$

Воспользуемся формулой для нахождения угла между плоскостями:

$$\cos\angle(\,(AD_1C_1);(A_1D_1C)) = \frac{|(\overrightarrow{n_1};\overrightarrow{n_2})|}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|} = \frac{1}{\sqrt{1+1}\cdot\sqrt{1+1}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\ \angle((AD_1C_1);(A_1D_1C)) = 60°.$$

Ответ: $60°$.

В данном случае классический метод решения задачи окажется для школьников гораздо труднее за счет сложности восприятия чертежа. Чтобы решить задачу, необходимо выполнить построение угла сначала между прямой и плоскостью, затем — между двумя плоскостями, опираясь на соответствующие теоремы. При решении координатным методом нет необходимости строить искомые углы, достаточно определить положение фигуры и основных точек в прямоугольной системе координат и воспользоваться формулами для нахождения синуса угла между прямой и плоскостью и косинуса угла между плоскостями.

Заключение. Таким образом, координатный метод является важной составляющей школьного курса геометрии, который не стоит недооценивать. Данный метод показывает взаимосвязь алгебры и геометрии, что помогает систематизировать знания учащихся. Метод несложен для восприятия, объем теоретического материала по данной теме значительно меньше, по сравнению с объемом материала классической школьной геометрии, что позволяет даже слабым учащимся, имеющим пробелы в знаниях стереометрии, научиться решать сложные задачи. Он позволяет упростить и ускорить решение многих стереометрических задач, в том числе и тех, что встречаются на едином государственном экзамене по математике профильного уровня, что очень важно для выпускников, так как данная задача оценивается в 3 первичных балла и может значительно повысить результаты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Математика. Стереометрия: эффективные методы решения задач : пособие для самостоятельной подготовки / Д. М. Безухов, В. М. Пекер, М. А. Халиков, Э. А. Хечумова. — Москва : Просвещение, 2012. — 168 с. — Текст : непосредственный.
2. Методические рекомендации для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ. — Текст : электронный // Федеральное государственное бюджетное научное учреждение «Федеральный институт педагогических измерений» : официальный сайт. — 2022. — URL: https://fipi.ru/ege/analiticheskie-i-metodicheskie-materialy#!/tab/173737686-2 (дата обращения: 10.05.2022).
3. РЕШУ ЕГЭ : Образовательный портал для подготовки к экзаменам : [сайт]. — URL : https://ege.sdamgia.ru/ (дата обращения: 05.05.2022). — Текст : электронный.

Р. Н. Ога

Тюменское высшее военно-инженерное командное училище, г. Тюмень

УДК 373

СИСТЕМА ПАТРИОТИЧЕСКОГО ВОСПИТАНИЯ КУРСАНТОВ ВОЕННОГО ВУЗА

Аннотация. *В данной статье рассмотрена система патриотического воспитания курсантов военного вуза и ее реализация в ТВВИКУ.*

Ключевые слова: *патриотическое воспитание, ТВВИКУ, образовательный процесс, воспитательный процесс.*

Введение. Под патриотическим воспитанием курсантов понимают систему организации ключевой деятельности курсантов, которая осуществляется под непосредственным руководством преподавательского состава военного образовательного учреждения и направлена на формирование высоких гражданских и патриотических качеств, необходимых в профессиональной деятельности. Под ключевой деятельностью понимают целенаправленную профессиональную деятельность, включающую в себя планово-систематическую, последовательную воспитательную работу.