

На правах рукописи

БАСИНСКИЙ Константин Юрьевич

**НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ
НА ПОВЕРХНОСТИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ
И ДВУХФАЗНОЙ СМЕСИ**

05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Тюмень – 2012

Работа выполнена на кафедре математического моделирования
ФГБОУ ВПО «Тюменский государственный университет»

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, доцент
Баринов Василий Александрович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор
Перегудин Сергей Иванович
(Санкт-Петербургский государственный
университет)

Заслуженный деятель науки РФ
доктор технических наук, профессор
Шабаров Александр Борисович
(Тюменский государственный университет)

Ведущая организация: ФГБУН Институт механики сплошных сред
УрО РАН

Защита диссертации состоится «29» мая 2012 г. в 15:00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.274.14 при ФГБОУ ВПО «Тюменский государственный университет» по адресу 625003, г. Тюмень, ул. Перекопская 15А, ауд. 410.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВПО «Тюменский государственный университет».

Автореферат разослан «_____» апреля 2012 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета



А.А. Ступников

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследований. Изучение влияния вязкости на распространение поверхностных волн имеет важное как теоретическое, так и практическое значение. В гидрофизике и океанологии до настоящего времени оставались неизвестными точные условия существования волнового режима течения вязкой жидкости. Отсутствовали точные критерии, при выполнении которых необходимо учитывать воздействие вязкости на волновое движение. Следовательно, отсутствовало обоснование применения упрощенных моделей (идеальная жидкость) волновых течений. С точки зрения теории волн актуальным остается исследование нелинейных волновых моделей с учетом вязкой диссипации, т.к. неизвестно ее влияние на волновые характеристики (частота, декремент затухания) и траектории движения. Для решения нелинейной задачи на свободной поверхности идеальной жидкости Стоксом был предложен метод последовательных приближений. В дальнейшем этот метод получил развитие в работах А.И. Некрасова, Л.Н. Сретенского, Я.И. Секерж-Зеньковича, Ю.З. Алешкова и других авторов. Однако в случае вязкой жидкости применение этого метода испытывает существенные трудности, вызванные: диссипацией волнового движения; наличием второго динамического условия (для касательных напряжений) на свободной поверхности. В линейном приближении Ламбом было найдено дисперсионное уравнение для комплексной частоты, которое используется вплоть до настоящего времени, например, в работах Д. Джозефа, А.И. Григорьева, А.А. Абрашкина и других авторов. При этом до сих пор не были найдены точные выражения для частоты и декремента затухания волны (дисперсионные соотношения).

Математическая модель распространения волн по свободной поверхности слоя дисперсной смеси построена в работах В.А. Баринаова, Н.Н. Бутаковой, где получено решение линейной краевой задачи, а также выражения фазовой скорости и декремента затухания волны, найдено решение нелинейной задачи с точностью второго приближения по амплитудному параметру. Однако остаются не исследованными нелинейные эффекты, которые проявляются только в третьем приближении: зависимость фазовой скорости от высоты волны, наличие течения Стокса. Результаты исследования нелинейных эффектов могут найти применение при решении экологических проблем загрязнения в прибрежных зонах океанов, а также в других приложениях.

Цели работы – исследование влияния диссипативных факторов (вязкость, межфазное трение) в линейных и нелинейных моделях волнового движения жидкости. Для достижения этой цели ставятся следующие задачи:

1. В рамках линейной модели определение в аналитическом виде дисперсионных соотношений для волн на поверхности вязкой жидкости; определение точных границ волновых моделей слабовязкой и

сильновязкой жидкости, изучение влияния вязкости на траектории жидких частиц.

2. Модификация нелинейных волновых моделей с целью упрощения решения соответствующих краевых задач.
3. Разработка метода нелинейного моделирования волнового движения слабовязкой жидкости и двухфазной смеси.
4. Решение нелинейной задачи о волнах на поверхности слабовязкой жидкости, исследование нелинейных эффектов, соответствующих этому движению.
5. С помощью разработанного метода определение и исследование нелинейных эффектов при волновом движении двухфазной смеси.
6. Разработка компьютерной программы для моделирования движения частицы слабовязкой жидкости с течением времени в зависимости от известных параметров жидкости и волны.

Методы исследования. Для построения моделей движения жидкости со свободной поверхностью использованы методы гидродинамики и теории волн. При анализе полученных математических моделей использовались методы математической физики, в частности методы возмущений, аналитические и приближенные методы решения краевых задач, методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений и высшей алгебры. Расчеты для конкретных сред были выполнены с использованием пакета Maple и среды программирования Delphi.

На защиту выносятся результаты, соответствующие четырем пунктам паспорта специальности 05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ по физико-математическим наукам.

Пункт 1: Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений.

1. Новая нелинейная модель волнового движения вязкой жидкости со свободной поверхностью, полученная методом исключения касательных напряжений из динамических граничных условий.

Пункт 2: Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей.

2. Метод переменной во времени частоты, являющийся обобщением метода последовательных приближений Стокса для диссипативных волновых процессов.

Пункт 5: Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента.

3. Аналитическое решение задач о волнах на поверхности вязкой жидкости и двухфазной смеси. Для линейных волн найдены точные ограничения на относительную вязкую частоту, при которых возможно волновое движение, и условие, при выполнении которого жидкость можно считать слабовязкой. Получены аналитические дисперсионные соотношения для

нелинейной модели с точностью третьего приближения по волновому параметру. Установлено, что при глубине слоя вязкой жидкости большей длины волны частота и декремент затухания мало отличаются от случая бесконечно глубокого слоя. Установлено, что нелинейная частота волны с течением времени стремится к своему линейному значению. Для конкретных сред численно рассчитаны зависимости частот и амплитуд волн от времени, траектории частиц жидкости и дисперсной фазы для различных глубин. Установлено, что дисперсные частицы с меньшей, по сравнению с несущей жидкостью, плотностью заглубляются по мере волнового движения, а частицы с большей плотностью поднимаются ближе к свободной поверхности. Определены обобщения нелинейных эффектов Стокса для слабовязкой жидкости и двухфазной смеси.

Пункт 8: Разработка систем компьютерного и имитационного моделирования.

4. Программа для ЭВМ «LVTrajectory», предназначенная для компьютерного моделирования движения частицы слабовязкой жидкости с течением времени в зависимости от задаваемых параметров жидкости и волны.

Научная новизна результатов работы по трем областям специальности 05.13.18 сводится к следующим положениям:

Математическое моделирование:

1. В линейном приближении найдены выражения для фазовой скорости и декремента затухания волны для бесконечно глубокого слоя жидкости. Получена система алгебраических дисперсионных уравнений для конечного слоя жидкости. Исследованы линейные траектории жидких частиц.
2. Аналитически определено критическое значение относительной вязкости, при котором возможно волновое движение и условие, при выполнении которого жидкость можно считать слабовязкой.
3. Разработан метод переменной во времени частоты, являющийся обобщением метода Стокса для диссипативных процессов, с помощью которого решена нелинейная задача о распространении волн по свободной поверхности слабовязкой жидкости. Проведен качественный анализ изменения частоты нелинейной волны.
4. Определены нелинейные эффекты для волнового движения слабовязкой жидкости.
5. Получены решение и дисперсионные соотношения для нелинейных капиллярно-гравитационных волн. Установлено, что капиллярно-гравитационная волна движется быстрее гравитационной, но при этом амплитуды их убывают с одной скоростью.
6. Методом переменной во времени частоты решена нелинейная задача о плоских волнах на слое дисперсной смеси бесконечной глубины. Найдено асимптотическое решение с точностью третьего приближения

по волновому параметру. Найдены нелинейные добавки к фазовой скорости волны. Определены нелинейные траектории частиц жидкой и дисперсной фазы, а также выражения приповерхностного течения Стокса обеих фаз смеси.

7. Установлено, что дисперсные частицы с меньшей, по сравнению с несущей жидкостью, плотностью заглубляются по мере движения, а частицы с большей плотностью поднимаются ближе к свободной поверхности. Нелинейная фазовая скорость в случае, когда частицы дисперсной фазы имеют большую, чем несущая фаза плотность, больше, чем в случае более легких частиц.

Численные методы:

8. Численное определение частоты волны и декремента затухания линейной задачи о волнах на поверхности слоя вязкой жидкости конечной глубины. Численная реализация метода малого параметра для конкретных сред, требующая применения численных методов для определения нелинейной частоты волны и частицы.

Комплексы программ:

9. Разработана программа для ЭВМ «LVTrajectory», которая предназначена для компьютерного моделирования нелинейной траектории частицы слабовязкой жидкости в зависимости от введенных параметров жидкости и волны, отображает динамику движения частицы с течением времени. Алгоритм вычисления траекторий основан на применении аналитических формул, полученных для волновых траекторий и численных методов для определения частоты частицы и волны. В программе реализована возможность построения траекторий одновременно нескольких частиц, определяемых разными лагранжевыми координатами, что позволяет оценить глубину проникновения волновых возмущений.

Достоверность и обоснованность полученных результатов и выводов определяется применением хорошо разработанных математических методов, в том числе метода малого параметра, а также тем, что из полученных в диссертации результатов следуют как частные случаи классические результаты теории поверхностных волн.

Научно-практическая значимость. Результаты, полученные в диссертации: развивают теорию поверхностных волн; позволяют рассчитать время затухания волны; моделируют нелинейные волновые движения как вязкой и двухфазной среды; позволяют определить границы применения упрощенных моделей; могут быть использованы для разработки волновых методов определения загрязнения водных бассейнов.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на X Всероссийской конференции «Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики» (Санкт-Петербург, 2010), III региональной научно-практической конференции «Современные проблемы математического и информационного

моделирования. Перспективы разработки и внедрения инновационных IT-решений» (Тюмень, 2010), XLII международной научной конференции аспирантов и студентов «Процессы управления и устойчивость» (Санкт-Петербург, 2011), Всероссийской научной конференции с международным участием «Дифференциальные уравнения и их приложения» (Стерлитамак, 2011), Всероссийской научно-практической конференции «Математика и математическое моделирование» (Саранск, 2011), IV региональной научно-практической конференции «Современные проблемы математического и информационного моделирования. Перспективы разработки и внедрения инновационных IT-решений» (Тюмень, 2011), XI Всероссийской конференции «Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики» (Санкт-Петербург, 2012).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 17 работ, в том числе 5 в изданиях из списка, рекомендованного ВАК РФ, получен сертификат о государственной регистрации программ для ЭВМ.

Структура и объем диссертации. Объем диссертации составляет 119 страниц. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы и приложения. Список литературы содержит 75 наименований.

Краткое содержание работы.

Во введении обосновывается актуальность темы диссертационной работы, дается обзор работ, непосредственно примыкающих к теме диссертации, формулируется цель исследования, приводится краткое содержание работы.

Первая глава диссертации посвящена постановке нелинейной краевой задачи о волновом движении на свободной поверхности вязкой жидкости. Рассматривается слой вязкой несжимаемой жидкости бесконечной глубины. Свободная поверхность слоя граничит со средой пренебрежимо малой плотности, характеризующейся постоянным давлением P_a (в частности, атмосферным). Декартова система координат задана так, что плоскость $z^* = 0$ совпадает с невозмущённой поверхностью, а ось z^* противоположно направлена вектору силы тяжести \mathbf{g} . Движение жидкости происходит в плоскости x^*z^* со скоростью $\mathbf{u}^* = (u^*(t^*, x^*, z^*), 0, v^*(t^*, x^*, z^*))$. Звездочкой, там, где это необходимо, обозначены физические (размерные) величины.

Пусть в положительном направлении оси x^* распространяется волна длины λ . Длина волны много больше ее высоты ($\lambda \gg \xi_{\max}^*$). В области, занятой жидкостью выполняются уравнения неразрывности и движения

$$\operatorname{div} \mathbf{u}^* = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \nabla) \mathbf{u}^* = -\frac{1}{\rho} \nabla p^* + \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{u}^*, \quad (1)$$

Здесь $p^* = P - P_a + \rho g z^*$ – динамическое давление, ρ – плотность, P – давление, μ – коэффициент динамической вязкости.

На свободной поверхности $z^* = \xi^*(t^*, x^*)$ задаются кинематическое и динамическое условия

$$v^* = \frac{\partial \xi^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial \xi^*}{\partial x^*}, \quad (2)$$

$$p^* - \rho g \xi^* + \sigma K - T_n + T_s \frac{\partial \xi^*}{\partial x^*} = 0, \quad (p^* - \rho g \xi^* + \sigma K + T_n) \frac{\partial \xi^*}{\partial x^*} + T_s = 0,$$

где

$$T_n = 2\mu \frac{\partial v^*}{\partial z^*} = -2\mu \frac{\partial u^*}{\partial x^*}, \quad T_s = \mu \left(\frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right), \quad K = -\nabla \mathbf{n}.$$

Здесь σ – коэффициент поверхностного натяжения, K – кривизна поверхности, \mathbf{n} – вектор нормали к свободной поверхности.

При бесконечном заглублении скорость жидкости должна затухать, т.е. выполнено условие

$$u^* = 0, \quad v^* = 0, \quad z^* \rightarrow -\infty. \quad (3)$$

Система уравнений (1) и граничных условий (2), (3) является замкнутой и составляет нелинейную краевую задачу для определения характеристик волнового движения.

Во второй главе в линейном приближении исследуется распространение поверхностных волн по свободной поверхности вязкой жидкости.

Первый параграф посвящен определению скорости волнового движения, возмущения давления и формы свободной поверхности. Вводятся следующие безразмерные переменные и величины

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^* &= \varepsilon c_0 \mathbf{u}, \quad p^* = \varepsilon \rho c_0^2 p, \quad \xi^* = \varepsilon \xi / k, \quad v_0 = \mu k / \rho c_0, \\ t &= k c t^*, \quad x = k x^*, \quad z = k z^*, \quad \alpha = c / c_0 = \omega / \omega_0, \quad c_0^2 = c_g^2 + c_\sigma^2, \\ c_g^2 &= g / k, \quad c_\sigma^2 = \sigma k / \rho, \quad \gamma_0^2 = c_g^2 / c_0^2, \quad \kappa_0^2 = c_\sigma^2 / c_0^2, \quad \gamma_0^2 + \kappa_0^2 = 1, \end{aligned}$$

где c_0 и ω_0 – соответственно фазовая скорость и частота волны линейной задачи для идеальной жидкости, c и ω – фазовая скорость и частота волны, $\varepsilon = k \xi_{\max}^*$ – малый волновой параметр, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число. Параметр α должен удовлетворять естественному ограничению $0 \leq \alpha^2 \leq 1$.

В безразмерных переменных задача (1)-(3) принимает вид

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \quad \alpha \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - v_0 \Delta \mathbf{u} + \nabla p = -\varepsilon (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u}, \\ v - \alpha \frac{\partial \xi}{\partial t} &= \varepsilon u \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad z = \varepsilon \xi, \end{aligned}$$

$$p - \gamma_0^2 \xi + \kappa_0^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \left[1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right]^{-3/2} - 2v_0 \frac{\partial v}{\partial z} = -\varepsilon v_0 \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad z = \varepsilon \xi,$$

$$v_0 \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\varepsilon \left\{ p - \gamma_0^2 \xi + \kappa_0^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \left[1 + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right]^{-3/2} + 2v_0 \frac{\partial v}{\partial z} \right\} \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad z = \varepsilon \xi,$$

$$\mathbf{u} \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty.$$

Далее в этом и во втором параграфе рассматривается задача, соответствующая значению параметра $\varepsilon = 0$. Поле скоростей находится в виде суммы потенциальной и вихревой составляющей $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1$. Решение линейной задачи найдено в виде

$$v_0 = A e^{z - \frac{\beta}{\alpha} t} \sin \chi, \quad u_0 = A e^{z - \frac{\beta}{\alpha} t} \cos \chi, \quad \chi = x - t + d, \quad (4)$$

$$p = A e^{z - \frac{\beta}{\alpha} t} (\alpha \cos \chi + \beta \sin \chi), \quad \xi = \frac{A}{\alpha^2 + s^2} e^{-\frac{\beta}{\alpha} t} (\alpha \cos \chi + s \sin \chi),$$

$$v_1 = -\frac{2v_0 A}{\alpha^2 + s^2} e^{bz - \frac{\beta}{\alpha} t} [(\alpha \cos az - s \sin az) \cos \chi + (\alpha \sin az + s \cos az) \sin \chi],$$

$$u_1 = -\frac{2v_0 A}{\alpha^2 + s^2} e^{bz - \frac{\beta}{\alpha} t} \{[(\alpha a + bs) \cos az + (\alpha b - as) \sin az] \cos \chi +$$

$$+ [(as - \alpha b) \cos az + (\alpha a + bs) \sin az] \sin \chi\},$$

где d – начальная фаза волны, β – безразмерный декремент затухания волны ($\beta \omega_0$ – размерный), $s = 2v_0 - \beta$, $a = \alpha s / (2v_0^2)$, $b = v_0 / s$. Для относительной частоты и безразмерного декремента затухания найдены следующие выражения

$$\alpha^2 = 1 + s^2 - \frac{4v_0^3}{s},$$

$$\beta = 2v_0 - \sqrt{\frac{1}{3} \left(2r^2 \cos \frac{\theta - \pi}{3} - 1 \right)}, \quad 0 \leq v_0 < 0.66,$$

$$\beta = 2v_0 - \sqrt{\frac{1}{3} \left(2r^2 \cos \frac{\theta}{3} - 1 \right)}, \quad 0.66 \leq v_0 \leq 1.31,$$

$$r^2 = \sqrt{12v_0^2 + 1}, \quad \theta = \operatorname{arctg} \left(\frac{6\sqrt{3}v_0^3 \sqrt{1+v_0^2(1+18v_0^2-11v_0^4)}}{1+18v_0^4-54v_0^6} \right).$$

Выражения (4) при предельном переходе $v_0 \rightarrow 0$ дают известные решения для идеальной жидкости.

Графики зависимости $\alpha(v_0)$, $\beta(v_0)$, $s(v_0)$ приведены на Рис.1. В силу безразмерности функций и переменной эти графики универсальны для любой жидкости.

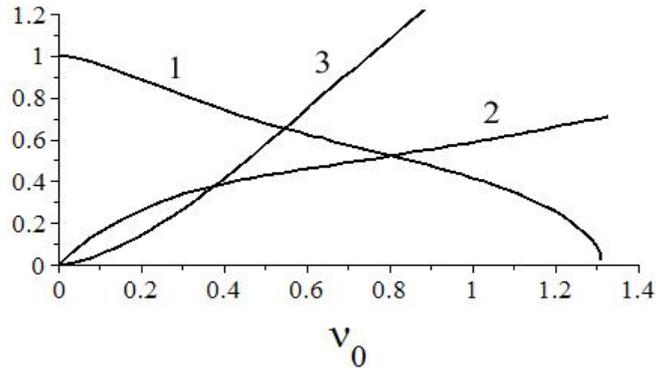


Рис. 1. Зависимость α , β , s от v_0 : линия 1 - $\alpha(v_0)$, линия 2 - $\beta(v_0)$, линия 3 - $s(v_0)$.

При определении декремента затухания было найдено условие (критерий) существования затухающих прогрессивных волн: волновое движение возможно, если $0 \leq v_0 \leq N \approx 1.31$. Для этой области изменения v_0 относительная частота α проходит весь диапазон значений: $0 \leq \alpha(v_0) \leq 1$, $\alpha(0) = 1$, $\alpha(N) = 0$. Безразмерный декремент затухания лежит в пределах: $0 \leq \beta \leq \beta_*$, $\beta_* = \beta(N) = \beta_2(N) \approx 0.7$. В физических величинах этот критерий имеет вид

$$0 \leq \frac{\mu k}{\rho c_0} \leq N.$$

В третьем параграфе проведены расчеты параметров волнового движения для конкретных жидкостей. Установлено, что с ростом вязкости фазовая скорость убывает. Чем меньше длина волны, тем быстрее это убывание. Для разных плотностей значения фазовой скорости совпадают только при нулевой вязкости (идеальная жидкость), а с увеличением вязкости фазовая скорость жидкости меньшей плотности убывает быстрее. Декремент затухания с увеличением вязкости возрастает. Это возрастание больше для волны меньшей длины и жидкости меньшей плотности.

В четвертом параграфе в линейном приближении определены траектории жидких частиц. Траектории являются разомкнутыми вследствие затухания

волны. Для примера построены траектории движения жидких частиц с лагранжевыми координатами $x_L = 1$ и $z_L = 0; -1$ при значениях динамического коэффициента вязкости $\mu = 10^{-3}$ кг/(м*с) (рис. 2а, б) и $\mu = 100$ кг/(м*с) (рис. 3а, б). При малом значении вязкости траектории практически являются окружностями, что соответствует классическим результатам. Из рисунков видно, что с увеличением глубины частицы жидкости движутся по траекториям меньшее амплитуды. На рис. 3а приведен пример влияния касательных напряжений на форму траектории частицы вследствие большого значения динамической вязкости. Однако, этот эффект наблюдается только вблизи свободной поверхности, при заглублении большая вязкость жидкости сказывается только лишь на скорости затухания движения частиц (рис. 3б).

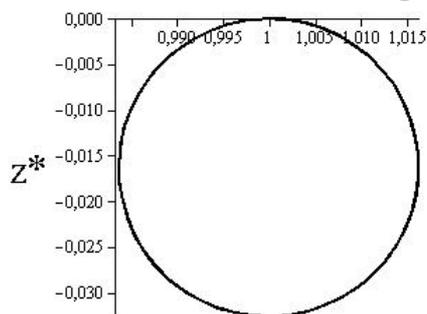


Рис. 2а. Траектория движения частицы при $\mu = 0.001$ кг/(м*с), $z_L = 0$.

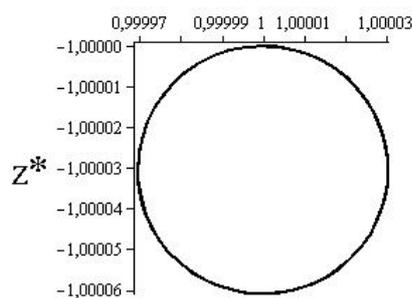


Рис. 2б. Траектория движения частицы при $\mu = 0.001$ кг/(м*с), $z_L = -1$.

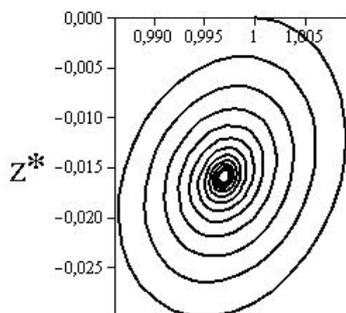


Рис. 3а. Траектория движения частицы при $\mu = 100$ кг/(м*с), $z_L = 0$.

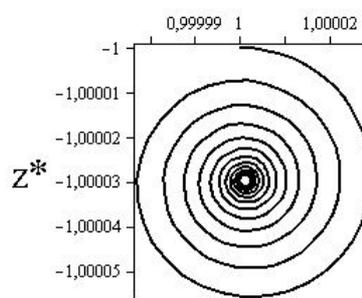


Рис. 3б. Траектория движения частицы при $\mu = 100$ кг/(м*с), $z_L = -1$.

В пятом параграфе в результате сравнения амплитуд потенциальной и вихревой составляющей скорости определена область значений относительной вязкости

$$0 \leq \nu_0 < 0.4, \quad (5)$$

при которых жидкость можно считать слабовязкой и искать решение в виде затухающих потенциальных волн. Кроме того, в модели слабовязкого приближения необходимо пренебречь вторым динамическим условием (2), т.к.

оно может быть удовлетворено только вихревым решением. Тогда линейная волновая задача для слабвязкой жидкости принимает вид

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \alpha \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu_0 \Delta \mathbf{u} + \nabla p = 0,$$

$$\nu_0 = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad p - \gamma^2 \xi + \kappa^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - 2\nu_0 \frac{\partial \nu_0}{\partial z} = 0, \quad z = 0.$$

Решение данной задачи найдено в виде

$$\mathbf{u}_0 = A e^{z - \frac{\beta}{\alpha} t} (\cos \chi, \sin \chi), \quad p = A e^{z - \frac{\beta}{\alpha} t} (\alpha \cos \chi + \beta \sin \chi).$$

$$\xi = A e^{-\frac{\beta}{\alpha} t} (\alpha \cos \chi - \beta \sin \chi), \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1, \quad \beta = \nu_0.$$

Таким образом, в рамках потенциальной модели дисперсионные соотношения имеют более простой вид, чем для вихревой модели.

В шестом параграфе решена линейная задача о волнах на поверхности слоя вязкой жидкости конечной глубины. Для определения частоты и декремента затухания волны получены дисперсионные уравнения, для решения которых применялись численные методы решения систем уравнений. Установлено, что при глубине слоя большем длины волны решение задачи практически равно решению линейной задачи для бесконечно глубокого слоя.

В третьей главе рассматривается нелинейная задача о плоских гравитационных волнах ($\sigma = 0$) на свободной поверхности слабвязкой жидкости, когда выполняется условие (5).

В первом параграфе, исключением из второго динамического условия задачи (1)-(3) вязких касательных напряжений, строится математическая модель, описывающая волновое движение слабвязкой жидкости. Для решения задачи во втором параграфе предлагается модифицировать метод последовательных приближений Стокса, полагая частоту волны неизвестной функцией времени, что обосновано затуханием волнового движения и зависимостью фазовой скорости от амплитуды волны. Безразмерные уравнения и граничные условия имеют вид

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \frac{\alpha^2}{\alpha - t\alpha'} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu_0 \Delta \mathbf{u} + \nabla p = -\varepsilon (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u}, \quad (6)$$

$$\nu - \frac{\alpha^2}{\alpha - t\alpha'} \frac{\partial \xi}{\partial t} = \varepsilon \mathbf{u} \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad z = \varepsilon \xi,$$

$$p - \xi - 2\nu_0 \frac{\partial \nu}{\partial z} = \varepsilon^2 \left(p - \xi + 2\nu_0 \frac{\partial \nu}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2, \quad z = \varepsilon \xi,$$

$$\mathbf{u} \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty.$$

Здесь $\alpha = c(t)/c_0 = \omega(t)/\omega_0$, $c_0 = \sqrt{g/k}$.

В силу малости волнового параметра ε граничные условия на свободной поверхности $z = \varepsilon \xi(t, x)$, разложением в ряд Маклорена входящих в них функций, сводятся к условиям на фиксированной поверхности $z = 0$.

Исходя из ограничения на относительную вязкую частоту, решение задачи находится в виде затухающих прогрессивных волн. Неизвестные функции представляются в виде рядов по параметру ε

$$\mathbf{u} = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n-1} e^{-n \frac{\beta}{\alpha} t} \mathbf{u}_n, \quad \mathbf{u}_n = (u_n, 0, v_n), \quad p = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n-1} e^{-n \frac{\beta}{\alpha} t} p_n,$$

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n-1} e^{-n \frac{\beta}{\alpha} t} \xi_n, \quad \alpha = \alpha_0 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n a_n(t) \right), \quad \beta = \beta_0 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n b_n(t) \right).$$

Здесь $\beta(t)$ – безразмерный декремент затухания ($\beta^* = \beta \omega_0$ – размерный), α_0 , β_0 – значения α , β , соответствующие линейной задаче. Выписываются системы уравнений и граничных условий для определения трех приближений, которые затем разрешаются. Получены выражения для относительной фазовой скорости, декремента затухания, скорости волнового движения, динамического давления и формы свободной поверхности с точностью до третьего приближения. Относительная частота и безразмерный декремент затухания имеют вид

$$\alpha = \alpha_0 \left[1 + \varepsilon^2 \alpha_0 A^2 \frac{1 - e^{-\frac{2v_0 t}{\alpha_0}}}{4v_0 t} (1 - 4v_0^2 + 8v_0^4) \right],$$

$$\beta = v_0 \left[1 + \varepsilon^2 \alpha_0 A^2 \frac{1 - e^{-\frac{2v_0 t}{\alpha_0}}}{2v_0 t} (1 + 4v_0^2 - 4v_0^4) \right].$$

Найденные выражения показывают, что частота и декремент зависят от высоты волны и времени, с течением которого затухают, стремясь к своим линейным значениям. Эти формулы являются обобщением нелинейного эффекта Стокса на случай слабовязкой жидкости.

В третьем параграфе, исходя из полученного решения задачи (6), где отсутствует в явном виде декремент затухания β , предлагается ограничиться разложением в ряд относительной частоты. При этом в нелинейных приближениях амплитудные коэффициенты полагаются функциями времени, подлежащими определению. Найдено решение задачи, которое совпадает с решением, полученным в предыдущем параграфе.

В четвертом параграфе определяются нелинейные траектории частиц слабовязкой жидкости. Найдено выражение переносной скорости Стокса

$$u_s = \varepsilon^2 c_0 \frac{\alpha_0^2 A^2}{2\nu_0 t} e^{2z_L} \left(1 - e^{-\frac{2\nu_0 t}{\alpha_0}} \right),$$

где z_L – лагранжева координата частицы.

Переносная скорость зависит не только от глубины, на которой находится частица, но и от времени. Со временем приповерхностное течение затухает, и траектории частиц стремятся к линейным.

Установлено, что движение жидкой частицы состоит из двух затухающих движений: непериодического и вращательного. Непериодическое происходит тем быстрее, чем ближе частица к свободной поверхности. Оно обеспечивает разомкнутость траекторий частиц. Вращательное движение осуществляется по круговым спиралеобразным траекториям, которые со временем сходятся к центру начальной окружности. Стремление к центру тем быстрее, чем больше значение вязкости жидкости.

Четвертая глава посвящена решению нелинейной задачи о капиллярно-гравитационных волнах на свободной поверхности слабовязкой жидкости. Решение находится в виде затухающих прогрессивных волн методом переменной во времени частоты с точностью до третьего приближения. Относительная частота найдена в виде

$$\alpha = \alpha_0 \left\{ 1 + \varepsilon^2 \alpha_0 A^2 \frac{1 - e^{-2\nu_0 t/\alpha_0}}{32\gamma_0^4 \nu_0 t} \left[8 - 20\gamma_0^2 + 17\gamma_0^4 + 3\gamma_0^6 + 64\gamma_0^4 \nu_0^4 + \right. \right. \\ \left. \left. + 4\gamma_0^2 \nu_0^2 (3\gamma_0^4 + \gamma_0^2 - 12) + 16\kappa_0^2 (3\gamma_0^2 - 2)(1 - 3\kappa_0^2 \gamma_0^2) / \left((3\gamma_0^2 - 2)^2 + 24\gamma_0^2 \nu_0^2 \right) \right] \right\}.$$

где α_0 – значение α , соответствующее линейной задаче.

Установлено, что капиллярно-гравитационная волна движется быстрее гравитационной, но при этом амплитуды их убывают с одной скоростью.

В пятой главе рассматривается нелинейная задача о волновом движении на поверхности бесконечно глубокого слоя двухфазной смеси.

В первом параграфе приводится нелинейная краевая задача о волнах на поверхности слоя двухфазной смеси с равномерным распределением дисперсной фазы в покоящемся слое, которая *во втором параграфе* разрешается методом переменной во времени частоты. Предполагается: несущая фаза – идеальная несжимаемая жидкость, вязкость которой проявляется только на межфазной границе; дисперсная фаза – сферические частицы радиуса a ; волна длиной λ ($\lambda \gg \xi_{\max}^*$, $\lambda \gg a$) распространяется в направлении оси x^* ; $k\xi_{\max}^* = \varepsilon$ – малый волновой параметр, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число. В предположении, что частота волны – неизвестная функция времени, безразмерные уравнения и граничные условия на свободной поверхности для волновых возмущений принимают вид

$$-\frac{\alpha_o}{(t/c)'} \frac{\partial \gamma}{\partial t} + (1 - \alpha_o) \nabla \cdot \mathbf{v}_1 - \varepsilon \alpha_o \nabla \cdot (\gamma \mathbf{v}_1) = 0,$$

$$\frac{1}{(t/c)'} \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v}_2 + \varepsilon \nabla \cdot (\gamma \mathbf{v}_2) = 0, \quad \mathbf{v}_1 = (v_{1x}, v_{1z}), \quad \mathbf{v}_2 = (v_{2x}, v_{2z}),$$

$$\left(\mu_1 + \frac{s}{2} \mu_1 \alpha_o \right) \frac{1}{(t/c)'} \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} - \frac{s \mu_1 \alpha_o}{2(t/c)'} \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial t} - r \alpha_o (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) + \nabla p + \varepsilon \left[\mu_1 \left(1 + \frac{s}{2} \alpha_o \right) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot (\mathbf{v}_1 \nabla) \mathbf{v}_1 - \frac{s}{2} \mu_1 \alpha_o (\mathbf{v}_2 \nabla) \mathbf{v}_2 - r \alpha_o \gamma (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) - \frac{s \mu_1 \alpha_o \gamma}{2(t/c)'} \left(\frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} \right) \right] +$$

$$+ \varepsilon^2 \frac{s}{2} \mu_1 \alpha_o \gamma [(\mathbf{v}_1 \nabla) \mathbf{v}_1 - (\mathbf{v}_2 \nabla) \mathbf{v}_2] = 0,$$

$$\left[\mu_2 + \frac{s}{2} \mu_1 (1 - \alpha_o) \right] \frac{1}{(t/c)'} \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial t} - \frac{s \mu_1 (1 - \alpha_o)}{2(t/c)'} \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + r (1 - \alpha_o) (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) + \nabla p +$$

$$+ \varepsilon \left\{ \left[\mu_2 + \frac{s}{2} \mu_1 (1 - \alpha_o) \right] (\mathbf{v}_2 \nabla) \mathbf{v}_2 - \frac{s}{2} \mu_1 (1 - \alpha_o) (\mathbf{v}_1 \nabla) \mathbf{v}_1 - r \alpha_o \gamma (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) - \right.$$

$$\left. - \frac{s \mu_1 \alpha_o \gamma}{2(t/c)'} \left(\frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} \right) \right\} + \varepsilon^2 \frac{s}{2} \mu_1 \alpha_o \gamma [(\mathbf{v}_1 \nabla) \mathbf{v}_1 - (\mathbf{v}_2 \nabla) \mathbf{v}_2] = 0,$$

$$\frac{1}{(t/c)'} \frac{\partial \xi}{\partial t} - (1 - \alpha_o) v_{1z} - \alpha_o v_{2z} + \varepsilon \left\{ \frac{\partial \xi}{\partial x} [(1 - \alpha_o) v_{1x} + \alpha_o v_{2x}] - \right.$$

$$\left. - \alpha_o \gamma (v_{2z} - v_{1z}) \right\} + \varepsilon^2 \alpha_o \gamma \frac{\partial \xi}{\partial x} (v_{2x} - v_{1x}) = 0, \quad z = \varepsilon \xi(t, x)$$

$$p - v_o^2 \xi + \varepsilon \alpha_o (\mu_1 - \mu_2) v_o^2 \gamma \xi = 0, \quad v_o^2 = g/kc_o^2 \quad z = \varepsilon \xi(t, x),$$

$$v_{iz} \rightarrow 0, \quad v_{ix} \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty, \quad i = 1, 2.$$

Безразмерные величины связаны с физическими равенствами
 $t = kc^* t^*$, $x = kx^*$, $z = kz^*$, $\mu_i = \rho_i^o / \rho^o$, $r = R / \rho^o kc_o$,

$$\rho^o = (1 - \alpha_o) \rho_1^o + \alpha_o \rho_2^o, \quad c = c^*(t)/c_0 = \omega^*(t)/\omega_0,$$

$$\alpha^* = \varepsilon \alpha_o \gamma, \quad k \xi^* = \varepsilon \xi, \quad \mathbf{v}_i^* = \varepsilon c_o \mathbf{v}_i, \quad p^* = P_i - P_a + \rho_i^o g z^* = \varepsilon \rho^o c_o^2 p.$$

Здесь ω_0 , c_0 – частота, фазовая скорость линейной волны; α_0 , α^* – концентрация дисперсной фазы, ее возмущение; \mathbf{v}_i^* , P_i , ρ_i^o – вектор скорости, давление, истинная плотность i -й фазы; ρ^o , P_a – плотность покоящейся смеси, атмосферное давление; $R = 9\eta/2a^2$ – коэффициент межфазного трения (η – динамическая вязкость); коэффициент $s = 1; 0$ в зависимости от учета силы присоединенных масс.

Граничные условия заданные на свободной поверхности $z = \varepsilon \xi(t, x)$ при помощи разложения в ряд Маклорена переносятся на фиксированную поверхность $z = 0$. Решение нелинейной задачи ищется в виде рядов по малому параметру ε

$$\mathbf{v}_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n-1} \mathbf{v}_{1n}, \quad \mathbf{v}_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n-1} \mathbf{v}_{2n}, \quad p = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n-1} p_n,$$

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n-1} \xi_n, \quad \gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n-1} \gamma_n, \quad c = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon^n a_n(t).$$

Выписываются системы уравнений и граничных условий для определения первых трех приближений. Решение задачи найдено в виде затухающих прогрессивных волн. Получено выражение для относительной частоты, из которого следует, что с течением времени частота стремится к значению соответствующему линейной задаче. На рис. 4 приведены графики зависимости фазовой скорости волны ($\lambda = 5$ м) от времени t^* для смеси с более легкой ($\rho_2^o = 500$ кг/м³) и более тяжелой ($\rho_2^o = 1500$ кг/м³) дисперсной фазой, чем несущая жидкость ($\rho_1^o = 1000$ кг/м³, $\eta = 10^{-3}$ кг/(м*с)). Дисперсная фаза моделируется в виде шариков радиуса $a = 0,15 \cdot 10^{-2}$ м. Из графиков видно, что максимальное значение фазовая скорость принимает в начальный момент времени и с течением времени уменьшается, стремясь к линейному значению. В случае $\rho_2^o > \rho_1^o$ фазовая скорость больше, чем при $\rho_2^o < \rho_1^o$. Из графиков зависимости амплитуды волны от времени, приведенных на рис. 5, видно, что волновое движение затухает раньше, чем фазовая скорость достигает линейного значения.

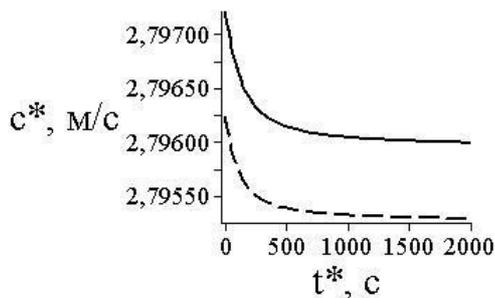


Рис. 4. Зависимость фазовой скорости c^* от времени t^* : --- $\rho_2^0 = 500 \text{ кг/м}^3$, — $\rho_2^0 = 1500 \text{ кг/м}^3$.

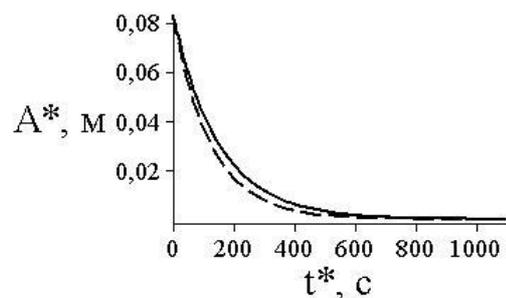


Рис. 5. Зависимость амплитуды волны от времени t^* : --- $\rho_2^0 = 500 \text{ кг/м}^3$, — $\rho_2^0 = 1500 \text{ кг/м}^3$.

В третьем параграфе определяются нелинейные траектории частиц несущей и дисперсной фазы. Найдено решение с точностью ε^2 , а также выражения переносной скорости Стокса каждой фазы. Переносная скорость зависит не только от глубины, на которой находится частица, но и от времени, с течением которого затухает. Движение частиц состоит из двух затухающих движений неперриодического и вращательного. Для иллюстрации на рис. 6, 7 приведены траектории частиц дисперсной фазы при $\rho_2^0 = 500 \text{ кг/м}^3$ и $\rho_2^0 = 1500 \text{ кг/м}^3$. Из графиков видно, что более легкие частицы заглубляются по мере движения, а более тяжелые, наоборот, поднимаются ближе к свободной поверхности.

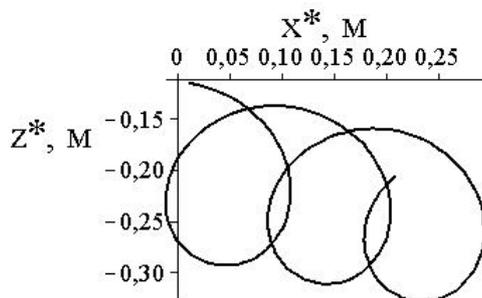


Рис. 6. Траектория движения частицы дисперсной фазы при $\rho_2^0 = 500 \text{ кг/м}^3$.

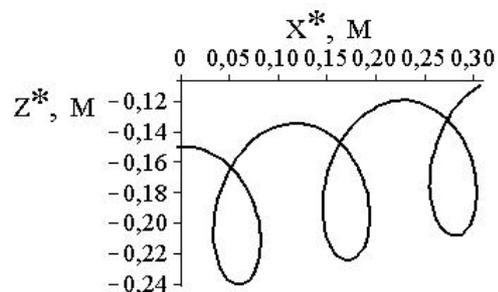


Рис. 7. Траектория движения частицы дисперсной фазы при $\rho_2^0 = 1500 \text{ кг/м}^3$.

В заключении приведены основные результаты и выводы диссертации:

1. Для линейной задачи о волнах на поверхности вязкой жидкости найдены выражения для фазовой скорости и декремента затухания волны. Исследовано влияние вязкости на траектории движения жидких частиц.
2. Аналитически определено критическое значение относительной вязкости, при котором возможно волновое движение, а также границы применимости модели слабовязкой и сильновязкой жидкости.
3. Получена система дисперсионных уравнений для линейных волн на слое вязкой жидкости конечной глубины. Численно установлено, что

конечность слоя изменяет частоту и декремент затухания, если глубина меньше длины волны. Если глубина больше, то частота и декремент мало отличаются от случая бесконечно глубокого слоя.

4. С точностью третьего приближения методом переменной частоты, являющимся обобщением метода Стокса для диссипативных процессов, решена задача о распространении волн по свободной поверхности слабовязкой жидкости. Получены нелинейные выражения скорости волнового движения, динамического давления и формы свободной поверхности. Установлено, что с течением времени фазовая скорость стремится к ее линейному значению. Найдены нелинейные траектории движения частиц слабовязкой жидкости, а также выражение для приповерхностного течения. Выражения для частоты и скорости приповерхностного течения являются обобщением нелинейных эффектов Стокса на случай слабовязкой жидкости.
5. Исследовано влияние поверхностного натяжения на волновое движение слабовязкой жидкости. Установлено, что капиллярно-гравитационная волна движется быстрее гравитационной, но при этом амплитуды их убывают с одной скоростью.
6. Найдено решение с точностью третьего приближения нелинейной задачи о поверхностных волнах на слое дисперсной смеси методом переменной частоты. Тем самым, показана универсальность данного метода для диссипативных волновых процессов. Найдена нелинейная поправка к фазовой скорости волны. Исследованы траектории движения частиц несущей и дисперсной фазы. Установлено, что дисперсные частицы с меньшей, по сравнению с несущей жидкостью, плотностью заглубляются по мере движения, а частицы с большей плотностью поднимаются ближе к свободной поверхности. Найдены выражения для скорости приповерхностного течения несущей и дисперсной фазы.
7. Разработана программа для ЭВМ «LVTrajectory», предназначенная для компьютерного моделирования движения частицы слабовязкой жидкости с течением времени.

В приложении приведено описание интерфейса программы «LVTrajectory», предназначенной для моделирования движения частицы слабовязкой жидкости с течением времени в зависимости от задаваемых параметров жидкости и волны.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК

1. Баринов В.А., Басинский К.Ю. Моделирование волновых движений вязкой жидкости // Вестник Тюмен. ун-та. 2009. №6. С. 144 – 151.

2. Баринов В.А., Басинский К.Ю. Развитие метода Стокса для слабовязкой жидкости // Вестник Тюмен. ун-та. 2010. №6. С. 127 – 133.
3. Баринов В.А., Басинский К.Ю. Решение нелинейной задачи о волнах на поверхности слабовязкой жидкости // Вестн. С.-Петербур. ун-та. 2011. Сер.10. Вып. 2. С. 9-16.
4. Баринов В.А., Басинский К.Ю. Нелинейные волны Стокса на поверхности слабовязкой жидкости // Вестн. Удм. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Вып. 2. С. 112-122.
5. Басинский К.Ю. Нелинейные капиллярно-гравитационные волны на свободной поверхности слабовязкой жидкости // Вестник Тюмен. ун-та. №7. 2011. С. 123 – 127.

Публикации в других рецензируемых изданиях

6. Баринов В.А., Басинский К.Ю. Моделирование волн на свободной поверхности вязкой жидкости // Сборник науч. трудов «Математическое и информационное моделирование». Вып.11. Тюмень: Изд-во «Вектор Бук». 2009. С.10-17.
7. Баринов В.А., Басинский К.Ю. Волновые траектории частиц вязкой жидкости // Сборник трудов третьей региональной научно-практической конференции «Современные проблемы математического и информационного моделирования. Перспективы разработки и внедрения инновационных IT-решений». – Тюмень: Изд-во Тюмен. ун-та, 2010. С. 27-32.
8. Басинский К.Ю. Нелинейные волны на поверхности слабовязкой жидкости // Сборник трудов третьей региональной научно-практической конференции «Современные проблемы математического и информационного моделирования. Перспективы разработки и внедрения инновационных IT-решений» . – Тюмень: Изд-во Тюмен. ун-та, 2010. С. 32-36.
9. Баринов В.А., Басинский К.Ю. Влияние вязкости жидкости на распространение поверхностных волн // Труды 10-ой Всероссийской конференции «Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики». – СПб.: Наука, 2010. С. 205-208.
10. Баринов В.А., Басинский К.Ю. Нелинейное моделирование волн на свободной поверхности слабовязкой жидкости // Сборник науч. трудов «Математическое и информационное моделирование». Вып.12. Тюмень: Изд-во «Вектор Бук». 2010. С.18-27.
11. Баринов В.А., Басинский К.Ю. Нелинейные волновые траектории частиц слабовязкой жидкости // Сборник науч. трудов «Математическое и информационное моделирование». Вып.12. Тюмень: Изд-во «Вектор Бук». 2010. С.27-34.

12. Басинский К.Ю. Распространение капиллярно-гравитационных волн по свободной поверхности слабовязкой жидкости // Процессы управления и устойчивость: Труды 42-й международной научной конференции аспирантов и студентов / Под ред. А. С. Ерёмина, Н. В. Смирнова. СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2011. С. 86–91.
13. Басинский К.Ю. Моделирование нелинейных капиллярно-гравитационных волн // Сборник трудов четвертой региональной научно-практической конференции «Современные проблемы математического и информационного моделирования. Перспективы разработки и внедрения инновационных IT-решений» . – Тюмень: Изд-во Тюмен. ун-та, 2011. С. 12-17.
14. Баринов В.А., Басинский К.Ю. Нелинейные волны на свободной поверхности слабовязкой жидкости // Труды Всероссийской научной конференции с международным участием «Дифференциальные уравнения и их приложения». – Уфа: Гилем, 2011. С. 36-39.
15. Баринов В.А., Басинский К.Ю. Моделирование нелинейных волн на свободной поверхности слабовязкой жидкости // Труды Всероссийской научно-практической конференции «Математика и математическое моделирование». – Саранск: Изд-во Мордов. гос. пед. ин-та, 2012. С. 31-36.
16. Баринов В.А., Басинский К.Ю. Нелинейные волны на поверхности двухфазной смеси. Труды 11-ой Всероссийской конференции «Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики». – СПб.: Наука, 2012. С. 196-200.
17. Баринов В.А., Басинский К.Ю. Нелинейные волны на поверхности слабовязкой жидкости. Труды 11-ой Всероссийской конференции «Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики». – СПб.: Наука, 2012. С. 200-203.
18. Басинский К.Ю. «LVTrajectory» // Свидетельство государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012612513 от 20.03.2012.