

На правах рукописи



Бахтий Николай Сергеевич

**Некоторые аспекты моделирования  
многофазной многокомпонентной  
фильтрации и тестирования вычислительных  
алгоритмов, индуцированные программным  
комплексом «Техсхема»**

05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и  
комплексы программ

**АВТОРЕФЕРАТ**  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Работа выполнена на кафедре алгебры и математической логики  
Института математики, естественных наук и информационных  
технологий ФГБОУ ВПО Тюменский государственный университет.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,  
профессор,  
Кутрунов Владимир Николаевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,  
профессор,  
Кислицын Анатолий Александрович  
(ФГБОУ ВПО Тюменский государ-  
ственный университет)

доктор технических наук,  
Стрекалов Александр Владимирович  
(ФГБОУ ВПО Тюменский государ-  
ственный нефтегазовый университет)


Ведущая организация: ОАО «Сибирский научно-исследова-  
тельный институт нефтяной промыш-  
ленности»

Защита состоится «30» мая 2012 г. в 15.00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.274.14 при ФГБОУ ВПО Тюменский государственный университет по адресу 625003, г.Тюмень, ул. Перекопская, 15А, ауд. 410.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Тюменского государственного университета.

Автореферат разослан «    » апреля 2012 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета

 — А.А. Ступников

# ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

## **Актуальность работы**

Математическое моделирование добычи нефти и газа является важным этапом проектирования разработки месторождений. Более того, в настоящее время в нашей стране при составлении проектной документации на разработку месторождений углеводородов создание геологической и фильтрационной модели является обязательным (ГОСТ Р 53710-2009). Ввиду высокой стоимости бурения основных и боковых стволов, а также высокой выработанности основных месторождений Западной Сибири, в Тюменском регионе геологическое и гидродинамическое моделирование широко применяется для повышения эффективности геолого-технологических мероприятий и снижения рисков. Адекватная действительности фильтрационная модель позволяет локализовать зоны с невовлечёнными в разработку запасами углеводородов, назначить адресные геолого-технологические мероприятия и выбрать оптимальный рациональный вариант разработки месторождения.

На данный момент в нашей стране для моделирования фильтрационных процессов чаще всего применяются программные продукты иностранных компаний: STARS компании CMG, Eclipse компании Schlumberger, Tempest компании Roxar и т.д. Среди отечественных программ отметим tNavigator компании Rock Flow Dynamics, МКТ группы компаний TimeZYX и программный комплекс (ПК) «Техсхема» научно-исследовательского и проектного института «СургутНИПИнефть». ПК «Техсхема» создал и в течение почти тридцати лет совершенствовал специалист высокого класса в области вычислительной гидродинамики, кандидат технических наук, Виктор Петрович Майер. За это время с использованием ПК «Техсхема» успешно проектировалась разработка большинства месторождений Западной Сибири (и многих месторождений других регионов). Ввиду возросших требований к гидродинамическим моделям, а также с учётом развития технологий программирования, возникла необходимость создания новой версии программного комплекса «Техсхема». Таким образом, ввиду малого количества отечественного программного обеспечения и широкого использования дорогостоящих зарубежных аналогов, создание качественного отечественного программного комплекса для создания гидродинамических моделей пластовых систем является важной и актуальной практической задачей. Данная работа посвящена авторским алгоритмам, положенным в основу новой версии ПК «Техсхема».

Также актуальной задачей является тестирование вычислительных алгоритмов и получение новых аналитических решений, на основе кото-

рых возможно проверить корректность численных результатов, что подтверждается существующими тестами Американского общества инженеров-нефтяников (SPE) и Центральной комиссии ресурсов Российской Федерации. Данной задаче посвящена третья глава диссертационной работы.

### **Цель диссертационной работы**

1. Анализ математических моделей многофазной фильтрации.
2. Изучение напорного и безнапорного фильтрационного течения в рамках многофазной многокомпонентной модели фильтрации «Техсхема», предложенной В.П.Майером и Ю.Е.Батуриным.
3. Изучение и совершенствование численных методов решения разностных уравнений, получаемых дискретизацией исходной замкнутой консервативной системы дифференциальных уравнений в частных производных.
4. Построение новых аналитических тестовых решений и тестирование вычислительных алгоритмов с их помощью.
5. Автоматизация процесса адаптации фильтрационной модели на историю разработки.
6. Создание эффективного современного программного комплекса, позволяющего решать широкий спектр практических фильтрационных задач, возникающих при проектировании разработки месторождений углеводородов.

**На защиту выносятся следующие основные результаты и положения**, соответствующие трём пунктам паспорта специальности 05.13.18 — математическое моделирование, численные методы и комплексы программ по техническим наукам.

*Пункт 1: Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей.*

Новое аналитическое решение задачи притока жидкости к несовершенной скважине, позволяющее оценить жидкостный дебит вертикальной скважины, характеризующейся неполным вскрытием пласта. Новое аналитическое решение задачи разгазирования нефти, позволяющее качественно изучить процесс фазовых переходов, происходящих в пластовых системах, в рамках математической модели «Техсхема».

*Пункт 2: Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий.*

При решении итерационными предобусловленными методами системы линейных алгебраических уравнений, являющейся дискретным аналогом уравнения для пластового давления, возможно сократить время рас-

чёта с использованием адаптивного предобусловливания. Тестирование гидродинамических симуляторов «Техсхема» и Eclipse позволило оценить область применения формулы Писмена, ограниченную допущениями, сделанными при её выводе.

*Пункт 3: Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента.*

Программный комплекс «Техсхема», предназначенный для создания геолого-технологических моделей, разрабатываемый с использованием предложенных методов, и используемый для проведения вычислительных экспериментов в научно-исследовательском и проектном институте «СургутНИПИнефть» (ОАО Сургутнефтегаз).

Таким образом, в соответствии с формулой специальности 05.13.18 в диссертации представлены оригинальные результаты одновременно из трёх областей: математического моделирования, численных методов и комплексов программ.

### **Научная новизна**

1. Предложен простой критерий, на основе которого при расчёте пластового давления принимается решение о построении нового предобусловливателя или использовании его с предыдущего временного слоя (IMPES-схема решения уравнений фильтрации).

2. Получено новое аналитическое решение задачи притока к несовершенной скважине. Данное решение было использовано при тестировании вычислительного алгоритма.

3. Получено новое аналитическое решение задачи разгазирования в рамках модели «Техсхема». Данное решение также было использовано при тестировании вычислительного алгоритма.

4. Предложен новый способ оптимизации градиентных методов автоадаптации фильтрационной модели на историю разработки.

### **Практическая значимость**

Разработанные алгоритмы применяются для численного моделирования процессов добычи нефти и газа.

Использование предлагаемого в данной работе критерия позволяет при решении дискретных уравнений фильтрации по IMPES-схеме сократить время расчёта пластового давления за счёт использования предобусловливателя с предыдущего временного слоя.

На основе аналитического решения, полученного для задачи о притоке к несовершенной скважине, стало возможным тестировать программные комплексы на точность моделирования неполного вскрытия пласта или оценивать жидкостный дебит несовершенных скважин.

Предлагаемый новый способ оптимизации градиентных методов автоадаптации фильтрационной модели в некоторых случаях позволяет существенно ускорить процесс автоадаптации.

С использованием предыдущей версии программного комплекса «Техсхема», разработку которого в течение почти тридцати лет вёл специалист высокого класса Виктор Петрович Майер, подготовлено очень большое количество проектных документов разработки практически всех месторождений Западной Сибири (и многих месторождений других регионов). Описываемый в диссертационной работе ПК «Техсхема v1.05» является, по сути, заново созданным программным комплексом. Результаты диссертационной работы используются в научно-исследовательском и проектном институте Тюменское отделение «СургутНИПИнефть» (ОАО Сургутнефтегаз), что подтверждается актом об внедрении программного комплекса «Техсхема v1.05».

### **Апробация работы**

Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на научных семинарах кафедры алгебры и математической логики ТюмГУ под руководством проф. Кутрунова В.Н. (2009-2010), а также следующих научных конференциях: XVI Школа-семинар молодых учёных и специалистов под руководством академика РАН А.И. Леонтьева «Проблемы газодинамики и тепломассообмена в энергетических установках» (Санкт-Петербург, май 2007); 52-ая научная конференция МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук» (Москва, 2009); Третья научно-практическая региональная конференция «Современные проблемы математического и информационного моделирования. Перспективы разработки и внедрения инновационных IT-решений» (Тюмень, 2010).

### **Публикации.**

По теме диссертации опубликовано 7 печатных работ, 3 из которых — в рецензируемых периодических изданиях.

### **Личный вклад автора**

Результаты, составляющие основное содержание диссертации, получены автором самостоятельно. Во всех совместных работах автор участвовал в формулировках постановок задач, создал как численные методы для моделирования фильтрационных процессов, так и программный комплекс на их основе, провёл расчёты и анализ их результатов.

### **Структура и объем диссертации**

Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения и списка цитируемой литературы, включающего 54 наименования. Работа изложена на 136 страницах, содержит 27 рисунков, 26 таблиц.

# СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

В первой главе дано описание основных гипотез и допущений, положенных в основу математической модели трёхфазной многокомпонентной фильтрации «Техсхема», к которым относятся:

1. Предполагается, что сложная смесь фильтрующихся в пласте веществ может состоять из нефтяной, водяной и газовой фаз, а также любых их сочетаний. При этом каждая фаза может моделироваться с помощью нескольких компонентов (далее будем называть их псевдокомпонентами). Псевдокомпонентный состав фаз показан на рис.1.

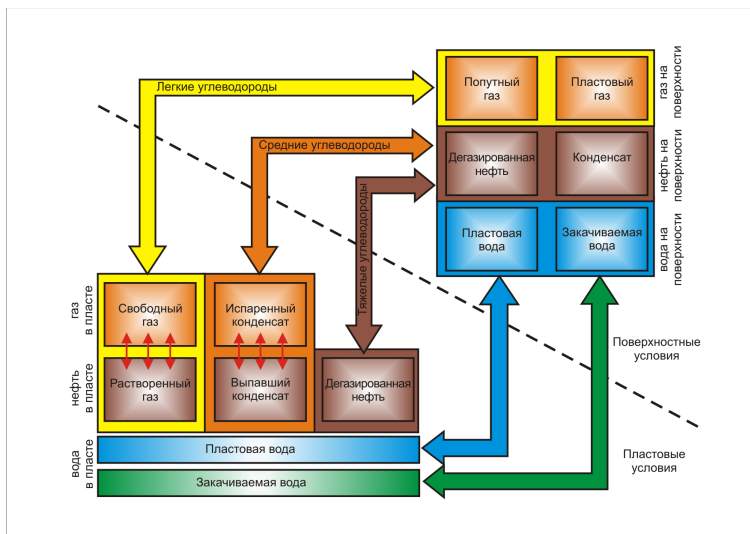


Рис. 1. Распределение псевдокомпонентов по фазам

2. Одной из основных особенностей математической модели, используемой в данной работе, является введение объёмных долей компонентов в фазах (вместо мольных долей, вводимых в классических моделях подобного рода). Это значительно упростило задачу, так как допустимо считать, что плотности псевдокомпонентов являются только функциями

пластового давления.

3. Другой важной особенностью используемой в данной работе математической модели является учёт неполного охвата пласта воздействием. Функция координат и времени  $O_x(x, y, z, t)$ , определяющая коэффициент охвата пласта воздействием, должна переопределяться всякий раз, когда вводится в разработку, останавливается, переводится под нагнетание вытесняющих агентов или выбывает из разработки хотя бы одна из скважин. А также в тех случаях, когда хотя бы у одной из скважин изменяется положение или длина интервала вскрытия пласта.

Систему уравнений, описывающих фильтрацию определённых выше псевдокомпонентов, удобно записать отдельно для моментов смены системы воздействия и периодов её постоянства.

Введём индексацию для фаз и псевдокомпонентов. Номер фазы будем обозначать буквой  $\alpha$ . Индекс  $\alpha = o$  соответствует нефтяной фазе,  $\alpha = g$  — газовой фазе,  $\alpha = w$  — водяной фазе. Номер псевдокомпонента в фазе  $\alpha$  будем обозначать буквой  $r$ . Соответствующий рисунку 1 способ индексации псевдокомпонентов представлен в таблице 1.

Таблица 1

Способ индексации фаз и компонентов в модели «Техсхема»

Индекс фазы ( $\alpha$ )	Индекс псевдокомпонента ( $r$ )	Название псевдокомпонента
g	1	Свободный газ
g	2	Испарённый конденсат
o	1	Растворённый газ
o	2	Выпавший конденсат
o	3	Дегазированная нефть
w	1	Пластовая вода
w	2	Закачиваемая вода

С учётом вышеперечисленных допущений закон сохранения массы псевдокомпонента с номером  $r$ , содержащегося в фазе  $\alpha$  ( $\alpha =$  “нефть“, “газ“ или “вода“), в дифференциальной форме имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} (mO_x \rho_{\alpha,r} \sigma_{\alpha,r}) + \operatorname{div} (\rho_{\alpha,r} l_{\alpha,r} \mathbf{w}_\alpha) + q_\alpha \rho_{\alpha,r} l_{\alpha,r} + mO_x \xi_{\alpha,r} = 0, \quad (1)$$

где  $m$  — пористость,  $\rho_{\alpha,r}$  — плотность псевдокомпонента  $r$  фазы  $\alpha$ ,  $\sigma_{\alpha,r}$  — насыщенность порового объёма псевдокомпонентом  $r$  фазы  $\alpha$ ,  $l_{\alpha,r}$  — объёмная доля псевдокомпонента  $r$  в фазе  $\alpha$ ,  $\mathbf{w}_\alpha$  — вектор скорости фильтра-



ции фазы  $\alpha$ ,  $q_\alpha$  — интенсивность источника/стока, обусловленная работой скважин,  $\xi_{\alpha,r}$  — интенсивность фазового перехода. Для псевдокомпонентов, фазовые превращения которых невозможны (например, для водяных)  $\xi_{\alpha,r} \equiv 0$ . Скорости фазовых превращений углеводородов (растворение газа в нефти или выделение его оттуда, а также испарение или конденсация нефти из газа) в охваченной воздействием части порового объёма определяются кинетическим соотношением следующего вида

$$\begin{aligned}\xi_{o,1} &= a_1 \left( \rho_{o,1} \sigma_{o,1} \left[ 1 - \frac{l_{o,1}^* l_{g,1}}{l_{o,1} l_{g,1}^*} \right]^+ - \rho_{g,1} \sigma_{g,1} \left[ 1 - \frac{l_{o,1} l_{g,1}^*}{l_{o,1}^* l_{g,1}} \right]^+ \right), \\ \xi_{o,2} &= a_2 \left( \rho_{o,2} \sigma_{o,2} \left[ 1 - \frac{l_{o,2}^* l_{g,2}}{l_{o,2} l_{g,2}^*} \right]^+ - \rho_{g,2} \sigma_{g,2} \left[ 1 - \frac{l_{o,2} l_{g,2}^*}{l_{o,2}^* l_{g,2}} \right]^+ \right), \\ \xi_{g,1} &= -\xi_{o,1}, \quad \xi_{g,2} = -\xi_{o,2}, \quad \xi_{o,3} = \xi_{w,1} = \xi_{w,2} = 0,\end{aligned}\quad (2)$$

где символом  $[x]^+$  обозначена положительная часть числа  $x$ ;  $l_{o,r}^*$  — объёмная равновесная доля  $r$ -го псевдокомпонента в нефтяной фазе,  $r = 1, 2$ ;  $l_{g,r}^*$  — то же в газовой фазе,  $r = 1, 2$ . Константы  $a_1, a_2$  — темпы растворения/выделения газа из нефти и испарения/конденсации нефти в газе, соответственно. Эти параметры, определяющие интенсивность массообмена между фазами, должны быть определены специальными исследованиями. Нулевые значения  $a_1, a_2$  используются при моделировании несмешивающегося вытеснения нефти и газа.

Объёмные равновесные доли псевдокомпонентов в углеводородных фазах могут быть вычислены по растворимости газа в нефти ( $\bar{R}^*$ ) и испаряемости конденсата в газе ( $\Pi^*$ ) с использованием следующих соотношений:

$$l_{o,1}^*(P) = \frac{\bar{R}^*(P) \rho_{gas} / \rho_{o,1}}{\bar{R}^*(P) \rho_{gas} / \rho_{o,1} + \rho_{con} / \rho_{o,2} (1 - \delta) + \rho_{oil} / \rho_{o,3} \delta}, \quad (3)$$

$$l_{o,2}^*(P) = \frac{\rho_{con} / \rho_{o,2} (1 - \delta)}{\bar{R}^*(P) \rho_{gas} / \rho_{o,1} + \rho_{con} / \rho_{o,2} (1 - \delta) + \rho_{oil} / \rho_{o,3} \delta}, \quad (4)$$

$$l_{g,1}^*(P) = \frac{\rho_{gas} / \rho_{g,1}}{\rho_{gas} / \rho_{g,1} + \Pi^* / \rho_{g,2}}, \quad (5)$$

$$l_{g,2}^*(P) = \frac{\Pi^* / \rho_{g,2}}{\rho_{gas} / \rho_{g,1} + \Pi^* / \rho_{g,2}}, \quad (6)$$

где  $\rho_{gas}$ ,  $\rho_{con}$  и  $\rho_{oil}$  — плотности газа, конденсата и нефти в стандартных условиях;  $\delta = (\rho_{o,3}l_{o,3}/\rho_{oil}) / (\rho_{o,3}l_{o,3}/\rho_{oil} + \rho_{o,2}l_{o,2}/\rho_{con})$  — объёмная доля неиспаряемой дегазированной нефти в жидкой углеводородной фазе (нефть+конденсат) в стандартных условиях.

Ниже будет показано, что задание функций  $\xi_{\alpha,r}$  в виде (2) обеспечивает экспоненциальное стремление во времени компонентных составов пластовых флюидов к термодинамически равновесному состоянию. Таким образом, описываемые уравнения допускают неравновесность пластовой системы, т.е. наличие в пласте перенасыщенных нефти и газа.

Отметим некоторые важные свойства:

1) Так как  $l_{\alpha,r}$  — объёмная доля псевдокомпонента, очевидно,  $\forall \alpha$  выполняется свойство

$$\sum_r l_{\alpha,r} = 1. \quad (7)$$

2) Плотности фаз определяются через плотности и объёмные доли псевдокомпонентов

$$\rho_\alpha = \sum_r \rho_{\alpha,r} l_{\alpha,r}. \quad (8)$$

3) Сумма насыщенных, как объёмных долей фаз в поровом объёме, равна единице

$$\sum_\alpha \sigma_\alpha = \sum_{\alpha,r} \sigma_\alpha l_{\alpha,r} = \sum_{\alpha,r} \sigma_{\alpha,r} = 1. \quad (9)$$

Вектор  $\mathbf{w}_\alpha$  скорости фильтрации фазы  $\alpha$  определяется обобщённым законом Дарси

$$\mathbf{w}_\alpha = -\frac{f_\alpha}{\mu_\alpha} \text{diag} \{K_x, K_y, K_z\} (\text{grad} P_\alpha - \rho_\alpha g \text{grad} z), \quad (10)$$

где  $f_\alpha(\sigma_o, \sigma_w, x, y, z, t)$  — относительная фазовая проницаемость для фазы  $\alpha$  — функция нефте- и водонасыщенности, координат точки пласта и времени;  $\mu_\alpha$  — динамическая вязкость фазы  $\alpha$  при текущих пластовых условиях;  $K_x(x, y, z, t)$ ,  $K_y(x, y, z, t)$ ,  $K_z(x, y, z, t)$  — эффективные абсолютные проницаемости пласта для фильтрации вдоль направлений координатных осей  $X, Y, Z$  в точке  $x, y, z$  пласта в момент времени  $t$ , определённые с учётом неполного охвата пласта воздействием;  $P_\alpha$  — текущее давление в фазе  $\alpha$  в охваченной воздействием точке пласта с координатами  $x, y, z$  в момент времени  $t$ ;  $g$  — ускорение свободного падения.

Капиллярные скачки давления в нефтяной и водяной фазах, а также в газовой и нефтяной фазах считаются заданными функциями

$$P_{o,w} = P_o - P_w = P_{cow}(\sigma_w, x, y, z), \quad (11)$$

$$P_{g,o} = P_g - P_o = P_{cog}(\sigma_g, x, y, z). \quad (12)$$

Среднее давление в охваченном воздействием поровом объёме определим как

$$P = \left( P_o \frac{f_o}{\mu_o} + P_g \frac{f_g}{\mu_g} + P_w \frac{f_w}{\mu_w} \right) / R, \quad (13)$$

где введено понятие подвижности суммы фаз

$$R = \frac{f_o}{\mu_o} + \frac{f_g}{\mu_g} + \frac{f_w}{\mu_w}. \quad (14)$$

С помощью перечисленных далее уравнений состояния учитываются закономерности влияния пластового давления на фильтрационно-ёмкостные свойства пласта и флюидов. Другими словами, предполагаются известными следующие функции пластового давления (приводимые ниже функциональные зависимости одинаковы для охваченной и неохваченной частей объёма пласта):

- сжимаемость порового объёма:

$$\beta_c(P, x, y, z) = \frac{1}{m} \frac{\partial m}{\partial P}, \quad (15)$$

- сжимаемости псевдокомпонентов, образующих фазу  $\alpha$ :

$$\beta_{\alpha,r}(P_\alpha, x, y, z) = \frac{1}{\rho_{\alpha,r}} \frac{\partial \rho_{\alpha,r}}{\partial P_\alpha}. \quad (16)$$

Предполагается, что смена системы воздействия происходит мгновенно, то есть функция  $O_x$  ступенчато меняется во времени в моменты смены системы воздействия. Это означает, что в моменты смены системы воздействия остаётся неизменной сумма масс псевдокомпонентов в охваченной и неохваченной частях порового объёма. В дифференциальной форме закон сохранения массы псевдокомпонентов в моменты смены системы воздействия имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} (m O_x \rho_{\alpha,r} \sigma_{\alpha,r} + \bar{m} (1 - O_x) \bar{\rho}_{\alpha,r} \bar{\sigma}_{\alpha,r}) = 0. \quad (17)$$

где  $\bar{m}$  — пористость неохваченного воздействием порового объёма,  $\bar{\rho}_{\alpha,r}$  — плотность псевдокомпонента  $r$  фазы  $\alpha$  в неохваченной воздействием части объёма коллектора,  $\bar{\sigma}_{\alpha,r}$  — насыщенность неохваченного воздействием порового объёма псевдокомпонентом  $r$  фазы  $\alpha$ .

В разделе 1.2.4 данной главы показано, что система уравнений (1)-(17) может быть редуцирована до системы уравнений модели нелетучей нефти «Black Oil» (таким образом, модель «Техсхема» является обобщением модели «Black Oil»).

**Вторая глава** посвящена численной реализации модели, основанной на конечно-разностном методе решения вышеописанной системы уравнений в частных производных путём последовательного раздельного определения пластового давления и долей порового объема, насыщенного псевдокомпонентами. Таким образом, для численного решения системы уравнений была выбрана схема IMPES (неявная по давлению, явная по насыщенности). Ввиду явности разностной схемы, на шаг  $t_s$  расчёта насыщенностей накладываются различные ограничения, также описанные в данной главе.

Ввиду неявного расчёта давления  $P$ , для его определения на новом временном слое необходимо решать матричное уравнение вида

$$AP = b, \quad (18)$$

Для решения системы линейных алгебраических уравнений (18) в программном комплексе «Техсхема» применяется перезапускаемый GMRES-алгоритм с предобусловливанием (ILU(t)-метод построения нижне- и верхнетреугольных матриц предобусловливания  $L$  и  $U$ ). Данное предобусловливание позволяет значительно увеличить скорость сходимости GMRES-метода, однако, процедура построения матриц  $L$  и  $U$ , аппроксимирующих исходную матрицу  $A$ , требует значительных временных затрат. Было замечено, что в некоторых случаях оправдано не рассчитывать матрицы  $L$  и  $U$  заново, а использовать их с предыдущего расчёта давления. Поэтому нами был предложен и реализован в ПК «Техсхема» следующий критерий принятия решения о перестроении матриц  $L$  и  $U$  заново или использовании их с предыдущего расчёта давления: при анализе коэффициентов матрицы  $A$  и из физических соображений видно, что наиболее существенно вид матрицы  $A$  зависит от режимов работы скважин и подвижности суммы фаз  $R$ , определяемой формулой (14). Таким образом, критерий состоит в следующем — если одна из скважин изменила режим своей работы (или интервалы перфорации) или же если максимальное изменение подвижности суммы фаз  $R$  среди всех контрольных объёмов превысило некоторую критическую величину, матрицы предобусловливания перестраиваются заново. В противном случае матрицы  $L$  и  $U$  используются с предыдущего расчёта давления.

Пример работы критерия показан на рисунке 2. Один из графиков на данном рисунке — время расчёта давления без применения вышеопи-

санного критерия (матрицы  $L$  и  $U$  перестраиваются всегда), другой — с использованием критерия (матрицы  $L$  и  $U$  перестраиваются при выполнении критерия — таким случаем соответствуют пиковые увеличения времени расчёта). В данном примере большинство расчётов давления выполняются примерно в 3 раза быстрее с использованием критерия — таким образом, в данных случаях перестроение матриц предобусловливания только замедляет расчёт давления. Отметим, что получаемое ускорение для каждого примера индивидуально и, как правило, данный критерий даёт значительное ускорение расчёта на начальном этапе моделируемого периода (именно такой пример продемонстрирован на рисунке 2), когда работающих скважин мало, и, таким образом, реже происходят изменения в режимах работы скважин и нет существенных изменений насыщенностей  $\sigma_{\alpha,r}$  (следовательно, и подвижность суммы фаз  $R$  также существенно не меняется).

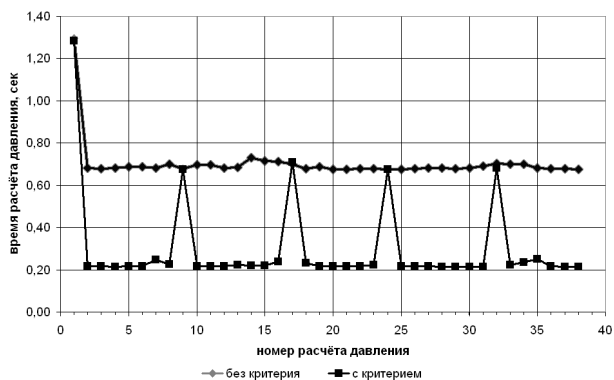


Рис. 2. Время расчёта давления

**Третья глава** посвящена тестированию гидродинамического симулятора «Техсхема» и получению аналитических решений, используемых в дальнейшем для тестирования. ПК «Техсхема» был протестирован на семи задачах, шесть из которых (за исключением теста на разгазирование) включены в список обязательных тестов ЦКР (Центральной комиссии ресурсов) для гидродинамических симуляторов. Ввиду ограниченного формата автореферата здесь представлены две тестовых задачи, аналитические решения для которых были получены автором данной работы.

1. Тест на точность моделирования неполного вскрытия пласта.

В ПК «Техсхема» реализованы два метода расчёта продуктивностей соединений скважин с пластом: 1 — сложное численно-аналитическое решение, учитывающее анизотропию пласта, неполноту вскрытия ячеек интервалами перфорации, наклон скважины и её смещение относительно центра вскрытой ячейки (будем называть данное решение точной формулой притока); 2 — широко применяемая формула Писмена. Ниже представлены результаты решения тестовой задачи с использованием обеих формул.

*Постановка задачи.* Рассматривается однородный пласт с проницаемостью  $k$ , кровля ( $z = 0$ ) и подошва ( $z = H$ ) которого горизонтальны и непроницаемы. Из этого пласта скважина радиуса  $r_w$  добывает несжимаемую однофазную жидкость с вязкостью  $\mu$  (в этом случае система уравнений (1)-(17) существенно упрощается и давление становится гармонической функцией). На расстоянии радиуса питания  $r_d$  от оси скважины давление флюида  $U$  остаётся постоянным (не теряя общности, можно принять  $U = 0$ ). Интервал перфорации частично вскрывает пласт и прилегает к его кровле. На перфорированной части ствола поддерживается постоянное давление  $p_{заб}$ , к остальной части ствола приток флюида отсутствует. Влияние силы тяжести не учитывается. Разность давлений на контуре питания и перфорированной части ствола скважины равно  $U - p_{заб} = \Delta p_{заб}$ .

*Решение задачи.* Приближённое решение данной задачи было получено М.Маскетом для случая, когда интервал перфорации единственный и прилегает к кровле (или подошве) пласта:

$$Q_{masket} = \frac{172.8\pi kH}{\mu} \frac{\Delta p_{заб}}{\frac{1}{2\bar{h}} \left[ 2 \ln \frac{4H}{r_w} - \ln \frac{\Gamma(0.875\bar{h})\Gamma(0.125\bar{h})}{\Gamma(1-0.875\bar{h})\Gamma(1-0.125\bar{h})} \right] - \ln \frac{4H}{r_d}}, \quad (19)$$

где  $Q_{masket}$  — объёмный дебит скважины,  $\bar{h} = h/H$  — относительная длина перфорированной части ствола скважины,  $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{x-1} du$  — гамма-функция.

С решением (19) хорошо согласуется численное решение, полученное на ПК «Техсхема» с использованием точной формулы притока. Результаты, полученные с использованием формулы Писмена, согласуются с аналитическим решением значительно хуже, что является результатом неучёта в формуле Писмена смещения скважины относительно центра расчётной ячейки и неполноты вскрытия ячейки интервалом перфорации. Результаты расчётов на сетках, содержащих  $20 \times 20 \times 10$  и  $20 \times 20 \times 5$  рас-

чётных ячеек по осям  $x, y, z$ , представлены на рисунке 3.

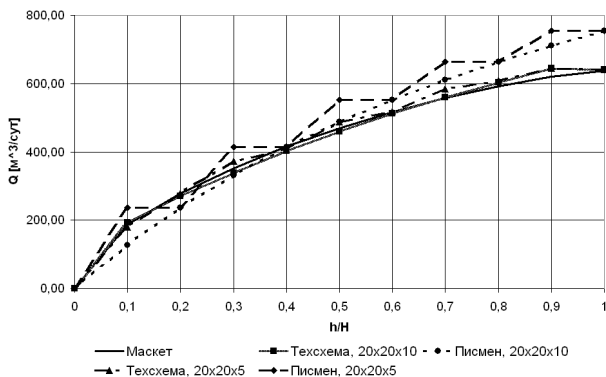


Рис. 3. Зависимости рассчитанных дебитов от доли перфорированной толщины пласта

Ввиду вышеупомянутых приближённости и ограничений решения (19), нами в разделе 3.3.1 диссертационной работы совместным применением методов Фурье и коллокаций было получено аналитическое решение (20), обладающее большей общностью — оно не накладывает ограничений на расположение и количество интервалов перфорации:

$$Q = -\frac{2\pi kr_w}{\mu} \sum_{q=0}^{[N_{sum}/2]} B_{2q} \frac{h^{2q+1}}{(2q+1)4^q}, \quad (20)$$

где  $N_{sum}$  — число удержанных членов разложения граничного условия на стволе скважины в ряд Тейлора,  $[N_{sum}/2]$  — целая часть числа  $N_{sum}/2$ , коэффициенты  $B_q$  были найдены методом наименьших квадратов из условия  $(p(r_w, z) - p_{заб})^2 \rightarrow \min$  на перфорированной части ствола. В случае одного интервала перфорации, прилегающего к кровле пласта, решения (19) и (20) дают очень близкие результаты.

Формула (20) справедлива в случае, когда начало  $h_1$  и конец  $h_2$  интервала перфорации меняется, но перфорированная толщина пласта  $h = h_2 - h_1$  остаётся постоянной. Зависимость дебита скважины от отношения  $h_1/H$  (при фиксированном  $h = H/2$ ) показана на рисунке 4.

При изменении  $h_1/H$  от 0 до 0.25 дебит скважины увеличивается с  $465.07 \text{ м}^3/\text{сут}$  до  $492.93 \text{ м}^3/\text{сут}$ , максимальный дебит флюида достигается

при положении интервала перфорации посередине между кровлей и подошвой пласта. При других значениях параметров пласта и добываемого флюида изменение дебита может быть более существенным, поэтому положение интервала перфорации при решении данной задачи желательно учитывать.

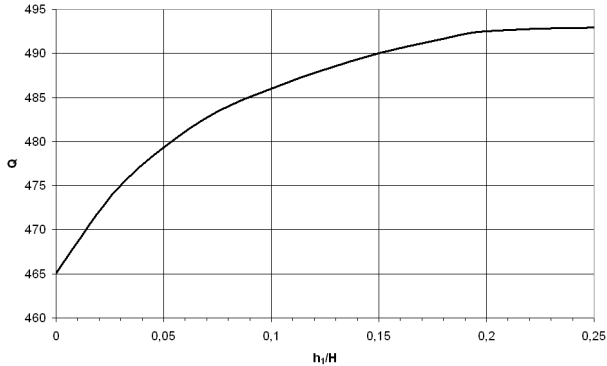


Рис. 4. Зависимость дебита скважины от отношения  $h_1/H$

## 2. Тест на разгазирование.

*Постановка задачи.* В начальный момент времени некоторый объём  $V$ , ограниченный поверхностью  $\Gamma$ , полностью занят газонасыщенной нефтью (то есть свободный газ отсутствует). Затем давление на границе  $\Gamma$  мгновенно изменяется и становится равным  $P_\Gamma < P_{\text{нас}}$ , где  $P_{\text{нас}}$  — давление насыщения нефти газом. Таким образом, в начальный момент времени начинается процесс разгазирования и в объёме  $V$  появляется свободный газ. Как было отмечено выше, в отличие от классической модели «Black oil», в модели «Техсхема» данный процесс происходит не мгновенно, а с некоторым конечным темпом (и, таким образом, нефть и газ в пласте могут находиться в термодинамически неравновесном перенасыщенном состоянии). Как будет показано ниже, система экспоненциально стремится во времени к термодинамическому равновесию.

*Решение задачи.* Для получения аналитического решения необходимо пойти на существенное упрощение задачи, поэтому пренебрежём капиллярными силами (т.е.  $P_g = P_o = P$ ) и силой тяжести, также будем считать, что рассматриваемая область изотропна (т.е.  $K_x = K_y = K_z = k$ ). Дополнительно предположим, что вязкости  $\mu_g = \mu_o = \mu = \text{const}$ , плотно-



сти  $\rho_g = \rho_o = \rho = const$  и относительные фазовые проницаемости  $k_g = \sigma_g$ ,  $k_o = 1 - \sigma_g = \sigma_o$ . Тогда скорости фильтрации фаз будут равны нулю, уравнения (1)-(17) существенно упростятся, и их решение, удовлетворяющее начальному условию  $\sigma_{o,1}(t = 0) = y_0$ , примет вид

$$\sigma_{o,1}(t) = \frac{\beta}{\alpha} + \left( y_0 - \frac{\beta}{\alpha} \right) \exp(-\alpha t), \quad (21)$$

где  $\alpha = a_1(1 - l_{o,1}^*)$ ,  $\beta = a\sigma_{o,2}l_{o,1}^*$ . Таким образом, система экспоненциально стремится к термодинамически равновесному состоянию. Как следует из определения для  $\alpha$ , скорость данного стремления тем больше, чем больше темп  $a$  растворения/выделения газа из нефти и чем меньше равновесная доля растворённого в нефти газа  $l_{o,1}^*$ .

Из (21) следует, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_{o,1}(t) = \beta/\alpha$ . Газонасыщенность системы равна

$$\sigma_{g,1}(t) = 1 - \sigma_{o,1}(t) - \sigma_{o,2}, \quad (22)$$

где  $\sigma_{o,1}(t)$  определена выражением (21), а  $\sigma_{o,2}(t) = \sigma_{o,2}(0) = const$ . Предельная газонасыщенность системы, достигшей термодинамического равновесия, равна  $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_{g,1}(t) = 1 - \beta/\alpha - \sigma_{o,2}$ .

Используем полученное выше аналитическое решение для тестирования ПК «Техсхема». Для получения численных результатов зададим следующие свойства флюидов: плотности всех флюидов в стандартных и пластовых условиях равны  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ , начальное растворение газа в нефти  $\bar{R}_{init} = 15 \text{ ст.м}^3/\text{ст.м}^3$ , растворимость газа в нефти при "новом" давлении  $R^* = 10 \text{ ст.м}^3/\text{ст.м}^3$ .

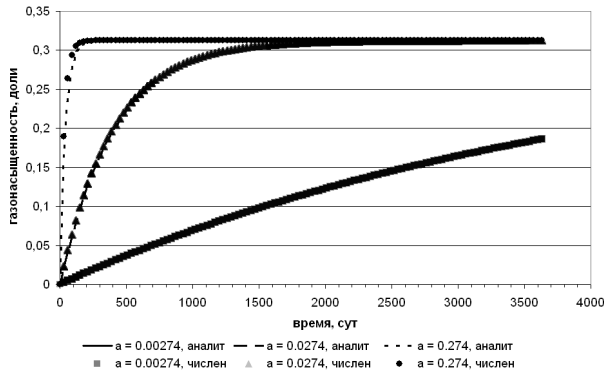


Рис. 5. Газонасыщенность системы с течением времени

На рисунке 5 приведены графики зависимости газонасыщенности от времени, построенные на основе формулы (22) и численных расчётов, произведённых в ПК «Техсхема», полученные для трёх различных значений темпа  $a_1 = 0.00274$ ;  $a_1 = 0.0274$  и  $a_1 = 0.274$  ( $[a]=1/\text{сут.}$ ). Следует отметить хорошее совпадение численного и аналитического решений.

**В четвёртой главе** дано описание авторского способа оптимизации метода Левенберга-Маркварда, реализованного в модуле ПК «Техсхема», предназначенного для автоматической адаптации фильтрационной модели на историю разработки. Задача автоматической адаптации — минимизация разностей между  $N$  фактическими и расчётными данными. Такими данными могут быть совокупности забойных давлений скважин, расходов жидкости или нефти, инструментально замеренные насыщенности и пластовые давления и т. д. Назовём эти совокупности *элементами цели*. Разность между фактическим и расчётным значениями  $k$ -го элемента цели обозначим  $r_k(\bar{x})$ , где  $\bar{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_t\}$  — вектор подбираемых параметров (называемых *аргументами целевой функции*). В качестве аргументов целевой функции, как правило, выбирают параметры пласта и пластовых флюидов, измеряемые со значительной погрешностью — абсолютную и относительную фазовые проницаемости, продуктивности скважин и т. д. Определим общую целевую функцию в виде

$$F(\bar{x}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\bar{N}} r_k^2(\bar{x}), \quad (23)$$

где  $\bar{N}$  — общее количество измерений всех элементов цели во все моменты времени. Тогда задача поиска оптимальных параметров сводится к минимизации функционала  $F(\bar{x}) \rightarrow \min$ . Для решения данной задачи в ПК «Техсхема» используется алгоритм Левенберга-Маркварда, согласно которому вектор  $\bar{x}$  подбираемых параметров на  $m$ -ой итерации ( $m = 1, \dots, M$ ) вычисляется как

$$\bar{x}_{[m]} = \bar{x}_{[m-1]} - [H(\bar{x}_{[m-1]}) + \lambda I]^{-1} \nabla F(\bar{x}_{[m]}),$$

где  $M$  — ограничение на число итераций алгоритма (может отсутствовать),  $H(\bar{x}_{[m-1]}) = \nabla^2 F(\bar{x}_{[m-1]}) \approx J^T(\bar{x}_{[m-1]})J(\bar{x}_{[m-1]})$  — матрица Гёссе, вычисленная в линейном приближении,  $J$  — матрица Якоби,  $\lambda > 0$  — коэффициент, отвечающий за влияние градиента целевой функции,  $I$  — единичная матрица.

Введём понятие взаимной независимости аргументов целевой функции. Два аргумента  $x_q$  и  $x_p$  целевой функции  $F$  называются *взаимно-*

независимыми, если для любого вектора  $\bar{x}$  и  $k = 1, \dots, \bar{N}$  выполнено

$$\frac{\partial r_k(\bar{x})}{\partial x_q} \frac{\partial r_k(\bar{x})}{\partial x_p} = 0. \quad (24)$$

Другими словами, если функция  $r_k$  зависит от  $x_q$ , то она не зависит от  $x_p$ , и наоборот (или же  $r_k$  не зависит ни от  $x_q$ , ни от  $x_p$ ). Выполнение условия (24) означает, что, вычисляя конечно-разностные частные производные целевой функции, допустимо варьировать аргументы  $x_q$  и  $x_p$  одновременно:

$$\begin{cases} \frac{\partial r_k}{\partial x_q} \approx \frac{r_k(\bar{x} + \bar{d}_{q,p}) - r_k(\bar{x})}{\Delta_q}, & \text{если } r_k \text{ не зависит от } x_p, \\ \frac{\partial r_k}{\partial x_p} \approx \frac{r_k(\bar{x} + \bar{d}_{q,p}) - r_k(\bar{x})}{\Delta_p}, & \text{если } r_k \text{ не зависит от } x_q, \end{cases} \quad (25)$$

где  $\bar{d}_{q,p} = \{x_1, \dots, x_q + \Delta_q, \dots, x_p + \Delta_p, \dots, x_t\}$ .

Таким образом, при заполнении двух столбцов матрицы Якоби  $J$  необходимо два перезапуска симулятора (для вычисления векторов  $r_k(\bar{x} + \bar{d}_{q,p})$  и  $r_k(\bar{x})$ ), а не три ( $r_k(\bar{x} + \bar{d}_q)$ ,  $r_k(\bar{x} + \bar{d}_p)$  и  $r_k(\bar{x})$ ). Очевидно, что если  $h$  аргументов целевой функции попарно взаимно-независимы, то соответствующие  $h$  столбцов матрицы Якоби можно заполнить одновременно.

Взаимную независимость аргументов удобно представить в виде неориентированного графа  $G$ . Каждому аргументу  $x_q$  целевой функции поставим в соответствие вершину  $V_q$  графа  $G$ . Будем считать, что вершины  $V_q$  и  $V_p$  соединены ребром, если  $x_q$  и  $x_p$  взаимно-независимы. Тогда столбцы матрицы Якоби, соответствующие любому полному подграфу графа  $G$ , можно заполнять одновременно. Таким образом, задача состоит в том, чтобы разбить граф  $G$  на минимальное количество полных подграфов. Эта задача может быть решена простым перебором с запоминанием минимального и текущего разбиения. Анализ взаимной независимости аргументов целевой функции на всей области их определения — задача, по сложности сопоставимая с исходной. Поэтому предлагается вычислять структуру графа  $G$  после первой итерации, на которой все аргументы целевой функции варьируются по одному последовательно.

*Пример расчёта.* В разделе 4.4 диссертационной работы представлен пример работы модуля автоадаптации, минимизирующего разность между расчётной и фактической добычей жидкости 25-ти скважин варьированием их продуктивностей (таким образом, целевая функция зависит

от 25-ти аргументов). Как с использованием оптимизации, так и без неё минимум целевой функции был найден за 3 итерации, но без оптимизации было осуществлено 79 перезапусков симулятора, а с оптимизацией — только 35. Таким образом, использование оптимизации в некоторых случаях позволяет существенно уменьшить число перезапусков симулятора при минимизации целевой функции.

**В пятой главе** кратко описана архитектура программного комплекса «Техсхема», основными особенностями которой являются разделение визуальной и расчётной части на независимые приложения и возможность создания и подключения к визуальной части пользовательских модулей (плагинов).

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

В данной диссертационной работе был получен ряд новых результатов. К ним относятся:

Новое аналитическое решение задачи притока к несовершенной скважине, не накладывающее ограничений на количество и положение интервалов перфорации. Оно было использовано при тестировании вычислительного алгоритма.

Новое аналитическое решение задачи разгазирования в рамках модели «Техсхема». Данное решение позволяет исследовать качественные особенности фазовых переходов в рамках математической модели «Техсхема», также это решение было использовано для тестирования программного комплекса «Техсхема v1.05».

Новый способ оптимизации градиентных методов автоадаптации гидродинамической модели на историю разработки. Данный способ оптимизации в некоторых случаях позволяет существенно сократить объём вычислений.

Критерий, на основе которого принимается решение о построении нового предобусловливателя или использовании предобусловливателя с предыдущего временного слоя при расчёте пластового давления (IMPES-схема решения уравнений фильтрации).

С применением вышеперечисленных результатов и новой программной архитектуры был разработан программный комплекс «Техсхема v1.05», внедрённый в использование в Тюменском отделении «СургутНИПИнефть», ОАО Сургутнефтегаз.

Программный комплекс «Техсхема» и сопутствующие материалы в свободном доступе размещены в сети Интернет по адресу [www.tecscheme.org](http://www.tecscheme.org).

## ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

### Публикации в периодических рецензируемых изданиях

1. Бахтий Н.С. Приток жидкости к несовершенной скважине из радиального пласта. / Н.С. Бахтий, В.Н. Кутрунов // Вестник ТюмГУ. - 2010. - № 6. - С. 134-139.
2. Бахтий Н.С. Оптимизация градиентных методов решения экстремальных задач в подземной гидродинамике / Н.С. Бахтий, В.Н. Кутрунов, С.В. Майер, М.В. Сафиуллина // Вестник ТюмГУ. - 2011. - № 7. - С. 143-149.
3. Батулин Ю.Е. Исследование погрешности определения продуктивности скважин в гидродинамической модели / Ю.Е. Батулин, Н.С. Бахтий, М.В. Сафиуллина // Известия вузов. Нефть и газ. - 2012. - № 2. - С. 43-48.

### Публикации в сборнике научных трудов

4. Бахтий Н.С. Ламинарное течение степенной жидкости на начальном участке круглой трубы / Н.С. Бахтий // Математическое и информационное моделирование : сб. науч. тр. - Тюмень, 2008. - № 10. - С. 13-21.
5. Бахтий Н.С. К определению граничных условий уравнения энергии при численном решении задач неизотермической фильтрации / Н.С. Бахтий // Математическое и информационное моделирование : сб. науч. тр. - Тюмень, 2009. - № 11. - С. 25-33.

### Публикации в трудах конференций

6. Бахтий Н.С. К определению граничных условий уравнения энергии при неизотермической фильтрации жидкости / Н.С. Бахтий // Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук : тр. 52-ой науч. конф. МФТИ (27-30 нояб. 2009 г., Москва). - Москва, 2009. - С. 231-233.
7. Бахтий Н.С. О тестировании гидродинамических симуляторов, предназначенных для решения задач фильтрации / Н.С. Бахтий // Современные проблемы математического и информационного моделирования. Перспективы разработки и внедрения инновационных IT-решений : тр. третьей регион. науч.-практ. конф. (14 апр. 2010, Тюмень). - Тюмень, 2010. - С. 36-43.