

На правах рукописи

СЛЕЗКО ИРИНА ВИКТОРОВНА

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ПРОЦЕССОВ

АСИММЕТРИЧНОЙ УПРУГОСТИ

**05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ**

АВТОРЕФЕРАТ

**диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук**

Тюмень – 2009

Работа выполнена на кафедре математического моделирования ГОУ
ВПО Тюменский государственный университет

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, доцент
Бытев Владислав Олегович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, доцент
Мальцева Татьяна Владимировна
кандидат технических наук, профессор
Кучерюк Виктор Иванович

Ведущая организация: Институт вычислительного моделирования
СО РАН, г. Красноярск

Защита диссертации состоится 28 мая 2009 г. в 14⁰⁰ часов на заседании
диссертационного совета Д 212.274.14 при Тюменском государственном
университете по адресу 625003, г. Тюмень, ул. Перекопская 15А, ауд. 410.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Тюменского
государственного университета.

Автореферат разослан «___» апреля 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета

Н.Н. Бутакова

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Методы теории упругости и ее приложений применяются в различных областях науки и техники. Задачи, которые удается решать в рамках линейной теории, разнообразны, однако в связи с внедрением гибких элементов, способных работать в закритической области при упругих деформациях, около полувека назад возник практический интерес к нелинейной теории упругости. Так, например, необходимость расчета резинотехнических изделий явилась мощным стимулом для развития прикладного направления нелинейной теории. В силу того, что отвечающие задачам нелинейной теории упругости уравнения сложны, точные решения их, как правило, получать не удается, а если и удается, то при большом числе допущений и ограничений на перемещения, деформации, углы поворота. Несомненно, инженеру хотелось бы иметь такой математический аппарат, который может быть реализован сравнительно просто.

В связи с этим актуальной задачей является разработка такой модели упругой деформации, которая позволила бы применять наиболее простые математические методы и приемы при решении задач об исследовании напряженно-деформированного состояния тела.

Решению этих проблем и посвящена настоящая работа.

Цель работы заключается в обосновании достоверности новой модели теории упругости – асимметричной упругости, использование которой позволило бы расширить класс задач, решаемых в рамках линейной теории.

Научная новизна работы состоит в следующем: на основе модели асимметричной упругости, разработанной В.О. Бытевым, получено аналитическое решение некоторых задач теории упругости (одноосное растяжение пластины, ослабленной отверстием; чистый изгиб в плоскости пластины, ослабленной отверстием; чистый сдвиг в пластине с отверстием); проведен сравнительный анализ решений, полученных посредством асимметричной модели и ее классического аналога; решены некоторые

задачи для пластин из эластомеров в рамках линейной теории; проведены экспериментальные исследования по растяжению пластин с целью установления соответствия моделей (классической и асимметричной) реальной физической картине.

Достоверность результатов обеспечивается следующими положениями: использованием классических уравнений механики деформируемого твердого тела (при решении задач в рамках классической теории); применением известных математических методов; тестированием реализованных программ на задачах с уже известными решениями; результатами экспериментального исследования, проведенного на базе лаборатории по сопротивлению материалов Тюменского государственного архитектурно-строительного университета.

Практическая ценность работы. Используя модель асимметричной упругости построены алгоритмы и разработаны программы для получения аналитических решений частных задач теории упругости и их визуализации.

Установлено, что с помощью модели асимметричной упругости можно описывать напряженно-деформированное состояние тел из материалов любой природы и решать задачи для эластомеров, оставаясь в рамках линейной теории.

Проведены экспериментальные исследования по растяжению пластин, подтверждающие достоверность результатов, полученных посредством асимметричной модели.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях и семинарах: Межрегиональная конференция "Современные математические методы и информационные технологии", 16 апреля 2007 г., ТюмГУ, Тюмень; XXI Международная научно-практическая конференция "Математические методы в технике и технологиях", 27-30 мая 2008 г., СГТУ, Саратов; Международная конференция по математической физике и ее приложениям, Самара, 8-13 сентября 2008 г.; IX Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и

информационным технологиям, Кемерово, 28-30 октября 2008 г.; XVI Зимняя школа по механике сплошных сред, 24-27 февраля 2009 г., Пермь; научные семинары кафедры математического моделирования ТюмГУ, 2007-2009 гг, Тюмень.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, списка литературы, двух приложений. Объем диссертации составляет 138 страниц, в том числе 93 рисунка. Список литературы состоит из 116 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, сформулирована цель и задачи, указана научная новизна, практическая ценность.

В первой главе проведен обзор и анализ математических моделей теории упругости, рассмотрены основные методы решения задач. Приводится модель асимметричной упругости, полученная В.О. Бытевым. Дается сопоставление асимметричной модели с классической.

Основные уравнения теории упругости задаются тремя группами соотношений. Первая группа представлена уравнениями статики

$$\operatorname{div} T + \mathbf{F} = 0, \quad (1)$$

которые связывают тремя соотношениями шесть компонент симметричного тензора напряжений T . Здесь \mathbf{F} – вектор объемной силы, рассчитанной на единицу объема.

Вторая группа уравнений содержит определение линейного тензора деформации ε через вектор перемещений \mathbf{u} :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2. \quad (2)$$

В (2) имеется шесть уравнений, определяющих компоненты тензора деформаций по первым производным трех компонент вектора перемещения.

В третьей группе из шести уравнений формулируется закон состояния линейно-упругого тела. Для изотропного тела этот закон — обобщенный закон Гука — записывается в форме

$$T = \lambda \theta I + 2\mu \varepsilon, \quad (3)$$

где θ — объемное расширение, I — единичный тензор, λ , μ — параметры Ламе.

Кроме того, должны выполняться шесть условий совместности деформаций.

К системе уравнений (1)–(3), определяющих поведение линейно-упругого тела в точках его объема, добавляются условия на ограничивающей его поверхности — краевые условия. Они определяют задание или внешних поверхностных сил (первая краевая задача), или перемещений точек поверхности (вторая краевая задача).

При решении задач теории упругости различают два пути решения в зависимости от того, что будет принято за основные неизвестные: если за неизвестные принимают шесть функций напряжений, то получают решение в напряжениях; если за неизвестные принимают три функции перемещений, то получают решение в перемещениях.

Обширной и наиболее полно разработанной главой теории упругости является так называемая плоская задача. В ней рассматриваются вопросы, отличающиеся по содержанию, но объединяемые математическим методом решения, — это задача о плоской деформации и задача о плоском напряженном состоянии.

Для решения задач плоской теории упругости разработаны как аналитические, так и численные методы.

Как показал Н.И. Мусхелишвили, с помощью введения функции напряжений, которую называют также функцией Эри, можно получить комплексное представление компонент вектора упругих перемещений и компонент напряжений.

Функция Эри связана с компонентами напряжений следующими соотношениями:

$$\sigma_{11} = \partial^2 U / \partial y^2, \quad \sigma_{22} = \partial^2 U / \partial x^2, \quad \sigma_{12} = -\partial^2 U / \partial x \partial y.$$

Комплексное представление функции Эри имеет вид:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} = \varphi(z) + z \overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)},$$

где функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ – голоморфные функции комплексного переменного $z = x + iy$. Функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ называют функциями напряжений или комплексными потенциалами.

Задача считается решенной, если для нее определены функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$.

Вектор перемещений представим через компоненты функции Эри $\varphi(z)$, $\psi(z)$:

$$2\mu(u + iv) = \kappa\varphi(z) - z \overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}, \quad (4)$$

здесь $\kappa = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} = 3 - 4\sigma$ – для случая плоской деформации и $\kappa = \frac{3 - \sigma}{1 + \sigma}$ – для

случая плоского напряженного состояния, σ – коэффициент Пуассона; λ , μ – параметры Ламе.

Компоненты напряжений имеют вид:

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = 4 \operatorname{Re}[\varphi'(z)],$$

$$\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} = 2[\overline{z} \varphi''(z) + \psi'(z)].$$

Объединим граничные условия и запишем их в виде:

$$\kappa_1 \varphi(z) + z \overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} = F(z), \quad (5)$$

где $\kappa_1 = 1$, $F = i \int_0^s (X_n + iY_n) ds + const$ на L – для первой основной задачи;

$\kappa_1 = -\kappa$, $F = -2\mu(g_1 + ig_2)$ на L – для второй основной задачи.

Н.И. Мусхелишвили излагает метод применения к задачам плоской теории упругости конформных отображений, а также сведение решения основных задач для областей, ограниченных одним контуром, к функциональным уравнениям. Приводит решения для некоторых областей, в частности для круга и кругового кольца.

Пусть заданы две комплексные плоскости Z , G и определено конформное отображение области $S \subset Z$ на область $\Sigma \subset G$: $z = \omega(\zeta)$.

Заменой переменной z на контуре L области S через $\omega(\zeta)$ обобщенное краевое условие (5) приводится к виду:

$$\kappa_1 \varphi(\sigma_0) + \frac{\omega(\sigma_0)}{\omega'(\sigma_0)} \overline{\varphi'(\sigma_0) + \psi(\sigma_0)} = F(\sigma_0) \text{ на } \gamma,$$

где σ_0 – точка на контуре γ .

При введении полярных координат (r, θ) на плоскости S компоненты напряжений можно привести к виду

$$\sigma_{rr} = \operatorname{Re} \left[(1 - \kappa_1) \frac{\varphi'(\sigma_0)}{\omega'(\sigma_0)} + \frac{\overline{F'(\sigma_0)}}{\overline{\omega'(\sigma_0)}} \right], \quad \sigma_{\theta\theta} = \operatorname{Re} \left[(3 + \kappa_1) \frac{\varphi'(\sigma_0)}{\omega'(\sigma_0)} - \frac{\overline{F'(\sigma_0)}}{\overline{\omega'(\sigma_0)}} \right],$$

$$\sigma_{r\theta} = \operatorname{Im} \left[(1 - \kappa_1) \frac{\varphi'(\sigma_0)}{\omega'(\sigma_0)} - \frac{\overline{F'(\sigma_0)}}{\overline{\omega'(\sigma_0)}} \right].$$

В частности, если контур свободен от внешних усилий, то напряжения находятся по формулам:

$$\sigma_{\theta\theta} = \operatorname{Re} \left[(3 + \kappa_1) \frac{\varphi'(\sigma_0)}{\omega'(\sigma_0)} - \frac{\overline{F'(\sigma_0)}}{\overline{\omega'(\sigma_0)}} \right], \quad \sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = 0. \quad (6)$$

Соотношения (6) должны выполняться одинаково при решении задачи в напряжениях и перемещениях. Однако они выполнены только для круга, т.к. в этой задаче функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ определяются точно. В тех же задачах, где используется конформное отображение, эти функции находятся не точно и соотношения (6) выполняются приближенно.

Теперь рассмотрим модель асимметричной теории упругости.

Методами группового анализа, разработанными Л.Д. Овсянниковым, в работах В.О. Бытева решена общая задача классификации моделей чисто механического континуума, который описывается системой дифференциальных уравнений, выражающих законы сохранения – массы, импульса, момента импульса, энергии.

Полученная классификация позволяет предложить следующий вид тензора напряжений в случае его линейной зависимости от тензора деформаций:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= (\lambda_0 + \mu)\varepsilon_{11} + 2\mu_0\varepsilon_{12} + (\lambda_0 - \mu)\varepsilon_{22}, \\ \sigma_{12} &= \mu_0\varepsilon_{11} + 2\mu\varepsilon_{12} + \mu_0\varepsilon_{22}, \\ \sigma_{22} &= (\lambda_0 - \mu)\varepsilon_{11} - 2\mu_0\varepsilon_{12} + (\lambda_0 + \mu)\varepsilon_{22}.\end{aligned}\tag{7}$$

Здесь $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ – компоненты тензора напряжений T , ε_{ij} – компоненты тензора деформаций.

Конститутивные уравнения (7) содержат три кинетических параметра λ_0 , μ и μ_0 , причем $\lambda_0 > 0$, $\mu > 0$, а μ_0 может принимать любое вещественное значение. Следует заметить, что замена $\lambda_0 = \lambda + \mu$ (считаем λ , μ параметрами Ламе) при $\mu_0 = 0$ сводит (7) к классической системе конститутивных уравнений.

В общем виде равенства (7) могут быть записаны так:

$$T = I\lambda_0 \operatorname{div} \mathbf{u} + MD_0.\tag{8}$$

Здесь D_0 – девиатор тензора деформаций, I – единичный тензор,

$$M = \begin{pmatrix} \mu & \mu_0 \\ -\mu_0 & \mu \end{pmatrix}.\tag{9}$$

Из (8) с учетом (9) следует асимметричная связь компонент девиатора тензора напряжений и девиатора тензора деформаций. Полученная таким образом модель названа асимметричной упругостью. Модель асимметричной упругости не связана с моделью несимметричной моментной упругости.

Если рассмотреть матрицу A коэффициентов системы (7), то можно показать, что ее определитель отличен от нуля:

$$\det A = 2\lambda_0\kappa_0^2 \neq 0, \quad \kappa_0^2 = \mu^2 + \mu_0^2.$$

Следовательно, из (7) находятся обратные зависимости между σ_{ij} и ε_{ij} однозначно.

Вводя функцию напряжений Эри, по аналогии с тем, как это сделано в работах Н.И. Мусхелишвили, можно представить уравнение для компонент вектора упругих перемещений \mathbf{u} в комплексной формулировке:

$$2\kappa_0^2(u + iv) = (2\lambda_0^{-1}\kappa_0^2 + \bar{\kappa})\varphi(z) - \kappa z \overline{\varphi'(z)} - \overline{\kappa\psi(z)}. \quad (10)$$

Краевое условие во второй основной задаче теории упругости – о нахождении упругого равновесия при заданных смещениях точек границы – примет вид:

$$2\kappa_0^2(g_1 + ig_2) = (2\lambda_0^{-1}\kappa_0^2 + \bar{\kappa})\varphi(z) - \kappa z \overline{\varphi'(z)} - \overline{\kappa\psi(z)},$$

где g_1, g_2 – заданные смещения граничных точек.

Из (10) при $\lambda_0 = \lambda + \mu$ и $\mu_0 = 0$ получаем классическое уравнение (4):

$$2\mu(u + iv) = \kappa\varphi(z) - z \overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}.$$

Уравнение (10) является обобщением классических формул Лява (4).

Пусть снова заданы две комплексные плоскости Z, G и определено конформное отображение $z = \omega(\zeta)$ области $S \subset Z$ на область $\Sigma \subset G$.

Введем на плоскости G полярные координаты (ρ, ϑ) так, что $\zeta = \rho e^{i\vartheta}$. Из (10) находим полярное представление вектора смещений

$$2\kappa_0^2(u_\rho + iu_\vartheta) = e^{-i\vartheta} \left[(2\lambda_0^{-1}\kappa_0^2 + \bar{\kappa})\varphi(\zeta) - \kappa\zeta \overline{\varphi'(\zeta)} - \overline{\kappa\psi(\zeta)} \right]. \quad (11)$$

Итак, после того как найдены перемещения с помощью уравнения (11), находятся компоненты тензора деформаций, а по ним определяется поле напряжений по уравнениям (7).

Вторая глава посвящена обоснованию достоверности модели асимметричной упругости на примере решения конкретных задач.

Приведены аналитические решения некоторых задач асимметричной теории упругости и их визуализация. Проведен сравнительный анализ с классическими решениями.

1. Одноосное растяжение пластины с отверстием. Рассмотрены случаи эллиптического, треугольного, квадратного отверстий. Для эллиптического отверстия рассмотрены различные частные случаи: круг, эллипс, разрез. Кроме того, при решении задачи об одноосном растяжении пластины, ослабленной эллиптическим отверстием, используются разные способы отображения внешности эллиптического отверстия – на внешность и внутренность круга единичного радиуса.

2. Чистый изгиб пластины с отверстием. Рассмотрены случаи квадратного и эллиптического отверстия. Для эллиптического отверстия рассмотрены различные частные случаи: круг, эллипс, разрез.

3. Чистый сдвиг в пластине, ослабленной отверстием в форме квадрата.

В качестве примера иллюстрации новых эффектов деформации асимметрично-упругих пластин приведем решение задачи об одноосном растяжении пластины, ослабленной эллиптическим отверстием.

Решение задачи ищется с помощью конформного отображения внешности эллиптического отверстия на внешность круга единичного радиуса известной функцией:

$$z = \omega(\zeta) = R \left(\zeta + \frac{m}{\zeta} \right),$$

где $R > 0$, $0 \leq m \leq 1$.

Здесь R отвечает за размеры отверстия, m – за соотношение между полуосями. Единичной окружности $|\zeta|=1$ соответствует эллипс с центром в начале координат и полуосями $a = R(1+m)$, $b = R(1-m)$. При $m=0$ имеем окружность, при $m=1$ – разрез.

Выражения для функций напряжения будут в этом случае иметь вид:

$$\varphi(\zeta) = \frac{pR}{4} \left(\zeta + \frac{2e^{2i\alpha} - m}{\zeta} \right),$$

$$\psi(\zeta) = -\frac{pR}{2} \left[e^{-2i\alpha} \zeta + \frac{e^{2i\alpha}}{m\zeta} - \frac{(1+m^2)(e^{2i\alpha} - m)}{m} \cdot \frac{\zeta}{\zeta^2 - m} \right].$$

Здесь p – растягивающее усилие, составляющее угол α с осью Ox . Для данной задачи получены выражения для компонент вектора смещений и поля напряжений для любых ρ , α и m .

Причем выражения для компонент напряжений не содержат параметров материала и одинаковы для каждой из рассматриваемых моделей. Поэтому подробнее остановимся на исследовании деформированного состояния рассматриваемых тел (пластин).

Заметим, что в случае кругового отверстия ($m=0$) конформное отображение не требуется и функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ находятся в виде:

$$\varphi(z) = \frac{p}{4} \left(z + \frac{2R^2}{z} \right), \quad \psi(z) = -\frac{p}{2} \left(z + \frac{R^2}{z} - \frac{R^4}{z^3} \right).$$

Круговое отверстие

Приведем выражения для компонент вектора смещений u_ρ , u_ϑ , u_ρ^{cl} , u_ϑ^{cl} и компонент напряжений $\sigma_{\rho\rho}$, $\sigma_{\rho\vartheta}$, $\sigma_{\vartheta\vartheta}$, $\sigma_{\rho\rho}^{cl}$, $\sigma_{\rho\vartheta}^{cl}$, $\sigma_{\vartheta\vartheta}^{cl}$ асимметричной и классической моделей соответственно. Отметим, что выражения для компонент u_ρ^{cl} , u_ϑ^{cl} , $\sigma_{\rho\rho}^{cl}$, $\sigma_{\rho\vartheta}^{cl}$, $\sigma_{\vartheta\vartheta}^{cl}$ совпадают с выражениями, полученными другими авторами, например, Н.И. Мусхелишвили. Напомним, что классическое решение получено из асимметричного при $\lambda_0 = \lambda + \mu$ и $\mu_0 = 0$.

$$u_\rho = \frac{pR}{4} \cdot \frac{\kappa_0^2 + \lambda_0\mu}{\lambda_0\kappa_0^2} [2\cos(2\vartheta - 2\alpha) + 1], \quad u_\vartheta = -\frac{pR}{2} \cdot \frac{\kappa_0^2 + \lambda_0\mu}{\lambda_0\kappa_0^2} \sin(2\vartheta - 2\alpha),$$

$$u_\rho^{cl} = \frac{pR}{4} \cdot \frac{\lambda + 2\mu}{\mu(\lambda + \mu)} [2\cos(2\vartheta - 2\alpha) + 1], \quad u_\vartheta^{cl} = -\frac{pR}{2} \cdot \frac{\lambda + 2\mu}{\mu(\lambda + \mu)} \sin(2\vartheta - 2\alpha),$$

$$\sigma_{\rho\rho} = \sigma_{\rho\rho}^{cl} = 0, \quad \sigma_{\rho\vartheta} = \sigma_{\rho\vartheta}^{cl} = 0, \quad \sigma_{\vartheta\vartheta} = \sigma_{\vartheta\vartheta}^{cl} = p[1 - 2\cos(2\vartheta - 2\alpha)].$$

Для анализа полученных решений рассматриваются материалы различных типов: пластичные (сталь), хрупкие (оргстекло), гибкие (резина). Основные физико-механические показатели материалов зависят от их химического состава и, соответственно, варьируются в некотором диапазоне. Для расчетных моделей выбраны следующие значения физических характеристик рассматриваемых материалов (здесь σ – коэффициент Пуассона, E – модуль Юнга и σ_{np} – предел прочности при растяжении):

Тип материала	σ	E (Па)	σ_{np} (МПа)
сталь	0,3	$19500 \cdot 10^7$	400
оргстекло	0,33	$330 \cdot 10^7$	70
резина	0,46	$0,15 \cdot 10^7$	12

Кроме того, при рассмотрении задачи о растяжении резиновой пластины, задавать начальные условия будем в соответствии с проведенным экспериментом. Экспериментальное исследование по растяжению пластин проводилось на разрывной машине "INSTRON–3382". При растяжении резиновых образцов разрушающая нагрузка составила 1,76 (МПа).

Рассмотрим случай кругового отверстия $R = 0,25$ (см). При задании начальных условий радиус отверстия выбирается не совсем произвольно.

В самом общем случае при решении подобных задач рассматривается бесконечная пластина. Однако на практике приходится иметь дело с пластинами конечной ширины. Поэтому встает естественный вопрос о том, в каких случаях (соблюдая определенную степень точности) решения, полученные для бесконечных областей, можно применять для конечных областей и каково должно быть соотношение между диаметром отверстия и шириной подвергающейся деформированию пластины.

Согласно исследованиям Г.Н. Савина, если ограничиться точностью до 6%, то решения, полученные для неограниченных областей, можно применять к пластинам конечных размеров, если диаметр отверстия

(центрально расположенного) не менее чем в пять раз меньше ширины пластины.

Итак, отношение диаметра отверстия к ширине рассматриваемой пластины $a = 2,5$ (см) равно: $2R/a = 5/25 = 1/5$.

Таким образом, проведенный эксперимент вполне согласуется с теоретическими расчетами.

Пусть имеем стальную пластину. Растяжение ведется вдоль оси Ox ($\alpha = 0$) усилием $p = 400$ (МПа). Значение параметра $\mu_0 = 15^{10}$ (Па). Визуальных различий между годографами вектора смещений асимметричной и классической моделей не наблюдается. Чтобы проанализировать различия в значениях компонент вектора перемещений, построим графики компонент асимметричной и классической моделей (рис. 1, 2).

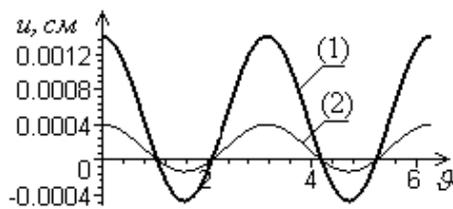


Рисунок 1. Радиальная составляющая вектора смещений (сталь): (1) – классической модели, (2) – асимметричной модели.

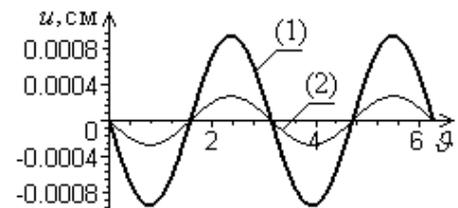


Рисунок 2. Угловая составляющая вектора смещений (сталь): (1) – классической модели, (2) – асимметричной модели.

Из рисунков 1, 2 видно, что значения компонент вектора смещений асимметричной модели в несколько раз меньше соответствующих им значений классической. Вместе с тем, характер изменения функций одинаков. Обе функции достигают своих наибольших и наименьших значений при одних и тех значениях угла φ .

Для стали обе модели вполне адекватно отражают физическую картину.

Для данных начальных условий μ_0 меняется в диапазоне от 12^{10} (Па) до 15^{10} (Па). При изменении размера отверстия получаем следующее:

$$\text{при } R = 0,1 \text{ (см), } \mu_0 \in [12^{10} \text{ (Па); } 15^{10} \text{ (Па)}];$$

$$\text{при } R = 0,35 \text{ (см), } \mu_0 \in [12^{10} \text{ (Па); } 15^{10} \text{ (Па)}].$$

Под диапазоном "влияния" μ_0 будем понимать такой интервал, что начало его соответствует тому моменту, когда решение становится "физичным" или происходит "сглаживание" решения. Конец этого интервала определяется таким значением μ_0 , начиная с которого, для всех остальных значений, мы уже не наблюдаем никаких изменений в поведении компонент перемещений.

Для пластины из оргстекла качественно полученные результаты аналогичны результатам для стальной пластины.

Далее будем моделировать растяжение резиновой пластины при нагрузке $p = 1,6$ (МПа) и значении модуля $\mu_0 = 13^5$ (Па). Значение нагрузки p является близким к критическому, при котором происходит разрушение испытательного образца.

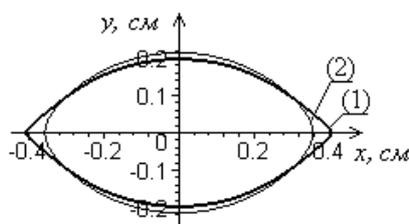


Рисунок 3. Годограф вектора смещений (резина): (1) – классической модели, (2) – асимметричной модели.

На рис. 3 видно, что на годографе вектора смещений классической модели наметились углы в направлении приложения нагрузки, чего нет на годографе асимметричной модели. Заметим, что при дальнейшем увеличении нагрузки на годографе классической модели начинают появляться петли. Асимметричная модель позволяет описывать напряженно-деформированное состояние тела и при дальнейшем увеличении нагрузки – в расчетной модели это может соответствовать уменьшению модуля Юнга.

Эллиптическое отверстие

Далее рассматривается случай эллиптического отверстия для $m = 1/2$. Кроме того, растяжение осуществляется под разными углами: а) $\alpha = 0$, б) $\alpha = \pi/2$, в) $\alpha = \pi/3$.

Стальная пластина растягивается усилием $p = 400$ (МПа) под углом $\alpha = 0$. Заметим, что перемещения достаточно малы, поэтому на годографах вектора смещений не удастся увидеть различий, только при условии сильного увеличения. Поэтому приводим только графики компонент. На рис. 4–5 представлены графики составляющих вектора смещений при $\mu_0 = 15^{10}$ (Па).



Рисунок 4. Радиальная составляющая вектора смещений (сталь): (1) – классической модели, (2) – асимметричной модели.

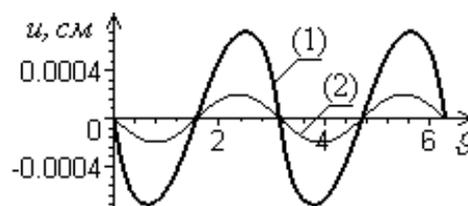


Рисунок 5. Угловая составляющая вектора смещений (сталь): (1) – классической модели, (2) – асимметричной модели.

Для случая приложения нагрузки под другими углами результаты получены аналогичные. При растяжении стальной пластины с отверстием эллиптической формы компоненты вектора смещений для асимметричной и классической моделей имеют различный характер поведения при изменении угла φ .

Параметр μ_0 влияет на решение, варьируясь в диапазоне от 13^{10} (Па) до 15^{10} (Па). Причем при изменении размера отверстия этот диапазон сохраняется неизменным.

При рассмотрении пластины из оргстекла получаем аналогичные результаты – компоненты вектора смещений различаются и качественно, и количественно.

Теперь пусть имеем резиновую пластину. Зададим R таким образом, чтобы отношение большей оси эллипса к ширине пластины не превосходило пяти. То есть $R = 0,17$ (см). Растягивающее усилие $p = 0,8$ (МПа). В этом случае различия в решениях, полученных по двум моделям очевидны, поэтому графики компонент вектора смещений не приводятся. На рис. 6–8 представлены годографы вектора смещений при $\mu_0 = 2$ (МПа) для различных

вариантов приложения нагрузки: под углами $\alpha = 0$, $\alpha = \pi/2$, $\alpha = \pi/3$ соответственно.

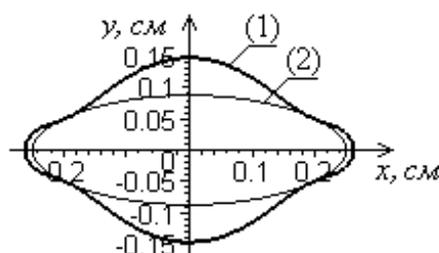
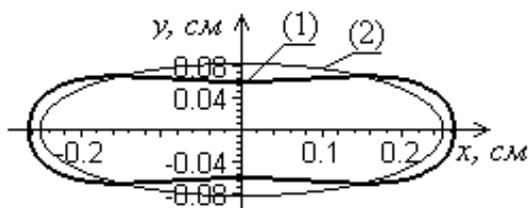


Рисунок 6. Годограф вектора смещений (резина, $\alpha=0$): (1) – классической модели, (2) – асимметричной модели. **Рисунок 7.** Годограф вектора смещений (резина, $\alpha=\pi/2$): (1) – классической модели, (2) – асимметричной модели.

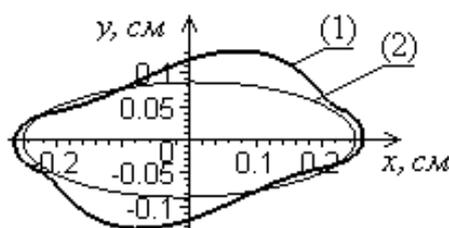


Рисунок 8. Годограф вектора смещений (резина, $\alpha=\pi/3$): (1) – классической модели, (2) – асимметричной модели.

Как видно из рис. 6–8 годограф вектора смещений классической модели начинает приобретать физически нереальную форму. Причем нагрузка задается не критическая. При дальнейшем увеличении нагрузки на годографе классической модели начинают образовываться петли различных конфигураций. При этом в случае асимметричной модели с помощью "поправки" μ_0 решение удастся "регуляризовать" вплоть до предельной нагрузки $p = 12$ (МПа).

Здесь параметр μ_0 влияет на решение, варьируясь в диапазоне от 1,5 (МПа) до 2 (МПа) при $\alpha = 0$; от 2,5 (МПа) до 4 (МПа) при $\alpha = \pi/2$; от 1 (МПа) до 2 (МПа) при $\alpha = \pi/3$.

Заметим, что классическая модель "работает" тем хуже, чем ближе m к единице, т.е. чем ближе эллипс по форме к разрезу.

Итак, имеем следующее: для эллиптического отверстия (имеются в виду различные частные случаи) обе модели дают приемлемые результаты для стали, оргстекла. Для пластин из эластомеров классическая модель не дает

физически реального результата, в некоторых случаях и при сравнительно малых нагрузках. Асимметричная же модель, напротив, позволяет работать с таким отверстием при нагрузках, близких к критическим. Компоненты вектора смещений в большинстве частных случаев носят как качественные, так и количественные различия.

В процессе данного диссертационного исследования получены и проанализированы решения и других задач – задача об одноосном растяжении пластин с другими формами отверстий, задача о чистом изгибе в плоскости пластины с отверстием (рассмотрены отверстия разных форм), задача о чистом сдвиге в пластине с отверстиями различных форм, и другие задачи. При решении и сравнительном анализе получены результаты, аналогичные изложенным выше.

В третьей главе приводится описание экспериментального исследования, а также его результаты.

Как уже было отмечено, экспериментальное растяжение резиновых пластин проводилось на базе лаборатории по сопротивлению материалов ТюмГАСУ на разрывной машине “INSTRON–3382”.

Растяжению подвергались образцы:

- длинные, с рабочей областью 20 см, с центрально расположенным отверстием;
- короткие, с рабочей областью 5 см, с центрально расположенным отверстием.

Разрушающая нагрузка для длинных образцов составила 1,76 МПа, для коротких – от 1,6 МПа до 1,72 МПа.

При проведении вычислительного эксперимента нагрузка в расчетной модели задавалась близкая к разрушающей нагрузке (задача об одноосном растяжении пластины с круговым отверстием). Для других форм отверстий задавалось такое же значение нагрузки и параметры отверстия подбирались таким образом, чтобы по площади отверстие не превосходило площади круга радиуса $R=0,25$ см.

В главе проводится сопоставление решений, полученных для каждой из моделей с экспериментальными данными. Делается вывод о соответствии решений результатам эксперимента.

Однако заметим, что экспериментальное исследование носит, скорее, иллюстративный характер.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

В заключении дан обзор основных результатов, полученных в диссертационной работе.

При анализе полученных решений установлено, что модуль μ_0 "влияет" на решение, "регуляризует" его, изменяясь в некотором диапазоне. Причем указанный диапазон индивидуален. Основным определяющим критерием изменения диапазона являются физико-механические свойства материала.

Проведен сравнительный анализ полученных решений с решениями, соответствующими классической теории упругости. Классические решения получались путем подстановки в асимметричные решения $\lambda_0 = \lambda + \mu$ и $\mu_0 = 0$, где λ и μ – параметры Ламе. В результате проведенного сравнения оказалось, что при работе с пластичными и хрупкими материалами обе модели дают адекватные результаты. В этом случае установлено, что:

– качественное поведение компонент вектора смещений асимметричной и классической моделей имеет существенные различия. Для асимметричной модели наблюдается более "сглаженный" характер – это объясняется появлением "поправочного" коэффициента. Количественные различия также присутствуют, однако, в силу малости перемещений, это несущественно отражается на полученных результатах;

– компоненты напряжений различий не имеют;

– обе модели адекватно отражают результаты.

Противоположная ситуация складывается при работе с эластомерами. Классическая модель не позволяет получать физически реальные результаты. Вообще говоря, этот результат был ожидаемым. Однако использование

асимметричной модели приводит к физически реальным результатам и при работе с гибкими материалами. Причем, как следует из расчетов, модель позволяет "работать" с материалами, имеющими малый модуль Юнга, а также при нагрузках, близких к критическим. Кроме того, проведенное экспериментальное исследование подтверждает полученные результаты.

Можно говорить о том, что асимметричная модель деформации упругого тела, полученная В.О. Бытевым в результате решения задачи групповой классификации законов сохранения, достоверно отражает физическую картину деформации упругого тела. Причем в некоторых случаях она может оказаться предпочтительнее классической модели при работе не только с эластичными материалами, но и любыми другими, в силу "сглаженности" решений. Это может оказаться существенным при моделировании, например, трещин в механике разрушения.

Основной вывод: использование модели асимметричной упругости значительно расширяет круг задач, которые можно решать в рамках линейной теории, что, несомненно, очень важно.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Основное содержание диссертационной работы опубликовано в 10 статьях и 3 тезисах. Две из них опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК.

1. Бытев В.О., Слезко И.В. Точные решения некоторых задач плоской асимметричной теории упругости // Математическое и информационное моделирование: Сб. научных трудов. – Вып. 9. – 2007. – Тюмень: Изд-во Вектор Бук. – С. 31–44.

2. Бытев В.О., Слезко И.В., Николаев Д.Е. Точные решения некоторых задач плоской асимметричной теории упругости // Вестник ТюмГУ, 2007. – № 5. – Тюмень: Изд-во ТюмГУ. – С. 32–43.

3. Бытев В.О., Слезко И.В. Точные решения некоторых задач плоской асимметричной теории упругости // Сборник трудов XXI Международной

научной конференции "Математические методы в технике и технологиях", 2008. – Т. 4. – Саратов: Изд-во Саратовского гос. технич. ун-та. – С. 86–87.

4. Бытев В.О., Слезко И.В. Асимметричная упругость // Альманах современной науки и образования, 2008. – № 7(14). – Тамбов: Грамота. – С. 33–34.

5. Бытев В.О., Слезко И.В. Решение задач асимметричной упругости // Математическое и информационное моделирование: Сб. научных трудов. – Вып. 10.– 2008. – Тюмень: Изд-во Вектор Бук. – С. 27–32.

6. Бытев В.О., Слезко И.В. Метод конформных отображений в теории упругости // Математическое и информационное моделирование: Сб. научных трудов.– Вып. 10. – 2008. – Тюмень: Изд-во Вектор Бук. – С. 32–37.

7. Бытев В.О., Слезко И.В. Решение задач асимметричной упругости // Вестник СамГУ – Естественнонаучная серия, 2008. – № 6 (65). – Самара: Изд-во СамГУ. – С. 238–243.

8. Бытев В.О., Слезко И.В. Задачи плоской асимметричной упругости // Вестник ТюмГУ, 2008. – № 6. – Тюмень: Изд-во ТюмГУ. – С. 119–122.

9. Бытев В.О., Слезко И.В., Николаев Д.Е. Определение критической нагрузки в задачах асимметричной упругости // Тезисы IX Всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям, Кемерово, 28–30 октября 2008. – С. 37.

10. Бытев В.О., Слезко И.В. Асимметричная упругость // Вестник ТулГУ – Актуальные вопросы механики, 2008. – Вып. 4 . – Т. 1. – Тула: Изд-во ТулГУ. – С. 20–27.

11. Бытев В.О., Слезко И.В. Асимметричная упругость // Тезисы Международной конференции по математической физике и ее приложениям, Самара, 8–13 сентября 2008. – Самара: Изд-во СамГУ. – С. 44–46.

12. Бытев В.О., Слезко И.В. Некоторые задачи асимметричной упругости // Тезисы XVI Зимней школы по механике сплошных сред. – Пермь. – 2009. – С. 80-81.

13. Бытев В.О., Слезко И.В. Некоторые задачи асимметричной упругости // Труды XVI Зимней школы по механике сплошных сред (механика сплошных сред как основа современных технологий (электронный ресурс)). – Пермь: ИМСС УрО РАН. – 2009. Электронный оптический диск (CD).