

На правах рукописи

Салтанова Татьяна Викторовна

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗБЫТОЧНЫХ
ОСТАТОЧНЫХ ПОРОВЫХ ДАВЛЕНИЙ МЕТОДОМ
КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

05.13.18 - математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Тюмень - 2008

Работа выполнена на кафедре математики и информатики ГОУ ВПО
Тюменский государственный университет

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, доцент
Мальцева Татьяна Владимировна

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, доцент
Бытев Владислав Олегович
кандидат технических наук, профессор
Кучерюк Виктор Иванович

Ведущая организация: Тюменский Государственный
архитектурно – строительный университет

Защита состоится «4» декабря 2008 г. в 16 часов на заседании
диссертационного совета Д 212.274.14 при Тюменском государственном
университете по адресу: 625003, г. Тюмень, ул. Перекопская, 15 а, ауд. 410.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Тюменского
государственного университета

Автореферат разослан «28» октября 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета

Бутакова Н.Н.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы В Тюменском регионе ведётся строительство объектов нефтегазодобывающего комплекса, жилых посёлков, автомобильных и железных дорог на водонасыщенных глинистых и заторфованных грунтах. Одной из задач при проектировании является оценка деформированного состояния оснований из водонасыщенных грунтов в стабилизированном состоянии, независящем от времени.

Натурные и лабораторные эксперименты показывают, что в стабилизированном состоянии в поровой воде действуют избыточные остаточные поровые давления соизмеримые с напряжениями в скелете грунта, что приводит к уменьшению напряжений в скелете грунта.

В диссертации рассмотрена задача типа Фламана, под которой понимается задача о действии сосредоточенной и распределённой нагрузок на плоское водонасыщенное основание. В задачах типа Фламана модель водонасыщенного грунта представляет систему линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа с постоянными коэффициентами, которые отличаются от известных уравнений Ламе дополнительными слагаемыми, отражающими разгружающий вклад поровой воды за счёт учёта избыточных остаточных поровых давлений.

Актуальным является численная реализация с помощью метода конечных элементов этой модели в задачах типа Фламана, учитывающих слоистость грунта и некоторые виды распределённых нагрузок.

Цель работы заключается в разработке варианта метода конечных элементов, учитывающего избыточные остаточные поровые давления, применительно к задаче типа Фламана.

Для достижения цели были поставлены следующие задачи:

- получить новые матрицы жёсткости для треугольных и прямоугольных элементов, учитывающие избыточные остаточные поровые давления;
- исследовать аппроксимацию задачи и сходимость численного решения к обобщённому;

- сопоставить решения, полученные по предложенному варианту МКЭ, с известным решением задачи типа Фламана и показать разгружающее влияние (за счёт избыточных остаточных поровых давлений) поровой воды на скелет грунта;
- провести анализ деформированного водонасыщенного основания, один край которого имеет вид откоса;
- исследовать деформированное состояние слоистого водонасыщенного основания.

Методы исследования:

В работе применяются методы функционального анализа, элементы матричного исчисления, численные методы механики деформируемого твёрдого тела.

Количественный анализ изучаемой проблемы осуществляется с использованием математических программных продуктов, в частности, системы символьных вычислений Maple 7.0, на основе которых была разработана программа для решения рассматриваемых в работе задач.

Научная новизна:

- разработан вариант МКЭ, который заключается в построении новых матриц жёсткости, учитывающих избыточные остаточные поровые давления и позволяет записать систему дифференциальных уравнений в виде системы линейных алгебраических уравнений;
- показана сходимость численного решения к обобщённому решению в смешанной задаче о загрузении слоистого основания в рамках одного слоя;
- предложенный вариант МКЭ применён для решения задач типа Фламана для однородного и слоистого оснований и равновесия откоса;

Практическая значимость:

- численная реализация модели позволяет более достоверно прогнозировать осадки и перемещения любой точки водонасыщенного основания за счёт учёта избыточных остаточных поровых давлений;

- новый вариант МКЭ может быть использован при расчёте деформированного состояния водонасыщенного основания слоистой структуры с различными видами нагрузок.

Достоверность результатов обеспечивается:

- использованием классических уравнений механики деформируемого твёрдого тела;
- применением известных математических и численных методов;
- сопоставлением численных результатов с известными аналитическими решениями и экспериментальными данными.

На защиту выносятся:

- матрицы жёсткости для треугольного конечного элемента в случае линейной аппроксимации перемещений частиц скелета грунта;
- исследование сходимости численного решения к обобщенному решению смешанной задачи типа Фламана;
- матрицы жёсткости для прямоугольного конечного элемента при линейной и квадратичной аппроксимации искомых перемещений;
- результаты расчётов деформированного состояния водонасыщенного основания с учётом и без учёта слоистости грунта, с учётом откоса и без учёта откоса.

Апробация работы.

Международный научно – методический межвузовский семинар «Перспективы развития новых технологий в строительстве и подготовке инженерных кадров Республики Беларусь», (Могилёв, 2005 г.), XIX Международная конференция «Математические методы в технике и технологиях», (Воронеж, 2006 г.), Межрегиональная конференция «Современные математические методы и информационные технологии», (Тюмень, 2007 г.), XX Международная конференция «Математические методы в технике и технологиях», (Ярославль, 2007 г.), VII Всероссийский семинар «Сеточные методы для краевых задач и приложения», (Казань, 2007

г.), XXI Международная конференция «Математические методы в технике и технологиях», (Саратов , 2008 г.), Научные семинары кафедр математики и информатики, математического моделирования Института математики и компьютерных наук ТюмГУ (2005 - 2008г.), Научные семинары при межкафедральной экспериментальной и научной лаборатории ТюмГАСУ (2005 – 2008 г.).

По материалам исследований опубликовано 11 работ, список которых приведён в конце автореферата, в том числе одна, в журнале, рекомендованном ВАК РФ.

Объём и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, списка литературы, приложений. Объём диссертации 123 страницы, в том числе 31 рисунок. Список литературы состоит из 61 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы диссертационной работы, сформулированы цели и задачи исследований, научная новизна и практическая значимость полученных результатов.

В первой главе рассматриваются модели, теории расчёта водонасыщенного основания и основные численные методы.

Для анализа напряжённо – деформированного состояния водонасыщенного грунта используется теория фильтрационной консолидации двухфазной среды, которая впервые была сформулирована К. Терцаги (1925) и развита в в трудах Н.М. Герсеванова, Н.Н Маслова, В.А. Флорина, Н.А. Цытовича, М. Био, в конце 20-го века в трудах А.Л. Гольдина, Л.В. Горелика, Ю.К. Зарецкого, М.В. Малышева и других советских ученых. Теория фильтрационной консолидации применима для расчёта неуплотненных, полностью водонасыщенных грунтов.

В. А. Флориним и позднее М. Био была впервые предложена расчётная модель объёмных сил при линейно-деформируемом скелете грунта. По этой модели процесс консолидации грунта сопровождается возникновением сил.

З. Г. Тер-Мартirosяном и Ю. К. Зарецким одномерная задача уплотнения двухфазной среды решается с учетом линейной наследственной ползучести и сжимаемости поровой жидкости. Для глинистых грунтов имеет место нелинейная связь между напряжениями и деформациями, вытекающая из теории пластичности.

В нелинейной фильтрационной модели Костерина А.В., учитывается начальный градиент порового давления, вводятся две зоны – активная и пассивная, в последней фильтрация воды отсутствует.

Анализ этих моделей показал, что избыточные остаточные поровые давления обращаются в ноль по истечении конечного значения времени и водонасыщенный грунт рассматривается как однофазный, для описания которого используются модели механики деформируемого твёрдого тела.

Однако, лабораторные (В.А. Дёмин, В.В. Воронцов, А.В. Набоков) и натурные (Амарян Л.С., Бугров А.К., Голли А.В., Ф.Ф. Зехниев, Каган А.А. и др.) эксперименты показывают наличие избыточных остаточных поровых давлений после окончания процесса фильтрационной консолидации.

Для учёта избыточного порового давления в стабилизированном состоянии в диссертации рассмотрен плоский случай кинематической модели. Ранее модель использовалась в работах Мальцевой Т.В., Огородновой Ю.В., Трефилиной Е.Р., в которых были получены аналитические решения некоторых задач. В диссертации кинематическая модель развивается с позиции её численной реализации для задач типа Фламана с помощью МКЭ.

Во второй главе рассмотрена система уравнений, описывающая НДС водонасыщенного грунта с учётом избыточных остаточных поровых давлений. Система включает в себя: геометрические уравнения Коши для скелета грунта и поровой воды, физические уравнения для поровой воды,

уравнения взаимодействия скелета грунта и поровой воды, обобщённый закон Гука, уравнения равновесия.

После преобразований система уравнений равновесия для плоского случая относительно перемещений $\mathbf{u}(u_1; u_2)$ частиц скелета водонасыщенного грунта, в стабилизированном состоянии, независящем от времени, представляет собой систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$-\left(\left((G + \lambda)\frac{\partial \theta}{\partial x_i} + G\Delta u_i + b\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} + c\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)\right) = F_i, \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

$$G = \frac{E_s}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{E_s\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad b = \frac{E_l}{\aleph^2}, \quad c = \frac{E_l}{\aleph h}, \quad \theta = \operatorname{div} \mathbf{u},$$

которая от известных уравнений Ламе теории упругости отличается двумя слагаемыми в каждом уравнении, с неоднородными смешанными граничными условиями

$$\mathbf{u}|_{S_1} = 0, \quad \sigma_{22}|_{S_2} = Q, \quad (2)$$

$$\sigma_{22} = (2G + b)\varepsilon_{22} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}), \quad \varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}.$$

$$u_l|_{S_1} = 0, \quad \sigma_{22}|_{S_2} = q, \quad \mathbf{u}|_{S_4} = 0, \quad \sigma_{11}|_{S_3} = 0, \quad \sigma_{22}|_{S_3} = 0, \quad \sigma_{12}|_{S_3} = 0 \quad (3)$$

$$\sigma_{11} = (2G + b)\varepsilon_{11} + \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}), \quad \sigma_{12} = 2G\varepsilon_{12}$$

Граничное условие (2) используются в задаче типа Фламана и слоистого основания, в задаче с откосом - граничное условие (3) (рис.1).

Положительные коэффициенты G , λ , b , c , отражают механические свойства среды. ν , E_s , E_l – механические характеристики твёрдой (индекс s) и жидкой (индекс l) фаз. \aleph – безразмерная величина ($0 < \aleph < 1$), показывающая долю перемещения твёрдой частицы от соответствующего перемещения жидкой частицы. h – геометрическая характеристика образца, $h = l \dot{i}$. Q – вектор внешних сил, представляющий сосредоточенную либо,

распределённую нагрузку, приложенную к дренирующей дневной поверхности.

Введем три дифференциальных вектора-оператора на линейале M функций \mathbf{u} , непрерывных вместе со своими первыми и вторыми частными производными в $\bar{\Omega}$ (множество M плотно в $L_2(\Omega)$): $\mathbf{A} = (G + \lambda)\mathbf{graddiv} + G\Delta$,

$$\mathbf{B} = \left(b \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, b \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right), \quad \mathbf{C} = \left(c \frac{\partial}{\partial x_1}, c \frac{\partial}{\partial x_2} \right).$$

Запишем систему (1) в операторном:

$$\mathbf{D}\mathbf{u} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{D} = -(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}), \quad \mathbf{u} = (u_1, u_2), \quad \mathbf{F} = (F_1, F_2), \quad (4)$$

где \mathbf{F} заданная вектор функция, имеющая конечную норму. В работе Мальцевой Т.В. показано, что дифференциальный оператор \mathbf{D} положительно определён.

Обобщенным решением краевой задачи назовем функцию $\mathbf{u} \in V$, для которой согласно принципу Лагранжа выполняется равенство:

$$(\mathbf{D}\mathbf{u}, \mathbf{u}) = (\mathbf{F}, \mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{u} \in V, \quad \mathbf{F} \in L_2(\Omega), \quad (\mathbf{F}, \mathbf{u}) \in V, \quad V = \overset{\circ}{W}{}^{1,2}(\Omega). \quad (5)$$

Требование обращения в ноль \mathbf{u} на части границы указывается как $\mathbf{u} \in \overset{\circ}{W}{}^{1,2}(\Omega)$. Пространство $\overset{\circ}{W}{}^{1,2}(\Omega)$ - пространство Соболева.

После интегрирования по частям получается форма Галеркина

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \mathbf{c}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = (\mathbf{F}, \mathbf{u}) + \int_{S_2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{q} dS,$$

где

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \left((G + \lambda)\theta \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + G \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + b \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) dx, \quad \mathbf{c}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = - \int_{\Omega} c \frac{\partial u_i}{\partial x_i} u_i dx.$$

Пусть V - гильбертово пространство, $\mathbf{d}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \mathbf{c}(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ - коэрцитивная непрерывная билинейная форма на $V \times V$ и l - линейная непрерывная форма на V . Обозначим через \mathbf{u} , единственное решение в V уравнения

$$d(u, u) = \langle l, u \rangle \quad \forall u \in V. \quad (6)$$

Чтобы получить численное решение необходимо аппроксимировать u .
 Зададим какую – либо внешнюю устойчивую и сходящуюся аппроксимацию пространства V , т.е. $\{V_h, p_h, r_h\}_{h \in N}$. V_h - возрастающая последовательность конечномерных подпространств V , объединение которых плотно в V , $\rho_h : V_h \rightarrow L_2(\Omega)$ - оператор продолжения, $r_h : V \rightarrow V_h$ - оператор сужения. Наложим следующие условия:

для каждого $h \in N$ зададим непрерывную билинейную коэрцитивную форму $d_h(u_h, u_h)$ на $V_h \times V_h$, то есть

$$d_h(u_h, u_h) \geq \alpha_0 \|u_h\|_h^2 \quad \forall u_h \in V_h,$$

непрерывную линейную форму l_h на V_h , такую что

$$\|l_h\|_{*h} \leq \beta.$$

Для фиксированного h найдём $u_h \in V_h$ такое что

$$d_h(u_h, u_h) = \langle l_h, u_h \rangle, \quad \forall u_h \in V_h. \quad (7)$$

Пусть Ω - открытая ограниченная область в R^2 . Через \mathfrak{T}_h будем обозначать регулярную триангуляцию Ω , т.е. семейство двумерных симплексов удовлетворяющих условию

$$\sigma(h) \leq \alpha, \text{ при } \rho(h) \rightarrow 0,$$

где

$$\rho(h) = \sup_{J \in \mathfrak{T}_h} \rho_J, \quad \rho'(h) = \inf_{J \in \mathfrak{T}_h} \rho'_J, \quad \sigma(h) = \sup_{J \in \mathfrak{T}_h} (\rho_J / \rho'_J).$$

где $\rho = \rho_J$ - диаметр наименьшего шара, содержащего J , а $\rho' = \rho'_J$ - диаметр наибольшего шара содержащегося в J .

На основании вышеуказанных условий в работе сформулировано и доказано предложение о сходимости численного решения к обобщённому, для доказательства которого использовалась общая теорема сходимости.

Предложение. Если $\rho(h) \rightarrow 0$ и $\sigma(h) \leq \alpha$, то решение u_h задачи (7) сходится к решению u задачи (6).

Для нахождения численного решения получена матричная запись операторного уравнения (5). При этом использовались два двумерных симплекса: треугольник и прямоугольник.

1. Треугольник. Перемещения вершин треугольника выражаются искомым

вектором узловых перемещений $\delta^T = \{u_1^i \ u_2^i \ u_1^j \ u_2^j \ u_1^m \ u_2^m\}$.

Индекс T означает операцию транспонирования

Перемещения в пределах рассматриваемого треугольного элемента задаются в виде полинома первой степени $u_1 = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2$, $u_2 = \alpha_4 + \alpha_5 x_1 + \alpha_6 x_2$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_6$ - постоянные в пределах каждого элемента.

Выразив $\alpha_1, \dots, \alpha_6$ через узловые перемещения, получили следующие формулы для u_1 и u_2 .

$$u_1 = \frac{1}{2\Delta} [(p_i + d_i x_1 + n_i x_2) u_1^i + (p_j + d_j x_1 + n_j x_2) u_1^j + (p_m + d_m x_1 + n_m x_2) u_1^m]$$

$$u_2 = \frac{1}{2\Delta} [(p_i + d_i x_1 + n_i x_2) u_2^i + (p_j + d_j x_1 + n_j x_2) u_2^j + (p_m + d_m x_1 + n_m x_2) u_2^m]$$

$$p_i = x_1^j x_2^m - x_1^m x_2^j, \quad n_i = x_1^m - x_1^j, \quad d_i = x_2^j - x_2^m, \quad 2\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1^i & x_2^i \\ 1 & x_1^j & x_2^j \\ 1 & x_1^m & x_2^m \end{vmatrix}.$$

Относительные деформации имеют связь с вектором искомым перемещений δ^T :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{pmatrix} d_i & 0 & d_j & 0 & d_m & 0 \\ 0 & n_i & 0 & n_j & 0 & n_m \\ n_i & d_i & n_j & d_j & n_m & d_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^i \\ u_2^i \\ u_1^j \\ u_2^j \\ u_1^m \\ u_2^m \end{pmatrix} \text{ или } \{\varepsilon\} = [N]\{\delta\}.$$

Для получения матрицы жёсткости скелета грунта, отвечающей сумме операторов $-(A + B)$, записали работу внешних сил $\{\delta\}^T [F]$, которая согласно принципу Лагранжа равна работе внутренних сил.

Удельная работа внутренних сил, отвечающих скелету грунта, равна $\{\varepsilon\}^T \{\sigma\}$, $\{\varepsilon\}^T = \{\delta\}^T [N]^T$. Напряжения и деформации связаны обобщённым законом для скелета грунта $\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2G + \lambda + b & b & 0 \\ b & 2G + \lambda + b & 0 \\ 0 & 0 & 2G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix}$$

От удельной работы перешли к работе внутренних сил в пределах объёма элемента единичной толщины:

$$\int_S \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dS = \int_S \{\delta\}^T [N]^T \{\sigma\} dS = \{\delta\}^T \int_S [N]^T [D] \{\varepsilon\} dS = \{\delta\}^T \int_S [N]^T [D] [N] dS \{\delta\}$$

$$\int_S dS = A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1^i & x_2^i \\ 1 & x_1^j & x_2^j \\ 1 & x_1^m & x_2^m \end{vmatrix},$$

После интегрирования получили:

$$\{\delta\}^T \int_S [N]^T [D] [N] dS \{\delta\} = \{\delta\}^T [k^s] \{\delta\} \quad [k^s] = [N]^T [D] [N],$$

где $[k^s]$ - матрица жёсткости для скелета грунта с учетом поровой воды.

Тогда равенство работ внутренних и внешних сил, отвечающее оператору D имеет вид:

$$\{\delta\}^T [k^s] \{\delta\} + (-Cu, u) = \{\delta\}^T \{F\}.$$

Слагаемое $(-Cu, u)$ описывает работу избыточных остаточных поровых давлений на перемещении u

$$(-Cu, u) = \int_S \left(c \frac{\partial u_1}{\partial x_1} u_1 + c \frac{\partial u_2}{\partial x_2} u_2 \right) dS = \int_S \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \varepsilon_{11} \\ c \varepsilon_{22} \end{pmatrix} dS.$$

В матричном виде выражения, стоящие под знаком интеграла, имеют вид:

$$\begin{pmatrix} u_1, u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \varepsilon_{11} \\ c \varepsilon_{22} \\ 0 \end{pmatrix} = \{\delta\}^T \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \{\delta\}^T [D'] \{\varepsilon\}.$$

Применив теорему о статическом моменте площади и вычислив интеграл, получили:

$(-Cu, u) = \{\delta\}^T [k^l] \{\delta\}$, где $[k^l] = [M]^T [D^l] [N]$ - матрица жёсткости для поровой воды.

$$[M] = \frac{I}{2A} \begin{pmatrix} \xi_i & 0 & \xi_j & 0 & \xi_m & 0 \\ 0 & \xi_i & 0 & \xi_j & 0 & \xi_m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \{\delta\}, \quad \xi_k = p_k + d_k x_{1c} + n_k x_{2c},$$

(x_{1c}, x_{2c}) - координаты центра тяжести треугольника.

Окончательно имеем:

$$([k^s] + [k^l]) \{\delta\} = \{F\} \quad ([N]^T [D] [N] + [M]^T [D^l] [N]) \{\delta\} = \{F\}. \quad (8)$$

Выражение $[k^s] + [k^l]$ - новая матрица жёсткости для треугольного элемента.

2. Прямоугольник. Для этого симплекса рассмотрены два варианта аппроксимации искомой функции:

а. Билинейная аппроксимация $u_1 = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2 + \alpha_4 x_1 x_2$,
 $u_2 = \alpha_5 + \alpha_6 x_1 + \alpha_7 x_2 + \alpha_8 x_1 x_2$.

б. Квадратичная аппроксимация $u_1 = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2 + \alpha_4 x_1 x_2 + \alpha_5 x_2^2$,
 $u_2 = \alpha_6 + \alpha_7 x_1 + \alpha_8 x_2 + \alpha_9 x_1 x_2 + \alpha_{10} x_2^2$.

В этом случае системы линейных алгебраических уравнений и матрицы жёсткости имеют вид:

$$([k^s] + [k^l]) \{\delta\} = \{F\}.$$

$$[k^s] = [N_I]^T [D] [N_I] \int_S [M_I]^T [D^l] [N] dS = [k^l].$$

Отличие матриц жёсткости для различных конечных элементов состоит в различии матриц геометрических характеристик ($[M]$, $[N]$). Матрицы механических характеристик ($[D]$, $[D^l]$) остаются без изменения.

В третьей главе численно реализуется предложенный вариант метода конечных элементов при решении задач о загрузении водонасыщенного основания погонной нагрузкой (задача типа Фламана), о равновесии откосов

из водонасыщенного грунта (рис. 1), с помощью программы, написанной в математическом редакторе Maple 7. Механические параметры для задач были взяты из лабораторных экспериментов. $E_s = 8,1 \text{ МПа}$, $E_l = 3,27 \text{ МПа}$, $\nu = 0,3$, $\kappa = 0,52$, $Q = 0,7 \text{ МН}$.

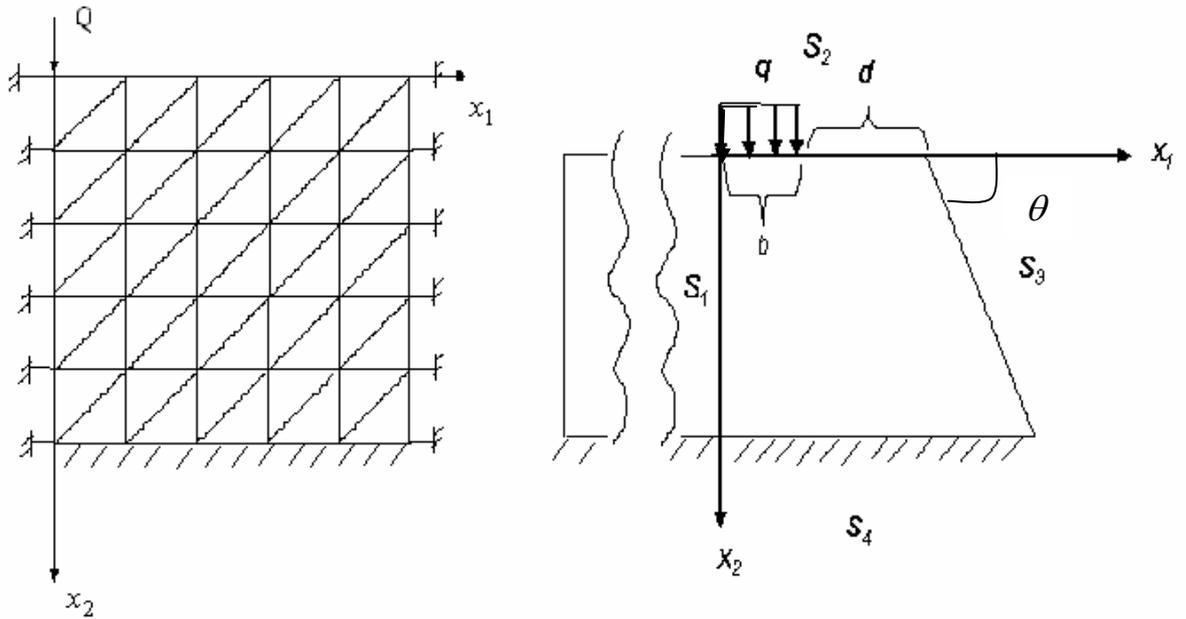


Рис. 1

а) задача типа Фламана

б) о равновесии откоса

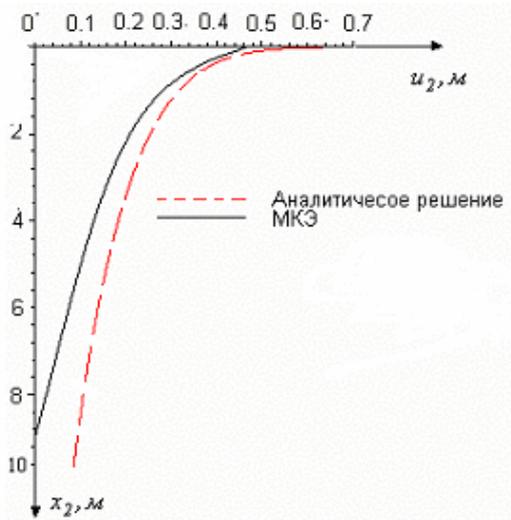


Рис.2 Вертикальные перемещения для сечения $x_1 = 0$ (сетка 40×40).

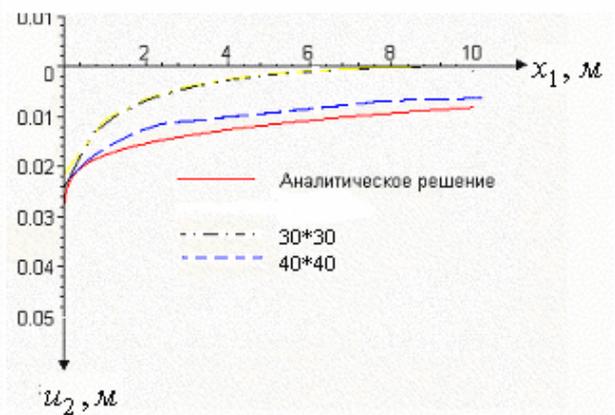


Рис.3 Горизонтальные перемещения для сечения $x_2 = 2 \text{ м}$ для различных сеток.

Для задачи типа Фламана численное решение сопоставлено с известным решением (Мальцева Т.В.). Результаты представлены в виде графиков на рис. 2,3. Максимальное расхождение для горизонтальных перемещений составляет 20 %.

Сопоставление решений для различных видов нелинейной аппроксимации, полученных для задачи типа Фламана приведены на графике (рис. 4). Максимальное расхождение для билинейной аппроксимации – 30%, для квадратичной – 20%.

В диссертации решена задача о равновесии откоса. Пусть на двухфазное упругое основание (рис. 1б) действует на расстоянии $b = 7$ м равномерно распределённая нагрузка постоянной интенсивностью $q = 2,7$ МН/м. Основание задаётся в виде прямоугольной трапеции с углом наклона θ ($\theta_1 = \pi/4, \theta_2 = \pi/6$). Задача является осесимметричной относительно действия внешней нагрузки q . Необходимо вычислить минимальное расстояние d от объекта до границы откоса. На рис. 5,6 приведены графики горизонтальных и вертикальных перемещений для сечений $x_2 = 0$ м, $x_2 = 2$ м, $x_2 = 4$ м, $x_2 = 6$ м. Из графиков видно, что на расстоянии $d = 15$ м от оси симметрии горизонтальные перемещения становятся практически нулевыми ($\theta = \pi/4$). Для $\theta = \pi/6$ расстояние d уменьшается до 12 м.

Вертикальные перемещения, начиная с глубины 3 м, при более пологом откосе уменьшаются быстрее.

Решена задача о неоднородном водонасыщенном основании, представляющем собой слои торфа и суглинка. Решение, полученное по МКЭ сопоставлено с данными натурального эксперимента (Ф. Ф. Зехниев). Результаты представлены в виде графиков. Механические характеристики грунта (таб. 1) были получены Шапталой И. В. на основании метода осреднения Бахвалова Н.С.

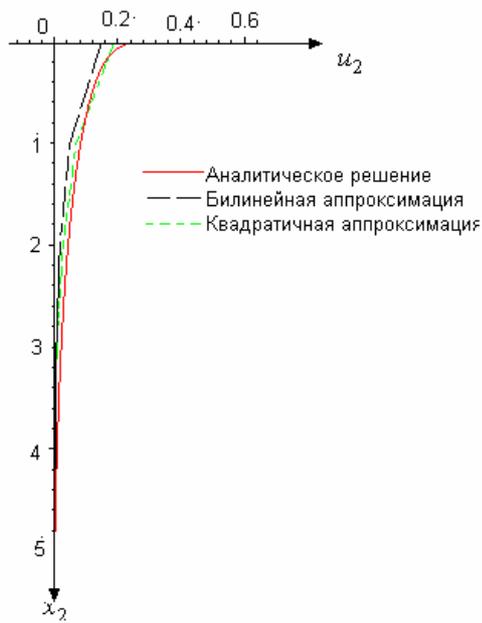


Рис. 4. Вертикальные перемещения для случая нелинейной аппроксимации.

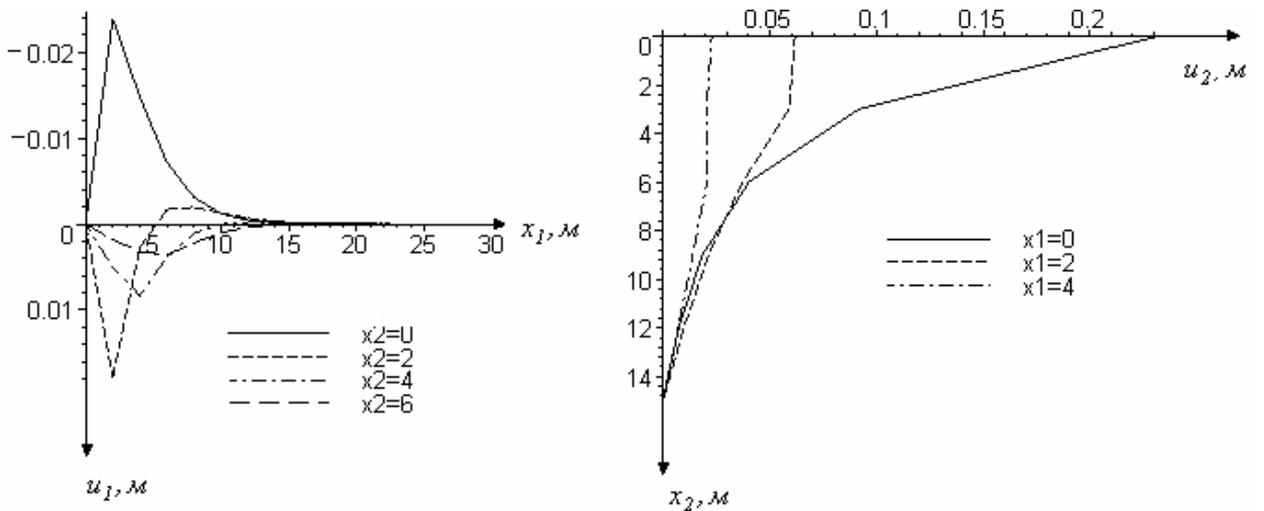


Рис. 5.

а). Горизонтальные перемещения для различных сечений ($\theta = \frac{\pi}{4}$).

б). Вертикальные перемещения для различных сечений ($\theta = \frac{\pi}{4}$).

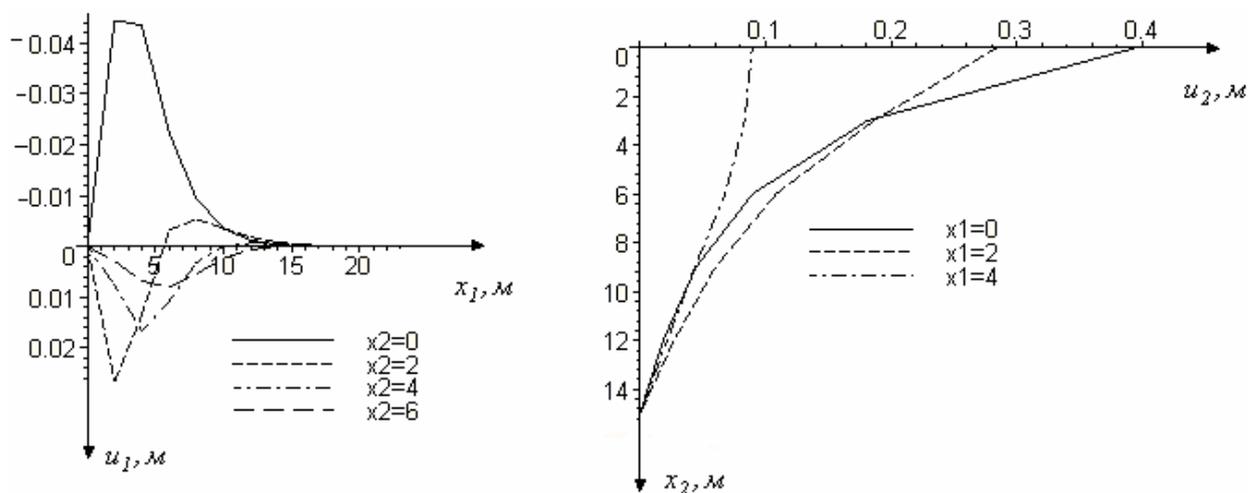


Рис. 6.

а). Горизонтальные перемещения для различных сечений ($\theta = \frac{\pi}{6}$).

б). Вертикальные перемещения для различных сечений ($\theta = \frac{\pi}{6}$).

Таблица 1.

№ слоя	$E_s, МПа$	$E_l, МПа$	ν
1	0,035	0,956	0,38
2	0,468	1,955	0,5
3	0,065	5,662	0,09
4	0,294	2,941	0,5
5	0,192	3,425	0,43

На рис. 7,8 сопоставлены графики вертикальных и горизонтальных перемещений, полученных экспериментально и с помощью МКЭ.

Максимальное расхождение для вертикальных перемещений составило 5 %, для горизонтальных – 26%.

На рис. 9 сопоставлены графики вертикальных перемещений частиц скелета грунта для различных сечений.

С ростом глубины грунта перемещения уменьшаются и становятся близкими к нулю.

Также получены графики изменения порового давления. Наибольшее расхождение с экспериментом составляет 20 %.

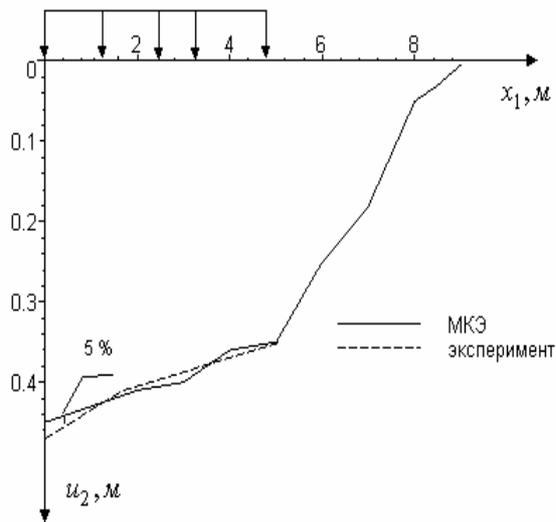


Рис. 7 Вертикальные перемещения скелета грунта дневной поверхности $x_2 = 0$

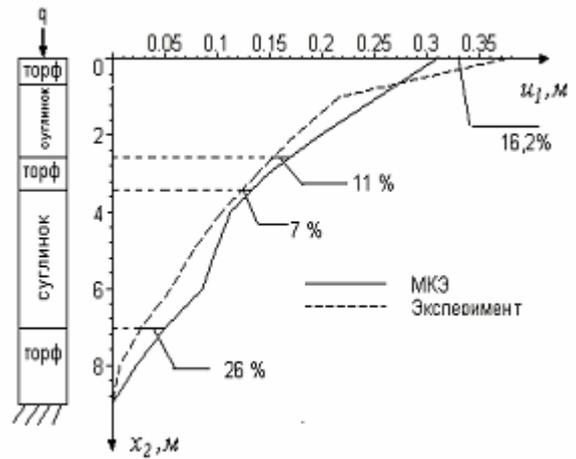


Рис. 8 Горизонтальные перемещения скелета грунта для вертикального сечения $x_1 = 1 м.$

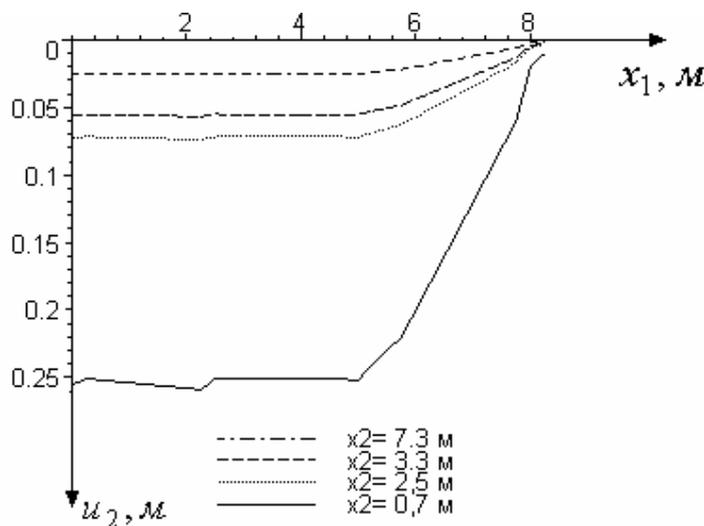


Рис. 9 Вертикальные перемещения частиц скелета грунта для различных сечений.

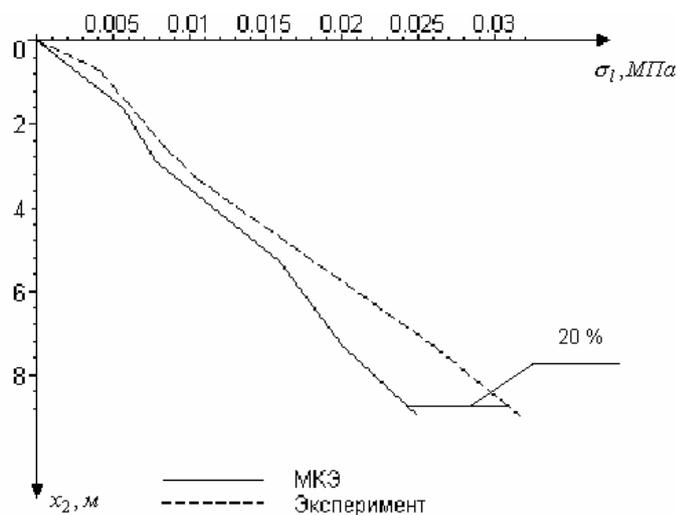


Рис. 10 Изменение по глубине остаточного порового давления

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. При выполнении условий коэрцитивности, непрерывности билинейной формы обобщённого оператора Ламе показана сходимость численного решения к обобщённому решению смешанной задачи.
2. Разработан вариант метода конечных элементов (треугольный, прямоугольный конечные элементы) для кинематической модели, учитывающей избыточные остаточные поровые давления, согласно которому новая матрица жёсткости, представляет собой сумму двух матриц, отвечающих скелету грунта и поровой воде.
3. На задаче типа Фламана сопоставлено численное решение, полученное по МКЭ, с известным аналитическим решением, максимальное расхождение, начиная с глубины два и более метров, составляет 10 % для вертикальных перемещений, для горизонтальных – 15 %. Результаты расчётов показали, что вертикальные перемещения на порядок больше горизонтальных.
4. При решении задачи о загрузении водонасыщенного основания с наличием различных углов откоса определены минимальные расстояния от откоса до объекта, при которых горизонтальные перемещения в районе откоса практически равны нулю: для $\theta = \frac{\pi}{4}$ горизонтальные перемещения становятся практически нулевыми при удалении объекта от откоса на 15 м, для $\theta = \frac{\pi}{6}$ это расстояние составляет 12 м.
5. Сопоставлены решения, полученные по МКЭ с данными натурального эксперимента. Максимальное расхождение составляет 5% для вертикальных и 26% для горизонтальных перемещений. Следовательно, построенная дискретная модель достаточно адекватно описывает моделируемое стабилизированное состояние.

Публикации по теме диссертации

1. Салтанова Т.В. Роль одного современного метода в математическом образовании/Л.Е. Мальцев, Т.В. Мальцева // Модернизация образования в условиях глобализации Круглый стол «Образование через науку и инновации». ТюмГУ.- 2005. - С. 68 – 70.
2. Салтанова Т.В. Конечный элемент, моделирующий остаточные поровые давления/ Мальцев Л.Е. // Естественные и технические науки. М.: «Спутник+» – 2005. - № 5(19). С.138 – 142.
3. Салтанова Т.В. Реализация математической модели водонасыщенного грунта с учётом избыточного порового давления по методу конечного элемента/ Мальцев Л.Е. // Перспективы развития новых технологий в строительстве и подготовке инженерных кадров Республики Беларусь: Сборник научных трудов международного научно – методического межвузовского семинара. – ГОУ ВПО БГУ, Могилёв, - 2005. - С. 178 – 182.
4. Салтанова Т.В. Матрица жёсткости для двухфазного треугольного элемента // Математические методы в технике и технологиях: Труды XIX Международной научной конференции «Математические методы в технике и технологиях». Воронежской государственной технологической академии. - Воронеж, 2006, - С. 35-39.
5. Салтанова Т.В. Адаптация МКЭ для расчета двухфазной полуплоскости // Математическое и информационное моделирование. - Тюмень: «Вектор Бук».- 2006. -Вып. 8.- С. 135 - 142.
6. Салтанова Т.В. Анализ обобщённого оператора Ламе и отвечающий оператору конечный элемент /Мальцев Л.Е., Мальцева Т.В. // Проблемы прочности и пластичности. Вып. 68. Нижний Новгород: НГУ.- 2006. – С. 181 - 190.
7. Салтанова Т.В. Численная реализация кинематической модели по методу конечных элементов // Математическое и информационное моделирование. -Тюмень: «Вектор Бук».- 2007.-Вып. 9.- С. 156 – 160.

8. Салтанова Т.В. Матрица жёсткости для двухфазного прямоугольного элемента // Труды XX Международной научной конференции «Математические методы в технике и технологиях». Ярославский государственной политехнический университет. Вып. 5 - Ярославль, 2007, - С. 35-39.
9. Салтанова Т.В. МКЭ для расчёта осадок водонасыщенного основания/ Мальцева Т.В. // Материалы всероссийского семинара «Сеточные методы для краевых задач и приложения».- Казань: Изд-во Казанского Государственного Университета. – 2007. - С. 176 – 181.
10. Салтанова Т.В. Сопоставление матриц жёсткости при расчёте двухфазной полуплоскости / Мальцева Т.В. // Вестник ТюмГУ.- 2007. - № 5. – С. 25 – 33.
11. Салтанова Т.В. О равновесии откосов из водонасыщенного грунта // Труды XXI Международной научной конференции «Математические методы в технике и технологиях». Вып. 5 - Саратов, 2008, - С. 45-48.