

На правах рукописи

Осипов Сергей Владимирович

ЗАДАЧИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ В МОДЕЛЯХ
ДИНАМИКИ ВЯЗКОУПРУГИХ СРЕД

01.02.05 – механика жидкости, газа и плазмы

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск - 2007

Работа выполнена в Новосибирском государственном университете

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
чл.-корр. РАН В.В. Пухначев.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
О.В. Воинов;
кандидат физико-математических наук,
доц. А.А. Чесноков.

Ведущая организация: Институт проблем машиноведения РАН,
г. Санкт-Петербург.

Защита состоится “7” ноября 2007 года в “15.00” часов на заседании диссертационного совета ДМ 212.274.09 по присуждению ученой степени кандидата наук при Тюменском государственном университете по адресу: 625000, г. Тюмень, ул. Перекопская, 15а, ауд. 217.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Тюменского государственного университета.

Автореферат разослан “7” октября 2007 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук

А. В. Татосов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. С развитием высоких технологий, медицины, добывающей и химической индустрии широкое внедрение в практику получили различные реологически сложные материалы – полимерные растворы и расплавы, эмульсии, суспензии. Описание и анализ соответствующих процессов и явлений, таких как движение высокопарафинистой и смолистой нефти, седиментация взвесей, биофизические процессы в живых клетках, дегазация растворов и расплавов полимеров, производство химических волокон, нанесение покрытий, требуют привлечения математических моделей соответствующей сложности, учитывающих индивидуальные реологические особенности и имеющих существенные отличия от классических ньютоновских жидкостей. Использование материалов и жидкостей в условиях, при которых в них присутствуют полости, твердые частицы, капли отличных сред приводит к необходимости исследования вопросов движения дисперсных элементов в жидкой матрице с неньютоновскими свойствами.

В работе не рассматриваются задачи воздействия взрывных нагрузок на вязкоупругие среды, распространение звуковых волн в них и т.д. Область применимости – это медленно меняющиеся нагрузки, слабые силовые поля, состояния, близкие к равновесным. Это позволяет не учитывать вязкую диссипацию энергии и ограничиться случаем изотермических течений в несжимаемых средах.

Работа относится к актуальному направлению гидродинамики – изучение движения вязкоупругих сред со свободными границами.

Целью работы является теоретическое исследование сложных по своей природе вязкоупругих и вязкопластических сред на примерах сред Максвелла, Кельвина-Фойгта и Бингама, выявления новых закономерностей, явлений и свойств, возникающих в известных задачах движения дисперсных элементов, полостей, но в более сложных, чем ньютоновских, и малоизученных средах.

Методы исследования. При получении результатов работы использовались методы теории уравнений математической физики, функций комплексного переменного, преобразование Лапласа. Для численного решения применялись конечно-разностные методы.

Основные результаты и их научная новизна.

1. Сформулирована задача о нестационарном движении капли вязкоупругой максвелловской жидкости в среде Максвелла под действием переменных массовых сил. Найдено преобразование, осуществляющее перевод координат в неинерциальную систему, связанную с движением центра масс капли, относительно которого уравнение импульса инвариантно.

В осесимметричном случае в линейном приближении построено интегродифференциальное уравнение для скорости движения капли. Осуществлен предельный переход по плотности и вязкости внутренней среды. В данных предельных случаях проведен переход к дифференциальному уравнению 6 порядка. Получено аналитическое решение задачи для твердого шарика и пузырька газа для случая монотонных и периодических внешних сил. Проведен анализ зависимости амплитуды скорости капли и сдвига фазы колебаний от времени релаксации внешней и внутренней сред, а также от частоты колебаний вынуждающей силы. Показано, что время релаксации внешней среды оказывает большее влияние на картину течения, чем внутренней. Установлена немонотонная зависимость скорости и сдвига фазы колебаний от времени релаксации внутренней среды.

В предельном случае, когда время релаксации, характеризующее среду Максвелла, стремится к нулю, установлено согласование результатов с классической формулой Адамара-Рыбчинского для вязкой жидкости.

2. Рассмотрена математическая модель процесса схлопывания сферической полости в вязкоупругой среде Максвелла под действием постоянного давления на бесконечности. Построено дифференциальное уравнение движения границы полости и найдено его численное решение.

Найдено существование трех различных типов поведения границы. Установлено, что наличие сил упругости приводит к существованию новых режимов, отсутствующих в вязкой жидкости, при которых граница полости движется колебательно с затуханием колебаний с течением времени. Показано, что режимы, при которых стягивание полости происходит за конечное и бесконечное время, отделяются друг от друга поверхностью в пространстве трех параметров: числа Рейнольдса, времени релаксации, характеризующем среду Максвелла, и начального ускорения границы полости.

Определена асимптотика решения задачи вблизи момента стягивания полости в точку в установленных случаях.

Проведен анализ зависимости решения от времени релаксации, начального радиуса полости и начального ускорения движения ее границы. Показано, что увеличение этих параметров стимулируют стягивание полости в точку за конечное время.

3. Рассмотрена задача схлопывания сферической полости в вязкоупругой среде Кельвина-Фойгта. Построено дифференциальное уравнение движения границы полости и найдено его численное решение.

Установлено существование трех различных режимов поведения границы и построена карта данных режимов на плоскости определяющих параметров. Найдена асимптотика решения задачи во всех установленных случаях.

Показано, что наличие сил упругости на начальном этапе ускоряет, а с течением времени замедляет процесс схлопывания полости, а также приводит к существованию третьего режима, отсутствующего в вязкой жидкости, при

котором радиус полости стремится к определенному положительному значению по колебательному закону.

Построено численное решение задачи с учетом сил поверхностного натяжения. Проведен анализ зависимости решения от капиллярных сил, начального радиуса полости и упругих свойств среды. Показано, что капиллярные силы ускоряют процесс схлопывания полости.

4. Построено точное решение задачи о стационарном течении жидкости Бингама в цилиндрической трубе с водяной смазкой. Найдено поле скоростей течения жидкостей. Определены границы «жесткой зоны». Получена формула расхода жидкости Бингама, показывающая наличие оптимального режима транспортировки нефти, моделируемой жидкостью Бингама, при определенной толщине слоя воды.

В задаче о движении капли в среде Бингама под действием сил плавучести в случае стационарного осесимметрического течения приближенно определена форма «поверхности текучести», качественно совпадающая с поверхностью, численно построенной ранее [10].

Все полученные результаты являются новыми.

Достоверность результатов исследований подтверждается точностью применяемых методов, сравнением аналитических решений и численных расчетов, а также согласованием результатов в предельных случаях с известными ранее соотношениями для ньютоновских жидкостей.

Теоретическая и практическая ценность полученных результатов состоит в том, что они могут быть использованы для расчета динамики дисперсных элементов и процесса схлопывания полостей в вязкоупругих средах. Результаты могут использоваться в некоторых случаях оптимизации транспортировки нефти и других вязкопластических жидкостей. Построенные в работе решения найдут применение при интерпретации экспериментов по движению двухфазных систем в условиях микрогравитации.

Апробация работы. Результаты работы докладывались автором на международных конференциях, а также научных семинарах:

Конференции:

1. Международная научная конференция «Нелинейные уравнения в частных производных» (NPDE-2007), посвящена памяти академика И.В. Скрыпника. Ялта, Украина, сентябрь, 2007;
2. Международная научная конференция аспирантов и студентов «Процессы управления и устойчивость», Санкт-Петербургский государственный университет. Санкт-Петербург, апрель, 2007;
3. Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов», Московский государственный университет. Москва, апрель, 2006;

4. Международная конференция «Математическая гидродинамика: модели и методы», посвящена 70-летию профессора В.И. Юдовича. Ростов-на-Дону, октябрь, 2004;
5. Международная Научная Студенческая Конференция, Новосибирский государственный университет. Новосибирск, Апрель 2003, 2004, 2005.

Семинары:

1. Научный семинар ТФ ИТПМ СО РАН, рук. проф. А.А.Губайдуллин. Тюмень, сентябрь, 2007;
2. Совместный семинар Отдела прикладной гидродинамики Института гидродинамики им. Лаврентьева СО РАН и кафедры гидродинамики Новосибирского государственного университета, рук-ли: чл.-корр. РАН В.В.Пухначев, чл.-корр. РАН В.М.Тешуков. Новосибирск, июнь, 2007;
3. «Нестационарные задачи механики и физики», рук. чл.-корр. РАН Ю.В.Петров, Институт Проблем Машинovedения РАН. Санкт-Петербург, апрель 2007;
4. Семинар кафедры математического моделирования ТюмГУ, рук-ли: проф. В.О. Бытев, проф. В.Н.Кутрунов; Тюменский государственный университет. Тюмень, февраль, 2007;
5. «Гидродинамика и тепломассообмен в невесомости», семинар отдела прикладной гидродинамики, рук. чл.-корр. РАН В.В.Пухначев, Институт гидродинамики им. Лаврентьева СО РАН. Новосибирск, май, 2005.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 2 статьи в рецензируемых журналах [11]-[12], включенных в перечень ВАК; 4 печатных работы опубликованы в материалах и трудах международных конференций [13]-[16].

Структура работы. Диссертация объемом 72 страницы состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. В тексте содержится 26 рисунков. Список литературы включает 44 наименования работ отечественных и зарубежных авторов.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, сформулирована цель выполненных исследований, научная новизна и достоверность результатов, описана структура и содержание работы, дан список публикаций и апробации работы.

В первой главе рассматривается движение капли, а также пузырька и твердого шарика в вязкоупругой среде Максвелла.

1.1. Введение. Краткий обзор литературы. Определение и свойства среды Максвелла.

1.2. Постановка задачи. Требуется найти поверхность Γ_t , которая разбивает пространство R^3 на ограниченную односвязную область Ω^+ и ее

дополнение $\Omega^- = R^3 \setminus \bar{\Omega}^+$, поле скоростей v , давлений p , зависящих от времени t и пространственных координат x и удовлетворяющих уравнениям:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v = \frac{1}{\rho} \operatorname{div} P + g, \nabla \cdot v = 0 \\ T_{rel} \frac{\tilde{d}P}{dt} + P = -pI + 2\mu D, \end{cases} \quad (1.1)$$

условиям сопряжения

$$\begin{aligned} [P \cdot n]^\pm &= \sigma K \cdot n \\ V_n &= v \cdot n, [v]^\pm = 0 \text{ на } \Gamma_t \end{aligned} \quad (1.2)$$

условию на бесконечности

$$v \rightarrow 0, |x| \rightarrow \infty, \quad (1.3)$$

и начальным условиям

$$v = 0, \Gamma_t = \Gamma_0 = \{x : |x| = a\}, P = P_0, t = 0. \quad (1.4)$$

Здесь $[f]^\pm = f^+ - f^-$, f^\pm - предельные значения функции $f(x, t)$ при стремлении x к точке поверхности Γ из Ω^\pm соответственно, $g(0) = 0$;

$\frac{\tilde{d}P}{dt} = \frac{dP}{dt} + P \cdot W + (P \cdot W)^T$ - вращательная производная Яуманна, обеспечивающая инвариантность уравнений движения относительно вращений, $W = \frac{1}{2}(\nabla v - \nabla v^T)$.

1.3. Решение задачи. Решение строится с перехода в неинерциальную систему координат, связанную с центром масс капли, движущимся в исходной системе со скоростью $u(t) = (0, 0, u(t))$, и вводятся соответствующие новые искомые функции, т.е.

$$x' = x - \int_0^t u(t) dt, v' = v - u, P' = P + \rho x'(g - \dot{u}), p' = p - \rho x'[g + T_{rel} \dot{g} - \dot{u}(t) - T_{rel} \ddot{u}(t)] \quad (1.5)$$

Важно отметить, что уравнение движения системы (1.1) инвариантно относительно указанного преобразования.

После обезразмеривания возникают параметры $M = \frac{a^3 g_0}{(v^-)^2}, T = \frac{v^-}{a^2} T_{rel}$, где g_0 некоторое «среднее» ускорение. Предполагается $a^3 g_0 \ll (v^-)^2$ и $\rho^- a g_0 \ll \sigma/a$. Раскладывая формально функции v, p, P в ряд по M , получим для первого приближения задачу с $M = 0$, которая допускает точное решение со сферической границей раздела $\Gamma_t = \Gamma = \{x : |x| = 1\}$.

Решение строится с помощью преобразования Лапласа, которое определяется по формуле $A^*(s) = \int_0^{\infty} A(t)e^{-st} dt$.

В результате определяется поле образов скоростей внутри и вне капли. Для скорости центра масс капли строится интегродифференциальное уравнение:

$$\left(\frac{1}{2} + \rho^0\right)[T^- u''(t) + u'(t)] + B^*(0)u(t) + \int_0^t u'(t_1)b(t-t_1)dt_1 = (\rho^0 - 1)(T^- g'(t) + g(t)) \quad (1.6)$$

Скорость, получаемая в результате предельного перехода по времени релаксации внутренней и внешней жидкостей, переходит в скорость, равную аналогичной в статье Антановского и Копбосынова для ньютоновской жидкости [1].

Предполагая, что существует предел функции $g(t)$ при $t \rightarrow \infty$, получаем формулу для предельной скорости:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(\rho^0 - 1)sg^*(s)}{(1/2 + \rho^0)s + \alpha^- B^*(s)} = \frac{2(1 + \mu^0)}{3(2 + 3\mu^0)} (\rho^0 - 1) \lim_{t \rightarrow \infty} g(t).$$

Полученная установившаяся скорость в точности совпадает со скоростью движения капли под действием архимедовых сил, представляемой формулой Адамара-Рыбчинского [2]. Вполне закономерно, что данный результат не зависит от времени релаксации T_{rel} . Это согласуется с физическими законами поведения жидкости Максвелла.

1.4. Результат действия монотонных массовых сил. В некоторых предельных случаях уравнение (1.6) может быть проинтегрировано. Рассматривается движение газового пузырька в среде Максвелла в случае воздействия на систему силы, изменяющейся по закону $g(t) = te^{-t}$, чему соответствует $g^*(s) = 1/(s+1)^2$. Положим $\mu^0 = 0$. В итоге получим:

$$u^*(s) = F^*(s), F^*(s) = \frac{r^*(s)q^*(s)}{P^*(s)}.$$

Для определения оригинала скорости $u(t)$ движения дисперсного элемента в среде Максвелла используем обратное преобразование Лапласа и методы ТФКП. В результате, скорость определяется следующим способом:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F^*(s)e^{st} ds = \sum Res[F^*(s)e^{st}, a_k].$$

Аналогично рассматривается случай движения твердого шарика, когда $\mu^0 = \infty$.

1.5. Результат действия периодических массовых сил. Рассмотрим задачу о движении капли, возникающем при действии периодических сил. Задачи такого типа называются «g-jitter» задачами.

Полагаем, что $g(t) = Ae^{i\omega t}$. В этом случае функции u, v, P, p могут быть найдены в виде

$$u = Re \tilde{u} e^{i\omega t}, v = Re \tilde{v} e^{i\omega t}, P = Re \tilde{P} e^{i\omega t}, p = Re \tilde{p} e^{i\omega t}.$$

Вводя сферическую систему координат и применяя процедуру, аналогичную решению задачи с монотонной функцией $g(t)$, получим выражение для скорости, равное

$$u(t) = Re \frac{(\rho^o - 1) A e^{i\omega t}}{(1/2 + \rho^o) i \omega + \alpha^- B(i\omega)}. \quad (1.7)$$

Переходя к пределу по плотности и вязкости, из выражения (1.7) несложно получить результат для скорости пузырька газа или твердого шарика.

Представляет интерес анализ зависимости скорости капли и сдвига фазы колебаний от параметров времени релаксации T_{rel} окружающей среды и капли.

На первых двух рисунках (Рис. 1.1-1.2) представлены графики амплитуды скорости и сдвига фазы колебаний капли соответственно (скорость указана в сотых см/с). Положено, что частота колебаний вынуждающей силы равна $\omega = 500$ Гц, амплитуда $g = 5$ см/с², что почти в 200 раз меньше ускорения свободного падения на поверхности Земли; отношение плотности внутренней жидкости к внешней $\rho^o = 2$, отношение динамических вязкостей $\mu^o = 4$. На графиках видно, что зависимость движения от параметра времени релаксации внешней жидкости более значительная. Кроме того, с ростом T_{rel}^e (от «external» - внешний) снижается влияние T_{rel}^i (от «internal» - внутренний) на картину движения. Интересным и неожиданным результатом явилось наличие на графиках пиков и впадин. На данный момент это не получило точного обоснования, но по всей видимости, является следствием резонанса собственных колебаний капли и колебаний вынуждающей силы.

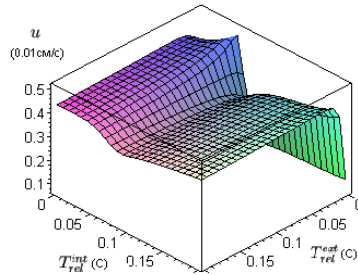


Рис.1.1

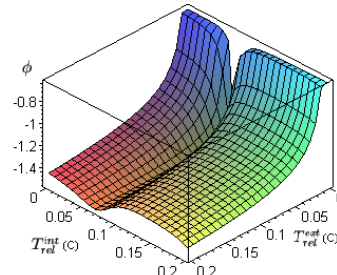


Рис.1.2

Далее рассмотрим в качестве параметров время релаксации внешней жидкости T_{rel}^e и частоту ω . Фиксируем $T_{rel}^i = 0.1c$.

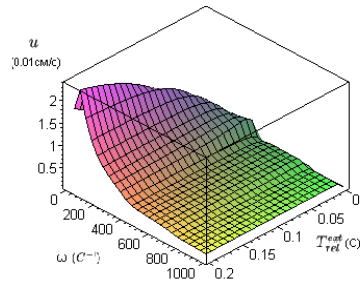


Рис.1.3

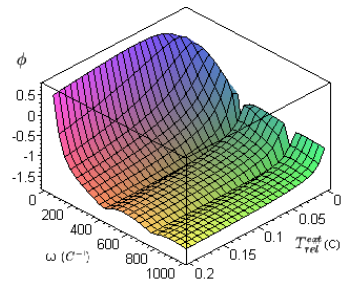


Рис.1.4

В этом случае видим (Рис.1.3), что при достаточно малой частоте колебаний (порядка 100 Гц) амплитуда скорости капли растет с увеличением времени релаксации среды T_{rel}^e . С ростом частоты до 500 Гц такая зависимость исчезает и величина T_{rel}^e практически не оказывает влияния на скорость капли. При частоте около 100 Гц сдвиг фазы колебаний близок к нулю (Рис.1.4). При $\omega = 300$ Гц и выше, напротив, сдвиг фазы достигает $\pi/2$. Заметим, что с увеличением T_{rel}^e на обоих графиках уменьшается «бугристость», что говорит о снижении относительного влияния T_{rel}^i .

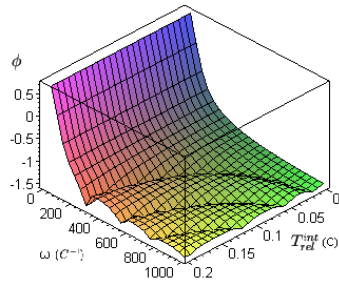


Рис.1.5

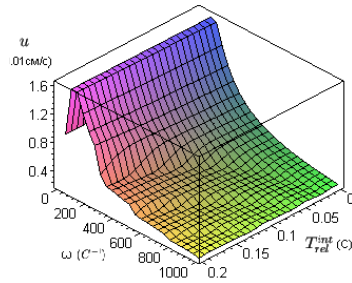


Рис.1.6

На рисунках 1.5 и 1.6 даны графики зависимости исследуемых величин от времени релаксации внутренней жидкости T_{rel}^i и частоты колебаний ω внешней силы ($T_{rel}^e = 0.1$ с). Очевидно, что более существенное влияние на картину течения оказывает время релаксации внешней среды, чем внутренней.

На рисунках 1.7 и 1.8 представлены графики амплитуды скорости как функций от времени релаксации внешней среды и частоты колебаний вынуждающей силы при движении твердого шарика и газового пузырька соответственно.

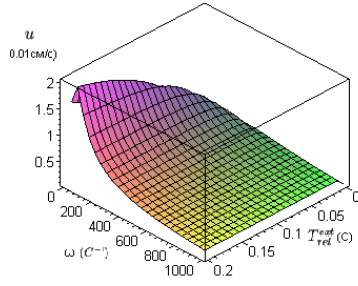


Рис.1.7

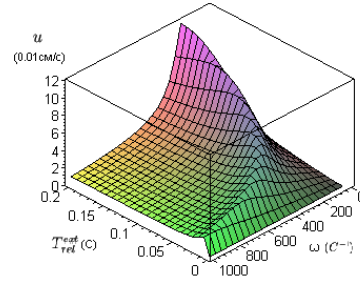


Рис.1.8

Во второй главе рассматривается задача о заполнении полости в среде Максвелла под действием постоянного давления на бесконечности.

2.1. Постановка задачи. Уравнение импульса и реологическое соотношение для среды Максвелла в сферической системе с учетом диагональности тензоров P и D и симметрии движения имеют вид:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 P_{rr})}{\partial r} - \frac{2P_{\theta\theta}}{r}. \quad (2.1)$$

$$\tau \left(\frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial r} \right) + P = -pI + 2\mu D.$$

Рассматривается несжимаемая среда Максвелла; для нее справедливо уравнение неразрывности, которое в сферических координатах записывается следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r} = 0. \quad (2.2)$$

Начальные и граничные условия:

$$P_{rr} = 0, \quad r = s(t), \quad t > 0, \quad (2.3)$$

$$P_{rr} - P_{\theta\theta} = R_0(r), \quad r > a, \quad t = 0, \quad (2.4)$$

2.2. Решение. Переход к дифференциальному уравнению. Решение строится при естественном предположении $R_0 = 0$, что соответствует шаровому тензору напряжений в начальный момент времени $t = 0$.

В результате формируется задача для границы полости $s(t)$:

$$\ddot{s} + \frac{3}{2} \frac{\dot{s}^2}{s} + 4\nu \frac{\dot{s}}{s^2} + \frac{p_0}{\rho} \frac{1}{s} + \tau \left\{ \frac{\dot{s}}{s} \left(\ddot{s} + \frac{3}{2} \frac{\dot{s}^2}{s} \right) + \frac{d}{dt} \left(\ddot{s} + \frac{3}{2} \frac{\dot{s}^2}{s} \right) \right\} = 0, \quad t > 0. \quad (2.5)$$

$$s(0) = a;$$

$$\dot{s}(0) = 0; \quad (2.6)$$

$$\ddot{s}(0) = \frac{1}{\rho} \left(\frac{dP_{rr0}}{dr} \right)_{r=a}.$$

2.3. Численное и асимптотическое решение. Решение уравнения (2.5) с начальными данными (2.6) строится численно методом Рунге-Кутты. В результате, в задаче о схлопывании полости в среде Максвелла определяется 3 различных режима заполнения:

1. Монотонное уменьшение радиуса полости до нуля за конечное время с ростом скорости движения границы до бесконечности;

2. Немонотонное схождение полости в точку за конечное время с ростом скорости до бесконечности;

3. Немонотонное схождение полости в точку за бесконечное время с затуханием колебаний границы с убыванием скорости до нуля.

Важно отметить, что «точка покоя» в уравнении (2.5) всегда одна, $s = 0$. Первый режим, указанный выше, по существу рэлеевский. Колебания, возникающие в режимах 2 и 3 за счет сил упругости, продолжаются конечное время, а финальные асимптотики дают монотонное изменение радиуса полости.

В случае конечного времени схлопывания увеличение времени релаксации среды Максвелла стимулирует более быстрое стягивание полости в точку.

Значительное влияние на конечность времени схлопывания оказывает начальное ускорение полости. Большое в абсолютном выражении ускорение наделяет границу полости достаточной кинетической энергией для преодоления сил вязкости и упругости и способствует стягиванию полости.

Аналогичное влияние оказывает число Рейнольдса. Чем оно выше, что соответствует большему начальному радиусу, тем с большей накопленной энергией проходит граница «критический» радиус, благодаря чему происходит схлопывание за конечное время. Критический начальный радиус полости при фиксированном времени релаксации среды – это максимальный радиус, при котором полость не стягивается в точку за конечное время при нулевом начальном ускорении.

Резюмируя, отметим, что режимы, при которых стягивание полости в среде Максвелла происходит за конечное и бесконечное время, отделяется друг от друга уже не сепаратрисой, как было у Забабахина в случае вязкой жидкости [3], а поверхностью в пространстве параметров Re , T и $\ddot{s}(0)$.

На основе асимптотического решения для случаев стягивания полости в точку за конечное и бесконечное время проводится анализ поведения решения задачи (2.5)-(2.6) вблизи момента схлопывания.

Устанавливается следующая асимптотика для соответствующих режимов:

$$1. s(t) \approx A(t_* - t)^{2/5}, t \rightarrow t_*;$$

$$2. s(t) \approx Be^{-\frac{t}{4}}, t \rightarrow \infty.$$

В третьей главе исследуется задача о заполнении сферической полости в среде Кельвина-Фойгта.

3.1. Заполнение сферической полости под действием постоянного давления на бесконечности. Математически модель среды Кельвина-Фойгта определяется уравнением состояния вида:

$$P = -pI + 2\mu D + 2\rho\kappa E \quad (3.1)$$

где E – тензор конечных деформаций. Используя уравнения состояния, движения и неразрывности, а также кинематическое условие на границе раздела, формируется задача для неизвестной функции P .

После интегрирования и использования условия согласования на бесконечности $P_{rr} = -p_0$, $r \rightarrow \infty$, строится нелинейное дифференциальное уравнение 2-го порядка с известными начальными данными для границы полости $s(t)$:

$$\ddot{s} + \frac{3}{2} \frac{\dot{s}^2}{s} + 4\nu \frac{\dot{s}}{s^2} + \kappa \frac{2s^3 - a^3}{s^3 a} + \left(\frac{p_0}{\rho} + \kappa \right) \frac{1}{s} = 0 \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} s(t) &= a, \\ \dot{s}(t) &= 0, t = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

В результате численного решения, устанавливается, что существует несколько режимов поведения границы полости:

1. Схождение в точку;
2. Монотонное уменьшение радиуса до положительного значения;
3. Немонотонное уменьшение радиуса до положительного значения.

В первом случае скорость схлопывания растет до бесконечности; во втором и третьем – убывает до нуля.

На рисунке 3.1 приведена карта соответствующих режимов на плоскости определяющих параметров $M = \frac{\kappa\rho}{p_0}$ и

$$Re = \frac{a}{\nu} \sqrt{\frac{p_0}{\rho}} \quad \text{с выделением}$$

областей. На рисунке 3.2 приводится динамика поведения границы полости для случая №3, который отсутствует в вязкой жидкости и появляется благодаря упругим свойствам среды.

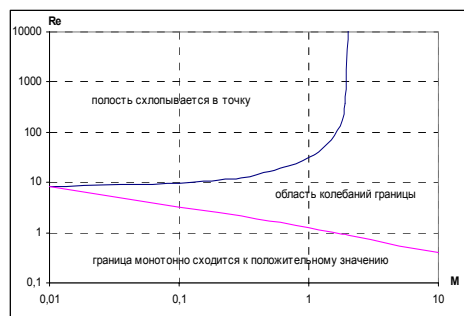


Рис.3.1. Карта режимов поведения границы полости на плоскости M, Re

В случае, когда полость сходится в точку, строится асимптотика решения уравнения (14) вблизи момента схлопывания, которая представляется выражением:

$$u(s) = -\frac{1}{2} \left(8 + (64 + 8M \operatorname{Re}^2)^{1/2} \right) \frac{1}{s}, \quad s \rightarrow 0. \quad (3.4)$$

При переходе к пределу «по упругости» асимптотика согласуется с результатом в задаче Забабахина о схлопывании полости в вязкой жидкости [3]-[5].

Во втором и третьем случаях, когда силы упругости достаточно велики и препятствуют схлопыванию полости, предельное значение границы полости d определяется из уравнения:

$$2Md^3 + \operatorname{Re}(1 + M)d^2 - M \operatorname{Re}^3 = 0 \quad (3.5)$$

Для данных двух случаев проведен анализ на фазовой плоскости.

3.2. Учет капиллярных сил. Рассматривается поведение полости в вязкоупругой среде Кельвина-Фойгта с учетом капиллярных сил. В этом случае уравнение (3.2) принимает следующий вид:

$$\ddot{s} + \frac{3}{2} \frac{\dot{s}^2}{s} + 4\nu \frac{\dot{s}}{s^2} + \left(\frac{p_0}{\rho} + \kappa \right) \frac{1}{s} + \frac{2\sigma}{\rho s^2} + \kappa \frac{2s^3 - a^3}{s^3 a} = 0.$$

Решение строится с помощью численного интегрирования. Учет капиллярных сил приводит к результатам, аналогичным рассмотренным выше. В отличие от результата Гальперина, описанного в работе [6], в случае малого начального радиуса капиллярные силы не устремляют скорость движения границы полости до конечного ненулевого значения и не приводят к схлопыванию полости за конечное время. Режим, обнаруженный Гальпериним, при учете сил упругости вписывается в режим номер два, описанный выше в настоящей работе: скорость уменьшается до нуля при стремлении радиуса полости к положительному значению. Влияние капиллярных сил проявляется в том, что они стремятся стянуть полость быстрее, чем это происходит только лишь благодаря давлению на бесконечности в случае отсутствия капиллярности. Но в процессе схлопывания, при достаточно большом начальном радиусе, силы упругости начинают преобладать и с некоторого момента могут препятствовать полному стягиванию полости в точку, стабилизируя ее радиус на определенном уровне (режим 2).

Асимптотическое поведение границы полости в среде Кельвина-Фойгта в момент схлопывания при наличии капиллярных сил совпадает с асимптотикой движения границы без их учета.

В случаях, когда силы упругости велики и препятствуют схлопыванию полости, предельное значение границы c определяется уравнением:

$$2Mc^3 + \operatorname{Re}(1 + M)c^2 + 2 \operatorname{Re} Nc - M \operatorname{Re}^3 = 0, \quad \text{где } N = \frac{\sigma}{\nu \sqrt{p_0 \rho}}. \quad (3.6)$$

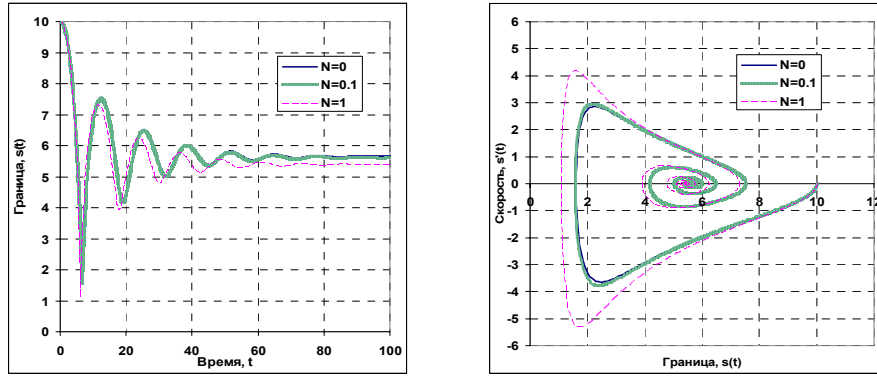


Рис.3.2. $Re=10$, $M=1$. Немонотонное уменьшение радиуса до положительного значения с убыванием скорости до нуля.

В четвертой главе рассматривается течение жидкости Бингама в круглой трубе с водяной смазкой.

4.1. Введение. Краткий обзор литературы. Определение вязкопластической среды Бингама.

4.2. Постановка задачи. Рассматривается стационарное течение двух жидкостей в круглой трубе под действием постоянного градиента давлений. Жидкость у стенок - ньютоновская, в центре - бингамовская. На границе раздела ставится условие равенства скоростей и касательных напряжений.

Уравнения движения записываются в терминах напряжений:

$$\begin{cases} \frac{dP'}{dr} + \frac{1}{r}P' + G = 0; \\ P' = \mu_1 k + P'_* \operatorname{sgn} k, k \neq 0; \\ |P'| \leq P'_*, k = 0, \\ 0 \leq r < l; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{dP'}{dr} + \frac{1}{r}P' + G = 0; \\ \tau = \mu_2 k, \\ l < r < R. \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\begin{cases} [u]^\pm = 0, [P']^\pm = 0, r = l, \\ u = 0, l = R, \end{cases} \quad (4.2)$$

где $k = \frac{du}{dr}$; $G = -\frac{dp}{dx}$ - градиент давлений; u - скорость течения жидкости; μ_1, μ_2 - динамические вязкости жидкостей Бингама и ньютоновской соответственно, l - радиус области, занимаемой средой Бингама, R - радиус трубы.

Система уравнений (4.1)-(4.2) включают в себя условия на границе «жесткой» зоны $r = r_*$, для которой выполнены соотношения:

$$\frac{du}{dr} = 0, P' = P'_*,$$

где r_* - неизвестная величина. Очевидно, в силу симметрии течения жесткая зона существует.

4.3. Решение. Анализ результатов. В качестве масштабов напряжения, длин по радиусу и по оси трубы, скорости выбираются величины P'_* , R и X , $P'_* R / \mu_2$ соответственно. Здесь X - некоторая характерная длина. $G_1 = GR / X$.

В результате решения находится поле скоростей:

$$\frac{G_1 l}{2} > 1, u(r) = \begin{cases} \frac{\mu_2}{\mu_1} (l-r) \left(\frac{G_1}{4} (l+r) - 1 \right) + \frac{G_1}{4} (1-l^2), & \frac{2}{G_1} \leq r \leq l; \\ \frac{\mu_2}{G_1 \mu_1} \left(\frac{G_1 l}{2} - 1 \right)^2 + \frac{G_1}{4} (1-l^2), & 0 \leq r \leq \frac{2}{G_1}; \\ \frac{G_1}{4} (1-r^2), & l \leq r \leq 1. \end{cases}$$

$$\frac{G_1 l}{2} \leq 1, u(r) = \begin{cases} \frac{G_1}{4} (1-l^2), & 0 \leq r \leq l; \\ \frac{G_1}{4} (1-r^2), & l \leq r \leq 1. \end{cases}$$

Расход Q жидкости Бингама определяется следующими выражениями:

$$Q = \begin{cases} \frac{\pi G_1 l^2}{4} (1-l^2) + \frac{\pi \mu_2 G_1 l^4}{8 \mu_1} \left(1 - \frac{2}{G_1 l} \right)^2 \left(1 + \frac{4}{3 G_1 l} + \frac{4}{3 G_1^2 l^2} \right), & G_1 l / 2 > 1; \\ \frac{\pi G_1 l^2}{4} (1-l^2), & G_1 l / 2 \leq 1. \end{cases}$$

При $l \rightarrow 1$ значения скорости $u(r)$ и расхода Q стремятся к уже известным результатам [7]. Полагая, что жидкость Бингама моделирует нефть, а ньютоновская жидкость – воду, можем рассмотреть зависимость расхода нефти от толщины слоя воды. Оказывается, находится такое l , при котором расход нефти существенно увеличивается по сравнению со случаем, когда нефть не обладает водяной смазкой. Это иллюстрирует Рис.4.1. Здесь $\mu_1 / \mu_2 = 10, G_1 = 50$.

Большую роль играют значения коэффициентов вязкости жидкостей. Чем больше отношение μ_1 к μ_2 , тем ошутимее относительное увеличение расхода жидкости Бингама со слоем смазки и без него.

С уменьшением же коэффициента вязкости внутренней жидкости до значения «смазывающей» жидкости и ниже, и при условии $G_1 \gg 2$, величина оптимального слоя смазки, при котором достигается максимум расхода

жидкости Бингама, стремится к нулю (Рис.4.2. $\mu_1/\mu_2 = 0.5, G_1 = 50$). Если последнее не выполняется и вязкость внутренней жидкости не выше вязкости смазки, то и в этом случае смазка увеличивает расход жидкости Бингама .

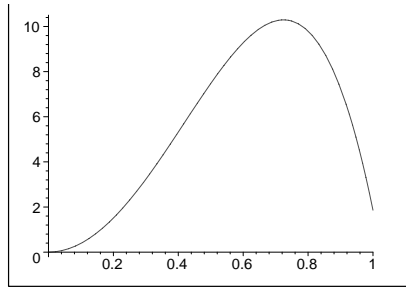


Рис.4.1

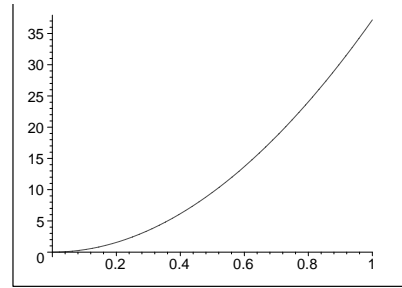


Рис.4.2

Заметим, что при малом градиенте давлений, в случае, когда $G_1 \leq 2$, «жесткая» зона занимает всю область жидкости Бингама и при отсутствии водяной смазки расход будет нулевым.

4.4. Движение капли под действием сил плавучести. Рассматривается задача движения капли в среде Бингама под действием массовых сил. Важной особенностью, которая отличает данную задачу от задачи из первой главы, является существование поверхности, выделяющей области, где среда движется как жидкость и твердое тело. В первой области течение описывается уравнением

$$P' = 2\mu D + \frac{P'_*}{|D|} D,$$

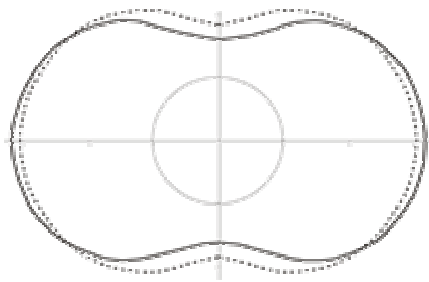
во второй напряжение не определено и является искомой величиной. Поверхность, отделяющая эти зоны, задается тождеством $|P'| = P'_*$.

Используя выражение для установившейся скорости движения капли в вязкой жидкости (задача Стокса) [2] и уравнение состояния $P' = 2\mu D$, можно определить поверхность, находящуюся на некотором расстоянии от капли, которая качественно совпадает с границей текучести при движении твердого шарика в теле Бингама, численно найденной в работе Бериса и других [10].

Уравнение для «свободной границы» имеет следующий вид:

$$F^2(\theta, R) = \frac{P_*'^2}{4(\mu^-)^2 U^2}, \text{ где } F^2(\theta, R) = \frac{a^2}{r^4} \left(5 \cos^2 \theta \left(A + \frac{3B}{r^2} \right)^2 + 18B^2 \frac{\sin^2 \theta}{r^4} \right).$$

Картина сечения данной поверхности в сравнении с ранее полученным результатом [10] приведена на Рис.4.5.



----- Численное решение
 ————— Аналитическое решение

Рис.4.5

В заключении приводятся основные выводы и результаты, полученные в работе.

ЛИТЕРАТУРА.

- [1] Антановский Л.К., Копбосынов Б.К. Нестационарный термокапиллярный дрейф капли вязкой жидкости // ПМТФ. 1986. №2. С. 59-64.
- [2] Бэтчелор Дж.К. Введение в механику жидкости. М.: Мир, 1973.
- [3] Забабахин Е.И. Заполнение пузырьков в вязкой жидкости // ПММ. 1960. С. 1129 – 1131.
- [4] Poritsky H. The Collapse or growth of a Spherical Bubble or Cavity in Viscous Fluid // Proceeding First U.S. Nat. Congress Applied Mech., ASME. 1952. P. 813 - 821.
- [5] Shu S.S. Note on the Collapse of a Spherical Cavity in a Viscous Incompressible Fluid // Proceeding First U.S. Nat. Congress Applied Mech., ASME. 1952. P. 823-825.
- [6] Андреев В.К. Устойчивость неустановившихся движений жидкости со свободной границей. Новосибирск: ВО Наука. 1992.
- [7] Жермен П. Курс механики сплошных сред. М.: Высшая школа. 1983.
- [8] Стебновский С.В. Динамооптический эффект в гомогенных жидкостях // ЖТФ. 2002. Т.72, №11. С. 24-27.
- [9] Стебновский С.В. О сдвиговой прочности структурированной воды // ЖТФ. 2004. Т.74, №1. С. 21-25.
- [10] Beris A.N. Creeping motion of a sphere through a Bingham plastic // Journal of Fluid Mechanics. V.158. 1985.

В заключение автор искренне благодарит научного руководителя чл.-корр. РАН В.В. Пухначева за постановку задач, полезные консультации и большое внимание к работе; д.ф.-м.н. С.В. Стебновского за ценные замечания и советы; проф. В.В. Шелухина за постановку задачи о течении жидкости Бингама и интерес к работе; проф. В.О. Бытева за важные рекомендации.

Основное содержание диссертации опубликовано в следующих работах:

- [11] Осипов С.В. Нестационарное движение капли максвелловской жидкости в среде Максвелла под действием монотонных и периодических сил // ПМТФ. 2005. Т. 46, №4. С. 55-65.
- [12] Осипов С.В. Стационарное течение жидкости Бингама в круглой трубе с водяной смазкой // Вестник НГУ. 2002. Т. II, вып. 3. С. 67-72.
- [13] Osipov S.V. Free Boundary Problems in Models of Viscoelastic Fluids Dynamics // NPDE-2007: Book of Abstracts, International Conference. Yalta, Ukraine, 2007. P. 52-53.
- [14] Осипов С.В. Задачи о заполнении полости в вязкоупругих средах Максвелла и Кельвина-Фойгта // Процессы управления и устойчивость: Тез. мат. Международной научной конференции аспирантов и студентов. Санкт-Петербург, 2007. С. 123-124.
- [15] Осипов С.В. О некоторых точных решениях в задачах о движении среды Максвелла // «Ломоносов-2006»: Сб. тез. XIII Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. Москва, 2006. С. 89 – 90.
- [16] Осипов С.В. Задача Адамара-Рыбчинского для тел Максвелла и Бингама // Студент и научно-технический прогресс: Материалы XLI Международной научной студенческой конференции. Новосибирск, 2003. С. 25-26.

Подписано к печати “5” октября 2007 г.
Формат 60×84/16. Объем 1.0 уч.-изд. л. Тираж 100 экз.

Отпечатано в Тюменском государственном университете.
625000, Тюмень, ул. Семакова, 8а