Научная статья / Research Article
Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ.
Информационные технологии

https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-1-116-138
УДК 517.929.2

Дифференциально-разностные системы в анализе слабой разрешимости начально-краевых задач с изменяющейся в сетеподобной области пространственной переменной

Ван Нгуен Хоанг✉, Вячеслав Васильевич Провоторов

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
Контакт для переписки: fadded9x@gmail.com✉

Аннотация. В работе указан подход и соответствующие ему методы, которые позволяют построить априорные оценки слабых решений дифференциально-разностной системы с пространственной переменной, изменяющейся в многомерной сетеподобной области. Такие оценки в пространствах суммируемых функций используются при поиске условий разрешимости краевых задач различного типа для дифференциально-разностных систем. Кроме того, априорные оценки используются для обоснования применения метода дискретизации по временной переменной (полудискретизации) к анализу слабой разрешимости начально-краевых задач и последующего построения приближений слабых решений. Аргументом для использования подхода является тот факт, что представление математических моделей процесса с помощью формализмов дифференциально-разностных систем является единственным инструментом эффективного решения задач переноса сплошных сред по сетеподобным носителям. К примеру, редукция дифференциальной системы (начально-краевой задачи) к соответствующей ей дифференциально-разностной дает возможность не только существенно упростить анализ задач оптимального управления дифференциальной системой (т. к. этот анализ сводится к изучению задачи оптимального управления системой эллиптических уравнений), но и с помощью классических методов теории управления эллиптическими системами алгоритмизировать исходную задачу. Используемая редукция зачастую существенно упрощает условия существования и единственности оптимального управления дифференциальной системой. Данным задачам посвящен достаточно большой спектр исследований нестационарных сетеподобных гидродинамических процессов и потоковых явлений. В качестве иллюстрации используемого подхода приведен анализ разрешимости линеаризованной системы Навье — Стокса.

Ключевые слова: сетеподобная область, дифференциально-разностная система, априорные оценки слабых решений, начально-краевая задача, разрешимость

Цитирование: Хоанг В. Н., Провоторов В. В. 2023. Дифференциально-разностные системы в анализе слабой разрешимости начально-краевых задач с изменяющейся в сетеподобной области пространственной переменной // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. Том 9. № 1 (33). С. 116–138. https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-1-116-138

Поступила 09.01.2023; одобрена 27.03.2023; принята 31.03.2023

Differential-difference systems in the analysis of weak solvability of initial-boundary value problems with a spatial variable in a network-like domain

Van Nguyen Hoang✉, **Vyacheslav V. Provotorov**

Voronezh State University, Voronezh, Russia
Corresponding author: fadded9x@gmail.com✉

Abstract. In the work, the approach and the corresponding methods, which make it possible to construct a priori estimates of weak solutions of a differential-difference system with a spatial variable varying in a multidimensional network-like domain are indicated. Such estimates in spaces of summable functions are used to find solvability conditions for boundary value problems of various types for differential-difference systems. In addition, a priori estimates are used to justify the application of the method of discretization with respect to the time variable (semi-discretization) to the analysis of the weak solvability of initial-boundary value problems and the subsequent construction of approximations of weak solutions. The rationale for the approach used is the fact that in a fairly wide class applied analysis of the problems of transporting continuous media networks-like carriers, the representation of mathematical models of the process using the formalisms of differential-difference systems is the only tool for effectively solving these problems. For example, the reduction of a differential system (initial-boundary value problem) to the corresponding differential-difference system makes it possible not only to significantly simplify the analysis of problems of optimal control of a differential system (since this analysis reduces to studying the problem of optimal control of a system of elliptic equations), but also, using classical methods of control theory for elliptic systems, algorithmize the original problem. The reduction used often facilitates establishing the conditions for the existence and uniqueness of optimal control of a differential system. These problems also include a fairly large range of studies of non-stationary network-like hydrodynamic processes and flow phenomena. As an illustration of the approach used and the results obtained, the analysis of the solvability of the linearized Navier–Stokes system is given and the ways of studying the nonlinear Navier–Stokes system are indicated.

Keywords: network-like domain, differential-difference system, a priori estimates of weak solutions, initial-boundary value problem, solvability

Citation: Hoang, V. N., & Provotorov, V. V. (2023). Differential-difference systems in the analysis of weak solvability of initial-boundary value problems with a spatial variable in a network-like domain. *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, *9*(1), 116–138. https://doi.org/10.21684/2411-7978-2023-9-1-116-138

Received January 9, 2023; Reviewed March 27, 2023; Accepted March 31, 2023

Введение

В работе развиваются идеи анализа дифференциально-разностных систем с пространственной переменной x, изменяющейся на графе, т. е. на совокупности одномерных отрезков [Baranovskii, 2016; Provotorov, Provotorova, 2017], только переменная x n-мерная: $x = \left\{x_1, x_2, \dots, x_n\right\} \in \mathfrak{I} \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ [Artemov и др., 2019; Baranovskii и др., 2021].

Связная область $\mathfrak{I}$ состоит: 1) из совокупности не пересекающихся между собой подобластей; 2) совокупности поверхностей, посредством которых эти подобласти примыкают друг к другу. Эти поверхности являются частями границ подобластей и называются поверхностями примыкания подобластей. Места примыкания подобластей — узловые места области $\mathfrak{I}$ [Artemov и др., 2019; Baranovskii и др., 2021].

Для анализа дифференциально-разностной системы строятся пространства суммируемых на $\mathfrak{I}$ функций, обладающих свойством, обусловленным определенными балансовыми соотношениями, которые задаются на всех поверхностях примыкания. В приложениях такие балансовые соотношения устанавливают закономерности перемещения потоков различного типа сплошных сред в местах ветвления носителей сплошных сред. К примеру, в местах ветвления сетевых газонефтепроводов балансовые соотношения — это математическое описание потоковых явлений. В связи с этим отметим, что представленный ниже подход и метод исследования достаточно часто используется при анализе математических моделей нестационарных процессов гидродинамики при транспортировке жидкостей по сетеподобным носителям [Artemov, Baranovskii, 2019; Baranovskii, 2019; Baranovskii и др., 2021 и библиография там].

Обозначения, основные понятия и определения

Ограниченная область $\mathfrak{I} \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ ($\partial\mathfrak{I}$ — граница $\mathfrak{I}$), имеет в своем составе подобласти $\mathfrak{I}_l$ ($\partial\mathfrak{I}_l$ — границы $\mathfrak{I}_l$), $l \in I_N = \{1, 2, \dots, N\}$, которые связаны между собой определенным образом в M-узловых местах ω_j, $j \in I_M = \{1, 2, \dots, M\}$ $(1 \leq M \leq N-1)$:

$$\mathfrak{I} = \hat{\mathfrak{I}} \bigcup \hat{\omega}, \text{ где } \hat{\mathfrak{I}} = \bigcup_{l=1}^{N} \mathfrak{I}_l,$$

причем $$\hat{\omega} = \bigcup_{j=1}^{M} \omega_j, \mathfrak{I}_l \bigcap \mathfrak{I}_{l'} = \varnothing \ (l \neq l'),\ \omega_j \bigcap \omega_{j'} = \varnothing \ (j \neq j'),\ \mathfrak{I}_l \bigcap \omega_j = \varnothing$$

для любых $l \in I_N$, $j \in I_M$ [Artemov и др., 2019; Baranovskii и др., 2021]. Связь подобластей $\mathfrak{I}_l$ в узловых местах ω_j осуществляется посредством примыкания их частями своих границ $\partial\mathfrak{I}_l$, что означает наличие общих частей границ у этих подобластей (далее — областей примыкания). А именно: пусть j $(j \in I_M)$ фиксировано, т. е. фиксировано узловое место ω_j. Это означает, что фиксированы подобласти примыкания $\mathfrak{I}_{j_1}, \mathfrak{I}_{j_2}, \dots, \mathfrak{I}_{j_{m_j}}$ этого узлового места (m_j — число подобластей примыкания узлового места ω_j). Каждая подобласть $\mathfrak{I}_{j_s}$ $(s = \overline{1, m_j})$ примыкает к ω_j своей поверхностью примыкания $S_{js} \subset \partial\mathfrak{I}_{j_s}$,

причем $$S_{j1} = \bigcup_{s=2}^{m_j} S_{js}.$$

Последнее означает, что поверхность $S_j := S_{j1} \subset \mathfrak{I}_{j_1}$ характеризует структуру узлового места ω_j и определяет его (далее S_j — поверхность примыкания узлового места ω_j). Таким образом, граница $\partial\mathfrak{I}$ области $\mathfrak{I}$ определяется соотношением

$$\partial\mathfrak{I} = \bigcup_{l=1}^{N} \partial\mathfrak{I}_l / \bigcup_{j=1}^{M} S_j.$$

Из сказанного следует, что область $\mathfrak{I}$ структурирована аналогично геометрическому графу-дерево [Baranovskii, 2016], причем произвольная связная подобласть области $\mathfrak{I}$ структурирована таким же образом. Везде далее предполагается, что поверхности S_j и S_{js} гладкие, каждая подобласть $\mathfrak{I}_l$ звездная относительно шара из $\mathfrak{I}_l$.

В дальнейших рассуждениях используются классические пространства действительных измеримых по Лебегу функций $u(x)$, где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ принадлежит области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ [Ладыженская, 1973, с. 29]; $L_2(\Omega)$ — пространство, элементами которого являются функции $u(x)$, суммируемые с квадратом в области Ω. Скалярное произведение $(u, v)_\Omega$ определено соотношением

$$(u,v)_\Omega = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \quad \|u\|_\Omega = \sqrt{(u,u)_\Omega}, \tag{1}$$

где $W_2^1(\Omega)$ — пространство, элементами которого являются функции $u(x)\in L_2(\Omega)$, имеющие обобщенные производные

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_\iota}\in L_2(\Omega)\quad (\iota=\overline{1,n}).$$

Скалярное произведение и норма определены соотношениями

$$(u,v)_\Omega^1=\int_\Omega\left(u(x)v(x)+\sum_{\iota=1}^n\frac{\partial u(x)}{\partial x_\iota}\frac{\partial v(x)}{\partial x_\iota}\right)dx,\quad \|u\|_\Omega^1=\sqrt{(u,u)_\Omega^1}. \tag{2}$$

Для сетеподобной области $\mathfrak{I}$ интеграл $\int_{\mathfrak{I}} u(x)dx$ определяется соотношением

$$\int_{\mathfrak{I}} u(x)dx=\sum_{l=1}^N\int_{\mathfrak{I}_l} u(x)dx.$$

Пространства $L_2(\mathfrak{I})$ и $W_2^1(\mathfrak{I})$ вводятся аналогично указанным выше, скалярные произведения и нормы пространств $L_2(\mathfrak{I})$ и $W_2^1(\mathfrak{I})$ определяются соотношениями

$$(u,v)_{\mathfrak{I}}=\sum_{l=1}^N\int_{\mathfrak{I}_l} u(x)v(x)dx,\quad \|u\|_{\mathfrak{I}}=\sqrt{(u,u)_{\mathfrak{I}}}, \tag{3}$$

$$(u,v)_{\mathfrak{I}}^1=\sum_{l=1}^N\int_{\mathfrak{I}_l}\left(u(x)v(x)+\sum_{\iota=1}^n\frac{\partial u(x)}{\partial x_\iota}\frac{\partial v(x)}{\partial x_\iota}\right)dx, \tag{4}$$

$$\|u\|_{\mathfrak{I}}^1=\sqrt{(u,u)_{\mathfrak{I}}^1}=\left(\sum_{l=1}^N\int_{\mathfrak{I}_l}\left(u^2(x)+\sum_{\iota=1}^n\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_\iota}\right)^2\right)dx\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{5}$$

вытекающими из соотношений (1), (2).

В дальнейшем будут введены пространства допустимых решений дифференциально-разностных систем со свойствами, описывающими условия примыкания в узловых местах ω_j, $j=\overline{1,M}$. Для этого необходимо получить условия продолжения функций $u(x)$ с области $\mathfrak{I}$ на

$$\overline{\mathfrak{I}}=\bigcup_{l=1}^N\overline{\mathfrak{I}}_l.$$

Введем в рассмотрение множество $C(\overline{\Omega})$ непрерывных в $\overline{\Omega}$ функций. Считаем, что для функции $u(x)\in C(\overline{\Omega})$ существует производная, непрерывная в замыкании $\overline{\Omega}$ области Ω, если эта производная продолжается по непрерывности с Ω на $\overline{\Omega}$ (топология на замыкании $\overline{\Omega}$ определяется топологией Ω). Исходя из сказанного, можно считать, что введено множество $C^1(\overline{\Omega})$ с элементами $u(x)$, для которых определены непрерывные производные

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_\iota}\ (\iota=1,2,\dots,n)\text{ в }\overline{\Omega},$$

при этом соотношением (1) в $C^1(\overline{\Omega})$ определяется скалярное произведение, а формулой (2) определяется норма.

Таким образом, для функций, определенных на замыкании $\overline{\mathfrak{I}}$ области $\mathfrak{I}$ сформированы следующие множества:

— $C\left(\overline{\mathfrak{I}}\right)$ — множество непрерывных в $\overline{\mathfrak{I}}$ функций $u(x)$, скалярное произведение и норма которых определяются соотношениями (3);

— $C^1\left(\overline{\mathfrak{I}}_l\right)\left(l=\overline{1, N}\right)$ — совокупность N-множеств функций $u(x)\in C\left(\overline{\mathfrak{I}}\right)$, имеющих непрерывные производные

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_\iota}\ (\iota = 1, 2, \dots, n)$$

в $\overline{\mathfrak{I}}_l$ для любого $l\left(l=\overline{1,N}\right)$;

— $C^1\left(\overline{\mathfrak{I}}\right)$ — множество функций $u(x)\in C^1\left(\overline{\mathfrak{I}}_l\right)\ \left(l=\overline{1, N}\right)$, для которых скалярное произведение и норма определены соотношениями (4) и (5) соответственно.

В наших дальнейших рассуждениях будет использоваться дифференциальное выражение

$$\mathcal{A}u := \sum_{\kappa,\iota=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_\kappa}\left(a_{\kappa\iota}(x)\frac{\partial u}{\partial x_\iota}\right),$$

определенное на функциях $u(x)$ некоторого подпространства пространства $L_2\left(\mathfrak{I}\right)$. Здесь $a_{\kappa\iota}(x)$ — ограниченные функции из пространства $L_2\left(\mathfrak{I}\right)$ (необходимые пояснения приведены ниже).

Обозначим через $\tilde{C}^1\left(\overline{\mathfrak{I}}\right)$ множество функций $u(x)\in C^1\left(\overline{\mathfrak{I}}\right)$, которые на поверхностях примыкания S_j, S_{js} $\left(s=\overline{2, m_j}\right)$ всех ω_j $\left(j=\overline{1, M}\right)$ связаны условиями примыкания

$$\int_{S_j}\frac{\partial u(x)}{\partial \nu_\Lambda}dS+\sum_{s=2}^{m_j}\int_{S_{js}}\frac{\partial u(x)}{\partial \nu_\Lambda}dS=0,\quad j=\overline{1, M}, \tag{6}$$

где

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \nu_\Lambda}=\sum_{\kappa,\iota=1}^{n}a_{\kappa\iota}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_\iota}\cos\left(\overline{n}, x_\kappa\right)$$

на S_j или S_{js}, $\cos\left(\overline{n}, x_\kappa\right)$ — к-й направляющий косинус внешней нормали $\overline{n} := \overline{n}(x)$ к границе $S_j\subset\partial\mathfrak{I}_j$ или $S_{js}\subset\partial\mathfrak{I}_{j_s}$ $\left(s=\overline{2, m_j}\right)$ соответственно (используются обозначения, принятые в монографии [Лионс, 1972а, с. 32]).

Определение 1. Пространство $\tilde{W}^1\left(\mathfrak{I}\right)$ — замыкание $\tilde{C}^1\left(\overline{\mathfrak{I}}\right)$ в норме, определенной соотношением (5).

Из определения вытекает основное свойство элементов $u(x)\in\tilde{W}^1\left(\mathfrak{I}\right)$: сужение $u(x)_{\mathfrak{I}_l}$ функции $u(x)$ на подобласть $\mathfrak{I}_l$ является элементом $W^1\left(\mathfrak{I}_l\right)$, $l=\overline{1, N}$. Кроме того, при учете $\mathfrak{I}_l\subset\mathfrak{I}$ $\left(l=\overline{1, N}\right)$ из существования обобщенных производных

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_\iota},\ \iota = 1, 2, \dots, n,$$

в $\mathfrak{I}$ вытекает существование этих производных в $\mathfrak{I}_l$.

Таким образом, элементы $u(x) \in \tilde{W}^1(\mathfrak{I})$ удовлетворяют условиям примыкания (6), и $\tilde{W}^1(\mathfrak{I})$ является пространством допустимых решений дифференциально-разностной системы. Пусть далее $\tilde{C}_0^1(\mathfrak{I})$ — множество элементов из $\tilde{C}^1(\overline{\mathfrak{I}})$, равных нулю на границе $\partial\mathfrak{I}$.

Определение 2. Пространство $\tilde{W}_0^1(\mathfrak{I})$ — замыкание $\tilde{C}_0^1(\mathfrak{I})$ в норме, определенной соотношением (5).

Пространства $\tilde{W}_0^1(\mathfrak{I}) \subset \tilde{W}^1(\mathfrak{I})$ и $\tilde{W}^1(\mathfrak{I})$ являются пространствами допустимых решений дифференциально-разностной системы. При анализе дифференциально-разностной системы с краевыми условиями Дирихле используется пространство $\tilde{W}_0^1(\mathfrak{I})$. Анализ той же системы с краевыми условиями общего типа осуществляется в пространстве $\tilde{W}^1(\mathfrak{I})$.

Дифференциально-разностная система

Определим дискретную сетку $\{k\tau,\ k = \overline{1, K}\}$, $\tau = T/K$, $K < \infty$, для отрезка $[0, T]$ и остановимся на анализе в пространстве $\tilde{W}_0^1(\mathfrak{I})$ дифференциально-разностной системы уравнений

$$\frac{1}{\tau}\left[y(k) - y(k-1)\right] - \frac{\partial}{\partial x_\kappa}\left(a_{\kappa\iota}(x)\frac{\partial y(k)}{\partial x_\iota}\right) + b(x)y(k) = f(k), \tag{7}$$

$$k = \overline{1, K}, \quad y(0) = \varphi(x);$$

где

$$y(k) := y(x; k),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\kappa}\left(a_{\kappa\iota}(x)\frac{\partial y(k)}{\partial x_\iota}\right) := \sum_{\kappa,\iota=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_\kappa}\left(a_{\kappa\iota}(x)\frac{\partial y(k)}{\partial x_\iota}\right),$$

$$f(k) := f(x; k),$$

$$k = 1, 2, \ldots, K.$$

При каждом фиксированном k ($k = 1, 2, \ldots, K$) функция $y(k) \in \tilde{W}_0^1(\mathfrak{I})$ удовлетворяет краевому условию

$$y(k)\big|_{x \in \partial\Gamma} = 0, \tag{8}$$

коэффициенты $a_{\kappa\iota}(x)$, $b(x)$ — измеримые ограниченные функции:

$$\begin{gathered} a_{\kappa\iota}(x) = a_{\iota\kappa}(x), \\ a_*\xi^2 \leqslant a_{\kappa\iota}(x)\xi_\kappa\xi_\iota \leqslant a^*\xi^2, \\ a_{\kappa\iota}(x)\xi_\kappa\xi_\iota = \sum_{\kappa,\iota=1}^{n} a_{\kappa\iota}(x)\xi_\kappa\xi_\iota, \\ \xi^2 = \sum_{\kappa=1}^{n}\xi_\kappa^2, \quad |b(x)| \leqslant \beta, \quad x \in \mathfrak{I}, \end{gathered} \tag{9}$$

постоянные a_*, a^*, β фиксированы, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, а также заданы исходные данные:

$$\varphi(x),\ f(k) \in L_2(\mathfrak{I}). \tag{10}$$

Следует отметить, что двухслойная аппроксимация

$$\frac{1}{\tau}\left[y(k)-y(k-1)\right]$$

производной $\dfrac{\partial y(x,t)}{\partial t}$ с погрешностью $O(\tau)$ может быть заменена на любую из трехслойных аппроксимаций, например

$$\frac{1}{\tau}\left[\frac{3}{2}y(k+1)-2y(k)+\frac{1}{2}y(k-1)\right]$$

с погрешностью $O(\tau^2)$.

Чтобы не утяжелять представляемый ниже анализ большими техническими сложностями, остановимся на дифференциально-разностной системе (7).

Определение 3. Если совокупность функций $y(k)\in \tilde{W}_0^1(\mathfrak{I})$ $(k = 1, 2,\ldots, K)$ удовлетворяет соотношениям

$$\int_{\mathfrak{I}} y(k)_t\,\eta(x)dx+\ell\big(y(k),\eta\big)=\int_{\mathfrak{I}} f(k)\eta(x)dx,$$
$$k=1,2,\ldots,K,$$

для произвольной функции $\eta(x)\in \tilde{W}_0^1(\mathfrak{I})$, то эта совокупность называется слабым решением системы (7), (8).

Здесь используются следующие обозначения:

$$y(k)_t=\frac{1}{\tau}\left[y(k)-y(k-1)\right],$$

$$\ell\big(y(k),\eta\big)=\int_{\mathfrak{I}}\left(\sum_{\kappa,\iota=1}^{n} a_{\kappa\iota}(x)\frac{\partial y(x;k)}{\partial x_\iota}\frac{\partial \eta(x)}{\partial x_\kappa}+b(x)y(x;k)\eta(x)\right)dx.$$

Замечание 1. Для фиксированного k $(k = 1, 2,\ldots, K)$ соотношения (7), (8) описывают краевую задачу относительно $y(k)\in \tilde{W}_0^1(\mathfrak{I})$.

Теорема 1. При достаточно малых τ и при выполнении условий (9), (10) дифференциально-разностная система (7), (8) слабо разрешима в $\tilde{W}_0^1(\mathfrak{I})$, решение ее единственно.

Доказательство. Имеет место свойство полноты и базисности системы обобщенных собственных функций оператора

$$\Lambda u:=\mathcal{A}u-b(x)u=\frac{\partial}{\partial x_\kappa}\left(a_{\kappa\iota}(x)\frac{\partial u}{\partial x_\iota}\right)-b(x)u$$

в пространстве $\tilde{W}_0^1(\mathfrak{I})$. Собственные значения Λ вещественные и расположены по возрастанию модулей с учетом кратностей: $\{\lambda_i\}_{i\geq 1}$, $\lambda_i \to -\infty$ при $i \to \infty$. Оператор Λ фредгольмов, т. е. для задачи $\Lambda u=\lambda u+g$, $g\in L_2(\Gamma)$, в $\tilde{W}_0^1(\mathfrak{I})$ имеют место теоремы альтернативы Фредгольма. Доказательство этих утверждений почти дословно повторяет рассуждения монографии [Ладыженская, 1973, с. 96].

При $k = 1$ в соотношении (7) и при $0 < \tau < \tau_0$ (τ_0 — достаточно малое) краевая задача

$$\Lambda y(1)=\frac{1}{\tau}y(1)-f(1)-\frac{1}{\tau}\varphi(x)$$

слабо разрешима относительно функции $y(1)\in \tilde{W}_0^1(\mathfrak{I})$, притом единственным образом. Такое же утверждение остается, если $k = 2$ в соотношении (7). Функция $y(2)$ определится единственным образом как слабое решение задачи

$$\Lambda y(2)=\frac{1}{\tau}y(2)-f(2)-\frac{1}{\tau}y(1)$$

по найденной выше $y(1)$. Полагая $k = 3, 4, \dots, K$, приходим к однозначному определению функций $y(3), y(4), \dots, y(K)$. Значение числа τ_0 указано в приведенных ниже утверждениях. Теорема доказана.

Получим оценки в $L_2(\mathfrak{I})$ норм

$$\| y(k)\|_{\mathfrak{I}} \text{ и } \|\frac{\partial y(k)}{\partial x}\|_{\mathfrak{I}} =\left(\int_{\mathfrak{I}}\sum_{\iota=1}^{n}\left(\frac{\partial y(x;k)}{\partial x_\iota}\right)^2 dx\right)^{1/2},\ k=1,2,\dots,K,$$

не зависящие от τ. Введем обозначение

$$\| f(k)\|_{2,1,\mathfrak{I}}=\tau\sum_{s=1}^{k}\| f(s)\|_{\mathfrak{I}}.$$

Теорема 2. Если выполнены условия теоремы 1, то при $\tau \le \tau_0 < \dfrac{1}{4\beta}$ для функций $y(k)$, $k = 1, 2, \dots, K$, имеют место следующие оценки норм:

$$\| y(k)\|_{\mathfrak{I}} \le e^{4\beta T}\left(\|\varphi\|_{\mathfrak{I}}+2\| f(k)\|_{2,1,\mathfrak{I}}\right),\quad k=1,2,\dots,K, \tag{11}$$

$$\| y(m)\|_{\mathfrak{I}}^2+2a_*\tau\sum_{k=1}^{m}\|\frac{\partial y(k)}{\partial x}\|_{\mathfrak{I}}^2+\tau^2\sum_{k=1}^{m}\| y(k)_t\|_{\mathfrak{I}}^2 \le C\left(\|\varphi\|_{\mathfrak{I}}^2+\| f(m)\|_{2,1,\mathfrak{I}}^2\right),\quad 1\le m\le K, \tag{12}$$

$C > 0$ зависит только от заданных a_*, β, T.

Доказательство. Приведем рассуждения, аналогичные представленным в работе [Ладыженская, 1973, с. 189] (см. также [Лионс, 1972б]).

Несложные преобразования равенства $\tau y(k)_t = y(k) - y(k-1)$ приводят к равенству

$$y(k-1)^2=\left(y(k)-\tau y(k)_t\right)^2=y(k)^2+\tau^2 y(k)_t^2-2\tau y(k)\,y(k)_t,$$

из которого вытекает соотношение

$$2\tau y(k)\,y(k)_t=y(k)^2+\tau^2\left(y(k)_t\right)^2-y(k-1)^2. \tag{13}$$

В интегральном соотношении определения 3 заменим $\eta(x)$ на $2\tau y(k)$. В силу соотношений (9), (13) получим неравенство

$$\int_{\mathfrak{J}} y(k)^2\,dx-\int_{\mathfrak{J}} y(k-1)^2\,dx+\tau^2\int_{\mathfrak{J}}\left(y(k)_t\right)^2 dx+2a_*\tau\int_{\mathfrak{J}}\left(\frac{\partial y(k)}{\partial x}\right)^2 dx\le$$
$$\le -2\tau\int_{\mathfrak{J}} b(x)\,y(k)^2\,dx+2\tau\int_{\mathfrak{J}} f(k)\,y(k)\,dx,$$

учитывая представление нормы (3) в $L_2(\mathfrak{J})$,

$$\|y(k)\|_{\mathfrak{J}}^2-\|y(k-1)\|_{\mathfrak{J}}^2+\tau^2\|y(k)_t\|_{\mathfrak{J}}^2+2a_*\tau\left\|\frac{\partial y(k)}{\partial x}\right\|_{\mathfrak{J}}^2\le$$
$$\le\rho\tau\|y(k)\|_{\mathfrak{J}}^2+2\tau\|f(k)\|_{\mathfrak{J}}\|y(k)\|_{\mathfrak{J}}, \qquad (14)$$

где $\rho=2\beta$. Из неравенства (14) следует

$$\|y(k)\|_{\mathfrak{J}}^2-\|y(k-1)\|_{\mathfrak{J}}^2\le\rho\tau\|y(k)\|_{\mathfrak{J}}^2+2\tau\|f(k)\|_{\mathfrak{J}}\|y(k)\|_{\mathfrak{J}}. \qquad (15)$$

Исходя из равенства

$$\|y(k)\|_{\mathfrak{J}}^2-\|y(k-1)\|_{\mathfrak{J}}^2=$$
$$=\left(\|y(k)\|_{\mathfrak{J}}-\|y(k-1)\|_{\mathfrak{J}}\right)\left(\|y(k)\|_{\mathfrak{J}}+\|y(k-1)\|_{\mathfrak{J}}\right),$$

рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть $\|y(k)\|_{\mathfrak{J}}+\|y(k-1)\|_{\mathfrak{J}}>0$. Поделив обе части (15) на выражение $\|y(k)\|_{\mathfrak{J}}+\|y(k-1)\|_{\mathfrak{J}}$, получим неравенство

$$\|y(k)\|_{\mathfrak{J}}\le\frac{1}{1-\rho\tau}\|y(k-1)\|_{\mathfrak{J}}+\frac{2\tau}{1-\rho\tau}\|f(k)\|_{\mathfrak{J}} \qquad (16)$$

с условием, что $\tau\le\tau_0<\frac{1}{2\rho}$. При этом учитывается очевидное неравенство

$$\frac{\|y(k)\|_{\mathfrak{J}}}{\|y(k)\|_{\mathfrak{J}}+\|y(k-1)\|_{\mathfrak{J}}}\le 1.$$

Случай 2. Пусть $\|y(k)\|_{\mathfrak{J}}+\|y(k-1)\|_{\mathfrak{J}}>0$ при некоторых k из множества $\{1,2,\dots,K\}$. Тогда из (15) вытекает $0\le\rho\tau\|y(k)\|_{\mathfrak{J}}^2+2\tau\|f(k)\|_{\mathfrak{J}}\|y(k)\|_{\mathfrak{J}}$, что снова дает неравенство (16).

Свойство рекуррентности неравенства (16) приводит к неравенству

$$\|y(k)\|_{\mathfrak{J}}\le\frac{1}{1-\rho\tau}\|y(k-1)\|_{\mathfrak{J}}+\frac{2\tau}{1-\rho\tau}\|f(k)\|_{\mathfrak{J}}\le$$
$$\le\frac{1}{(1-\rho\tau)^k}\|y(0)\|_{\mathfrak{J}}+2\tau\sum_{s=1}^{k}\frac{1}{(1-\rho\tau)^{k-s+1}}\|f(s)\|_{2,\mathfrak{J}},$$

а учитывая неравенства

$$\frac{\rho\tau}{1-\rho\tau}k \le \frac{\rho T}{1-\rho\tau} \le 2\rho T \text{ при } \tau < \frac{1}{2\rho} \text{ и } \frac{1}{(1-\rho\tau)^k} \le e^{2\rho T},$$

получаем

$$\frac{1}{(1-\rho\tau)^k}\|y(0)\|_{\Im} + 2\tau\sum_{s=1}^{k}\frac{1}{(1-\rho\tau)^{k-s+1}}\|f(s)\|_{2,\Im} \le$$
$$\le \frac{1}{(1-\rho\tau)^k}\left(\|y(0)\|_{\Im} + 2\tau\sum_{s=1}^{k}\|f(s)\|_{\Im}\right) \le$$
$$\le e^{2\rho T}\left(\|y(0)\|_{\Im} + 2\|f(k)\|_{2,1,\Im}\right)$$

и, в свою очередь, неравенство

$$\|y(k)\|_{\Im} \le e^{2\rho T}\left(\|y(0)\|_{\Im} + 2\|f(k)\|_{2,1,\Im}\right),$$

из которого вытекает оценка (11), т. к. $\rho = 2\beta$ и $y(0) = \varphi(x)$.

Покажем справедливость оценки (12). Для этого просуммируем (14) по k от 1 до $m \le K$, учитывая оценку (11), и получим неравенство

$$\|y(m)\|^2_{\Im} + 2a_*\tau\sum_{k=1}^{m}\|\frac{\partial y(k)}{\partial x}\|^2_{\Im} + \tau^2\sum_{k=1}^{m}\|y(k)_t\|^2_{\Im} \le$$
$$\le C\left(\|\varphi\|^2_{\Im} + \|f(m)\|^2_{2,1,\Im}\right), \quad k = 1, 2, \dots, K,$$

где $1 \le m \le K$, $C > 0$ зависит только от заданных a_*, β, T и не зависит от τ. Тем самым показано неравенство (12). Теорема доказана.

Следующее утверждение является следствием из теоремы 2.

Теорема 3. Если выполнены условия (9), (10), то при $\tau \le \tau_0 < \frac{1}{4\beta}$ слабое решение системы (7), (8) непрерывно зависит в нормах пространств $L_2(\Im)$ и $W_2^1(\Im)$ от исходных данных $\varphi(x)$, $f(k)$ $(k = 1, 2, \dots, K)$.

Доказательство слабой разрешимости дифференциальной системы (начально-краевой задачи), соответствующей дифференциально-разностной системе (7), (8), существенно опирается на результаты теорем 2 и 3.

Дифференциальная система

Предварительно введем пространство состояний $\tilde{W}_0^{1,0}(\Im_T)$ дифференциальной системы и вспомогательное пространство $\tilde{W}_0^1(\Im_T)$, $\Im_T = \Im\times(0,T)$, $T < \infty$.

Определение 4. Пространство $\tilde{W}_0^{1,0}(\Im_T)$ — замыкание в норме

$$\|y\|^{1,0}_{\Im_T} = \left(\sum_{k=1}^{N}\int_{\Im_k\times(0,T)}\left(y^2 + \sum_{\iota=1}^{n} y^2_{x_\iota}\right)dxdt)\right)^{1/2},$$

совокупности функций $y(x,t)$ из $L_2(\mathfrak{I})$, следы которых $y(x,t_0)\in \tilde{W}_0^1(\mathfrak{I})$, $t_0\in(0,T)$, непрерывно зависят от t_0 в норме $W_2^1(\mathfrak{I})$.

Определение 5. Если в определении 4 норму $\|y\|_{\mathfrak{I}_T}^{1,0}$ заменить на норму

$$\|y\|_{\mathfrak{I}_T}^{1}=\left(\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{\mathfrak{I}_k\times(0,T)}\left(y^2+y_t^2+\sum_{\iota=1}^{n}y_{x_l}^2\right)dxdt)\right)^{1/2},$$

то тем самым определим пространство $\tilde{W}_0^1(\mathfrak{I}_T)$; $\tilde{W}_0^1(\mathfrak{I}_T)\subset\tilde{W}_0^{1,0}(\mathfrak{I}_T)$.

В пространстве $\tilde{W}_0^{1,0}(\mathfrak{I}_T)$, учитывая условия (9), (10), будем искать решение $y(x,t)$ дифференциальной системы (начально-краевой задачи):

$$\frac{\partial y}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x_\kappa}\left(a_{\kappa\iota}(x)\frac{\partial y}{\partial x_\iota}\right)+b(x)y=f(x,t), \tag{17}$$

$$y|_{t=0}=\varphi(x), \tag{18}$$

$$y|_{x\in\partial\Gamma_T}=0, \tag{19}$$

где $f(x,t)\in L_{2,1}(\mathfrak{I}_T)$.

Элементы $u(x,t)\in L_{2,1}(\mathfrak{I}_T)$ принадлежат

$$L_1(\mathfrak{I}_T),\ \|u\|_{2,1,\mathfrak{I}_T}=\int\limits_0^T\left(\int\limits_{\mathfrak{I}}u^2(x,t)dx\right)^{1/2}dt;$$

функции $f(x;k)$ $(k = 1, 2, \dots, K)$ из (7) являются усреднениями $f(x,t)$ в точках $t = k\tau$ сетки $\left\{k\tau, k=\overline{1,K}\right\}$:

$$f(x;k)=\frac{1}{\tau}\int\limits_{(k-1)\tau}^{k\tau}f(x,t)dt\in L_2(\mathfrak{I}),\ k=1,2,\dots,K.$$

Определение 6. Функция $y(x,t)\in\tilde{W}_0^{1,0}(\mathfrak{I}_T)$ называется слабым решением дифференциальной системы (17)–(19), если справедливо соотношение (интегральное тождество)

$$-\int\limits_{\mathfrak{I}_T}y(x,t)\frac{\partial\eta(x,t)}{\partial t}dxdt+\ell_T(y,\eta)=$$
$$=\int\limits_{\mathfrak{I}}\varphi(x)\eta(x,0)dx+\int\limits_{\mathfrak{I}_T}f(x,t)\eta(x,t)dxdt,$$

при любой $\eta(x,t)\in\tilde{W}_0^1(\mathfrak{I}_T)$, $\eta(x,T)=0$,

$$\ell_T(y,\eta)=\int\limits_{\mathfrak{I}_T}\left(\sum_{\kappa,\iota=1}^{n}a_{\kappa\iota}(x)\frac{\partial y(x,t)}{\partial x_\iota}\frac{\partial\eta(x,t)}{\partial x_\kappa}+b(x)y(x,t)\eta(x,t)\right)dxdt.$$

Теорема 4. Если выполнены условия (9), (10), то дифференциальная система (17)–(19) слабо разрешима в $\tilde{W}_0^{1,0}(\mathfrak{I}_T)$.

Доказательство. Очевидно, что дифференциально-разностная система (7), (8) является разностным аналогом дифференциальной системы (17)–(19), поэтому далее будут использованы решения системы (7), (8). Введем функцию $y_K(x,t)$: $y_K(x,t)=y(k)$, $t\in\big((k-1)\tau,k\tau\big]$, $k=1,2,\ldots,K$, $y_K(x,t)\in\tilde{W}_0^{1,0}(\mathfrak{I}_T)$, которая удовлетворяет неравенствам (11), (12) и, как следствие, имеет место неравенство

$$\|y_K\|_{\mathfrak{I}_T}+\|\frac{\partial y_K}{\partial x}\|_{\mathfrak{I}_T}\le C^* \tag{20}$$

с независящей от τ постоянной $C^*>0$,

$$\|\frac{\partial y_K}{\partial x}\|_{\mathfrak{I}_T}=\left(\int\limits_{\mathfrak{I}_T}\sum_{\iota=1}^{n}\left(\frac{\partial y_K(x,t)}{\partial x_\iota}\right)^2dx\right)^{1/2}.$$

Учитывая (20), из последовательности $\{y_K(x,t)\}$ выделим подпоследовательность $\{\tilde{y}_K(x,t)\}$, которая будет слабо сходится к $y(x,t)\in\tilde{W}_0^{1,0}(\mathfrak{I}_T)$.

Покажем, что $y(x,t)$ удовлетворяет тождеству определения 6. Для этого $f(x,t)$ представим в виде, подобном виду $y_K(x,t)$: $f_K(x,t)=f(x;k)$, $t\in\big((k-1)\tau,k\tau\big]$ $(k=1,2,\ldots,K)$. Произвольные функции $\eta(x,t)$ можно взять из пространства $C^1(\mathfrak{I}_{T+\tau})$ с условиями $\eta|_{\partial\mathfrak{I}_T}=0$, $\eta|_{t\in[T,T+\tau]}=0$. По этим $\eta(x,t)$ строятся $\eta(k)$: $\eta(k)=\eta(x,k\tau)$, $k=1,2,\ldots,K$, и функции $\eta_K(x,k)=\eta(k)$, $t\in\big((k-1)\tau,k\tau\big]$ $(k=1,2,\ldots,K)$. Ясно, что $\eta_K(x,t)\in\tilde{W}_0^1(\mathfrak{I}_T)$.

По $\eta_K(x,t)$ строятся кусочно-непрерывные по t функции

$$\frac{\partial\eta_K(x,t)}{\partial x},\ \frac{\partial\eta_K(x,t)}{\partial t},$$

которые, как легко видеть, вместе с $\eta_K(x,t)$ при $K\to\infty$ сходятся к

$$\eta(x,t),\ \frac{\partial\eta(x,t)}{\partial x},\ \frac{\partial\eta(x,t)}{\partial t}$$

равномерно в $\mathfrak{I}_T$.

Доказательство теоремы завершается заменой в тождестве определения 6 $y(x,t)$, $f(x,t)$, $\eta(x,t)$ на $y_K(x,t)$, $f_K(x,t)$, $\eta_K(x,t)$ с последующим переходом в этом тождестве к пределу по подпоследовательности $\{\tilde{y}_K(x,t)\}$ (см. также [Ладыженская, 1973, с. 189]).

Пример: линеаризованная система Навье — Стокса

В качестве иллюстрации используемого подхода и результатов теорем 2 и 3 для вектор-функции

$$Y(x,t)=\{y_1(x,t),y_2(x,t),y_3(x,t)\},$$

$$x,t\in\mathfrak{I}_T=\mathfrak{I}\times(0,T),$$

$$\mathfrak{I}\subset\mathbb{R}^3\left(\mathfrak{I}=\bigcup_{l=1}^{N}\mathfrak{I}_l\right),\ x=\{x_1,x_2,x_3\},$$

рассмотрим линеаризованную систему Навье — Стокса (используются общепринятые в литературе обозначения, см. например, [Лионс, 1972а, с. 383] и библиографию там):

$$\frac{\partial Y}{\partial t}-\nu\Delta Y+\operatorname{grad}p=F(x,t), \tag{21}$$

$$\operatorname{div}Y=0\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial Y}{\partial x_i}=0\right). \tag{22}$$

Условия примыкания подобластей $\Im_l$, $l=\overline{1,N}$, между собой во всех узловых местах ω_j, $j=\overline{1,M}$, описываются соотношениями

$$Y(x,t)\big|_{x\in S_{js}\subset S_j\subset\partial\Im_{l_1}}=Y(x,t)\big|_{x\in S_{js}\subset\partial\Im_{l_s}},\quad s=\overline{2,m_j}, \tag{23}$$

$$\int_{S_j}\frac{\partial Y(x,t)}{\partial\overline{n}_j}dS+\sum_{s=2}^{m_j}\int_{S_{js}}\frac{\partial Y(x,t)}{\partial\overline{n}_{js}}dS=0 \tag{24}$$

на поверхностях примыкания S_j и $S_{j\iota}$, $\iota=\overline{2,m_j}$, $j=\overline{1,M}$, для произвольного $t\in(0,T)$ (см. аналогичные условия (6) и пояснения для поверхностей S_j, $S_{j\iota}$, приведенные в разделе 2);

$$\Delta Y=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 Y}{\partial x_i^2},$$

через $\overline{n}_j$ и $\overline{n}_{js}$ обозначены внешние нормали к S_j и S_{js}, $s=\overline{2,m_j}$, $j=\overline{1,M}$, $F(x,t)=\{F_1(x,t), F_2(x,t), F_3(x,t)\}$.

Начальные и граничные условия

$$Y(x,t)\big|_{t=0}=Y_0(x),\ x\in\Im, \tag{25}$$

$$Y(x,t)\big|_{x\in\partial\Im}=0 \tag{26}$$

вместе с соотношениями (21)–(24) определяют начально-краевую задачу (21)–(26) для функций $Y(x,t)$, $p(x,t)$ (везде ниже дифференциальная система (21)–(26)) в замкнутой области $\overline{\Im}_T$:

$$\overline{\Im}_T=(\Im\cup\partial\Im)\times[0,T].$$

При математическом описании процессов транспортировки вязких жидкостей по сетевой или магистральной гидросистеме область $\Im$ является ограниченной областью евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ и определяет модель сетеподобного носителя гидравлического потока. Вектор скоростей гидравлического потока характеризуется функцией $Y(x,t)$ эволюционной системы Навье — Стокса (21)–(24), моделирующей течение жидкости с вязкостью $\nu>0$ по сетеподобному носителю под влиянием внешних воздействий $F(x,t)$, при этом соотношения (23), (24) определяют свойства потоков жидкости при протекании ее по местам ветвления носителя (аналогичные условия приведены в работах [Artemov и др., 2019; Provotorov, Provotorova, 2017]). Функцией $p(x,t)$ характеризуется давление в гидросистеме (во многих задачах прикладного характера задана; везде ниже считается принадлежащей классу непрерывных в $\overline{\Im}_T$ функций).

Анализ разрешимости дифференциальной системы (21)–(26) базируется на исследовании дифференциально-разностной системы вида:

$$\frac{1}{\tau}\left[Y(k)-Y(k-1)\right]-\nu\Delta Y(k)=F_\tau(k)-\operatorname{grad} p_\tau(k),$$
$$\operatorname{div}Y(k)=0,\quad k=1,2,\dots,K,\quad Y(0)=Y_0(x), \tag{27}$$

$$Y(k)\big|_{x\in\partial\mathfrak{I}}=0,\quad k=1,2,\dots,K. \tag{28}$$

Использованы обозначения, аналогичные для систем (7), (8) и (17)–(19):

$$Y(k):=Y(x;k),$$

$$Y(k)_t:=\frac{1}{\tau}\left[Y(k)-Y(k-1)\right],$$

$$F_\tau(k):=F_\tau(x;k)=\frac{1}{\tau}\int\limits_{(k-1)}^{k\tau}F(x,t)dt,$$

$$p(k):=p(x,k\tau),$$

$$k=1,2,\dots,K.$$

Для анализа системы (27), (28) введем необходимые пространства, аналогичные выше использованным пространствам $L_2(\mathfrak{I}), \tilde{W}_0^1(\mathfrak{I})$. Обозначим через $L_2(\mathfrak{I})^3$ лебегово пространство действительных вектор-функций

$$u(x)=\{u_1(x),u_2(x),u_3(x)\},\quad x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3,$$

со скалярным произведением и нормой

$$(u,\nu)=\int\limits_{\mathfrak{I}}u(x)\nu(x)dx,\ \ \|u\|=\sqrt{(u,u)}\ \text{соответственно.}$$

Пусть $D(\mathfrak{I})^3$ — множество бесконечно дифференцируемых функций $u(x)$ с компактными носителями в $\mathfrak{I}$, для которых $\operatorname{div}u=0$: $\mathfrak{D}(\mathfrak{I})^3=\{u:u\in D(\mathfrak{I})^3,\operatorname{div}u=0\}$, и пространство $\mathcal{H}(\mathfrak{I})^3$ — замыкание $\mathfrak{D}(\mathfrak{I})^3$ в $L_2(\mathfrak{I})^3$. Пространство $\mathcal{H}^1(\mathfrak{I})^3$ определяется функциями $u(x)\in\mathcal{H}(\mathfrak{I})^3$, имеющими обобщенные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x}\in L_2(\mathfrak{I})^3.$$

Скалярное произведение и норма в $\mathcal{H}^1(\mathfrak{I})$ определены соотношениями

$$(u,v)_1=(u,v)+\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}\right),\ \ \|u\|=\sqrt{(u,u)_1}\ \text{соответственно.}$$

Замыкание в $\mathcal{H}^1(\mathfrak{I})$ множества всех функций $u\in D(\mathfrak{I})^3$, удовлетворяющих условиям

$$\int\limits_{S_j}\frac{\partial u(x)}{\partial\overline{n}_j}dS+\sum_{s=2}^{m_j}\int\limits_{S_{js}}\frac{\partial u(x)}{\partial\overline{n}_{js}}dS=0$$

на поверхностях примыкания S_j и $S_{js}\subset\partial\mathfrak{I}_{j_s}\left(s=\overline{2,m_j}\right)$ всех узловых мест ω_j $(j=\overline{1,M})$, назовем пространством $V_0^1(\mathfrak{I})$.

Определение 7. Совокупность $\left\{Y(k)\in V_0^1(\Im),\, k=1,2,\ldots,K\right\}$, для которой при каждом фиксированном k $(k = 1, 2, \ldots, K-1)$ функция $Y(k)$ удовлетворяет тождеству

$$\frac{1}{\tau}\left(Y(k)_t,\eta\right)+\nu\rho\left(Y(k),\eta\right)=\left(F_\tau(k),\eta\right),\; Y(0)=Y_0(x), \tag{29}$$

с произвольными элементами $\eta(x)$ пространства $V_0^1(\Im)$, называется слабым решением дифференциально-разностной системы (27), (28). Здесь

$$\rho\left(Y(k),\eta\right)=\sum_{i,j=1}^{3}\int_{\Im}\frac{\partial Y_j(k)}{\partial x_i}\frac{\partial\eta_j}{\partial x_i}dx.$$

Ниже представлены априорные оценки слабых решений дифференциально-разностной системы (27), (28), которые используются при получении условий слабой разрешимости системы (21)–(26). В основу анализа положен подход, отличающийся от представленного при доказательстве теоремы 2. А именно: используется метод Галеркина для представления функций $Y(k)\in V_0^1(\Im)$, $k = 1, 2, \ldots, K$, в виде разложений по базису пространства $V_0^1(\Im)$, каковым является система обобщенных собственных функций $\{U_i(x)\}_{i\geq 1}$ оператора

$$\Delta Y=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 Y}{\partial x_i^2}.$$

Обобщенные собственные функции $U(x)\in V_0^1(\Im)$ определяются спектральной задачей $-\nu\Delta U=\lambda U,\; U\,|_{\partial\Im}=0$, в слабой постановке, т. е. удовлетворяют интегральному тождеству

$$\nu\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial U}{\partial x_i},\frac{\partial\eta}{\partial x_i}\right)=\lambda(U,\eta)$$

при любой функции $\eta(x)\in V_0^1(\Im)$ (λ — собственное значение, соответствующее обобщенной собственной функции $U(x)$).

Определим приближения $Y_m(k)$ для функций $Y(k)$, $k = 1, 2, \ldots, K$, слабого решения дифференциально-разностной системы (27), (28) в виде

$$Y_m(k)=\sum_{i=1}^{m}g_{im}^{k}\,U_i(x)$$

и, учитывая соотношение (29), рассмотрим систему

$$\frac{1}{\tau}\left(Y_m(k)_t,U_i\right)+\nu\rho\left(Y_m(k),U_i\right)=\left(F_\tau(k),U_i\right), \tag{30}$$

$$\begin{gathered}k=1,2,\ldots,K,\quad i=1,2,\ldots,m,\\ Y_m(0)=Y_{0m}(x),\end{gathered} \tag{31}$$

где $Y_{0m}(x)=\sum_{i=1}^{m}g_{im}^{0}\,U_i(x)$ (g_{im}^{0} — const), $Y_{0m}(x)\to Y_0(x)$ в норме $V_0^1(\Im)$.

Теорема 5. Пусть $Y_0(x) \in V_0^1(\Im)$, $F_\tau(k) \in L_2(\Im)^n$ $(k = 1, 2, \dots, K)$. Для функций $Y_m(K)$, $k = 1, 2, \dots, K$, системы (30), (31) справедливы оценки:

1) $\| Y_m(k) \| \le \| Y_m(0) \| + 2 \| F_\tau(k) \|'_{2,1}$, $k = 1, 2, \dots, K$;

2) $\| Y_m(k) \|^2 + 2\tau\nu \sum\limits_{k'=1}^{k} \| \dfrac{\partial Y_m(k')}{\partial x} \|^2 \le C\left(\| Y_0 \|^2 + \left(\| F_\tau(k) \|'_{2,1} \right)^2 \right)$, $k = 1, 2, \dots, K$, с постоянной C, не зависящей от τ;

$$\| F_\tau(k) \|'_{2,1} = \sum_{k'=1}^{k} \tau \| F_\tau(k') \|.$$

Доказательство. Аналогично рассуждениям, приведенным при доказательстве теоремы 2, учитывая соотношение $2\tau\left(Y(k), Y(k)_t\right) = Y^2(k) + \tau^2 Y(k)_t^2 - Y^2(k-1)$, умножим (30) на $2\tau g_{i,m}^k$ и результат просуммируем по i от 1 до m. Получим

$$Y_m^2(k) - Y_m^2(k-1) + \tau^2 Y_m^2(k)_t +$$
$$+ 2\tau\nu\rho\left(Y_m(k), Y_m(k)\right) = 2\tau\left(F_\tau(k), Y_m(k)\right),$$

$$k = 1, 2, \dots, K,$$

откуда вытекают неравенства

$$\begin{aligned} &\| Y_m(k) \|^2 - \| Y_m(k-1) \|^2 + \tau^2 \| Y_m(k)_t \|^2 + 2\tau\nu \| \frac{\partial Y_m(k)}{\partial x} \|^2 \le \\ &\le 2\tau \| F_\tau(k) \| \, \| Y_m(k) \|, \quad k = 1, 2, \dots, K, \end{aligned} \tag{32}$$

а значит,

$$\| Y_m(k) \|^2 - \| Y_m(k-1) \|^2 \le 2\tau \| F_\tau(k) \| \, \| Y_m(k) \|, \quad k = 1, 2, \dots, K. \tag{33}$$

Предположим, что $\| Y_m(k) \| + \| Y_m(k-1) \| > 0$, тогда разделив соотношение (33) на $\| Y_m(k) \| + \| Y_m(k-1) \|$, приходим к неравенствам

$$\| Y_m(k) \| - \| Y_m(k-1) \| \le 2\tau \| F_\tau(k) \|, \quad k = 1, 2, \dots, K, \tag{34}$$

учитывая
$$\frac{\| Y_m(k) \|}{\| Y_m(k) \| + \| Y_m(k-1) \|} \le 1.$$

В случае если $\| Y_m(k) \| + \| Y_m(k-1) \| = 0$, тогда из (33) получаем

$$0 \le 2\tau \| F_\tau(k) \| \, \| Y_m(k) \|,$$

$$\| Y_m(k) \|^2 - \| Y_m(k-1) \|^2 \le 2\tau \| F_\tau(k) \| \, \| Y_m(k) \|, \quad k = 1, 2, \dots, K,$$

что снова приводит к (34).

Суммируя (34) по k' от 1 до k, окончательно получим

$$\begin{aligned} &\| Y_m(k) \| \le \| Y_m(0) \| + 2 \sum_{k'=1}^{k} \tau \| F_\tau(k') \| = \| Y_0 \| + 2 \| F_\tau(k) \|'_{2,1}, \\ &k = 1, 2, \dots, K, \end{aligned} \tag{35}$$

а значит, первое утверждение теоремы с учетом представления:

$$\| F_\tau(k)\|'_{2,1} = \sum_{k'=1}^{k} \tau \| F_\tau(k')\|.$$

Второе утверждение теоремы получим, если, используя (35), суммировать неравенства (32) по k' от 1 до k:

$$\begin{gathered} \| Y_m(k)\|^2 + 2\tau\nu \sum_{k'=1}^{k} \| \frac{\partial Y_m(k')}{\partial x}\|^2 \le \| Y_m(k)\|^2 + \tau^2 \sum_{k'=1}^{k} \| Y_m(k)_t\|^2 + \\ + 2\tau\nu \sum_{k'=1}^{k} \| \frac{\partial Y_m(k')}{\partial x}\| \le C\left(\| Y_0\|^2 + \left(\| F_\tau(k)\|'_{2,1}\right)^2\right), \quad k = 1, 2, \dots, K, \end{gathered} \tag{36}$$

где не зависящая от τ постоянная C зависит только от ν и T.

Покажем, что оценки (35), (36) определяют условия разрешимости дифференциальной системы (21)–(26).

Пусть исходные данные $Y_0(x)$, $F(x,t)$ системы (21)–(26) принадлежат пространствам $V_0^1(\mathfrak{I})$, $L_{2,1}(\mathfrak{I}_T)^3$ соответственно. Элементы $u \in L_{2,1}(\mathfrak{I}_T)^3$ принадлежат $L_1(\mathfrak{I}_T)^3$, при этом норма в $L_{2,1}(\mathfrak{I}_T)^3$ определяется формулой

$$\| u\|_{2,1} = \int_0^T \left(\int_{\mathfrak{I}} \| u\|^2 \, dx \right)^{1/2} dt,$$

что означает принадлежность $F_\tau(k)$ пространству $L_2(\mathfrak{I})^3$.

Через $W^{1,0}(\mathfrak{I}_T)$ обозначим пространство, элементы которого $u(x,t)$ и их обобщенные производные $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ принадлежат

$$L_2(\mathfrak{I}_T)^3, \ \| u\|_{W^{1,0}(\mathfrak{I}_T)} = \left(\| u\|^2 + \| \frac{\partial u}{\partial x}\|^2 \right)^{1/2}.$$

Пусть далее $W^1(\mathfrak{I}_T)$ — пространство, элементы которого $u(x,t)$ и $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ принадлежат

$$L_2(\mathfrak{I}_T)^3, \ \| u\|_{W^1(\mathfrak{I}_T)} = \left(\| u\|^2 + \| \frac{\partial u}{\partial t}\|^2 + \| \frac{\partial u}{\partial x}\|^2 \right)^{1/2}.$$

Пространства $W^{1,0}(\mathfrak{I}_T)$ и $W^1(\mathfrak{I}_T)$ обладают следующими общими свойствами:

1) их элементы непрерывны по t в норме $L_2(\mathfrak{I})^3$;
2) следы их элементов на сечениях $\mathfrak{I}_T$ плоскостями $t = t_0 \in (0, T)$ принадлежат $L_2(\mathfrak{I})^3$.

Введем множества $\Omega_1(\mathfrak{I}_T) \subset W^{1,0}(\mathfrak{I}_T)$ и $\Omega_2(\mathfrak{I}_T) \subset W^1(\mathfrak{I}_T)$, элементы которых принадлежат $V_0^1(\mathfrak{I})$ при фиксированном $t \in (0, T)$. Замыкания $\Omega_1(\mathfrak{I}_T)$ в $W^{1,0}(\mathfrak{I}_T)$ и $\Omega_2(\mathfrak{I}_T)$ в $W^1(\mathfrak{I}_T)$ обозначим через $W_0^{1,0}(\mathfrak{I}_T)$ и $W_0^1(\mathfrak{I}_T)$.

Определение 8. Пара

$$\left\{Y(x,t),\ p(x,t):\ Y(x,t)\in W_0^{1,0}\left(\mathfrak{I}_T\right),\ p(x,t)\in C\left(\mathfrak{I}_T\right)\right\}$$

называется слабым решением дифференциальной системы Навье — Стокса (21)–(26), если для функции $Y(x,t)$ справедливо тождество

$$\begin{gathered}-\int_{\mathfrak{I}_T} Y(x,\tau)\frac{\partial\eta(x,\tau)}{\partial\tau}dxd\tau+\nu\int_0^T\rho(Y,\eta)d\tau=\\=\left(Y_0(x),\eta(x,0)\right)+\int_{\mathfrak{I}_T}F(x,\tau)\eta(x,\tau)dxd\tau\end{gathered}\tag{37}$$

при любой функции $\eta(x,t)$ из $W_0^1\left(\mathfrak{I}_T\right)$, причем $\eta(x,T)=0$.

Замечание 2. Из определения 2 следует, что отыскание решения $Y(x,t)$ системы (21)–(26) является первичным, для функции $p(x,t)$ достаточно знать принадлежность ее классу $C\left(\mathfrak{I}_T\right)$. Отметим также, что во многих прикладных задачах $p(x,t)$ считается известной.

Теорема 6. Пусть $Y_0(x)\in V_0^1(\mathfrak{I})$, $F(x,t)\in L_{2,1}(\mathfrak{I}_T)^n$. Эволюционная система Навье — Стокса (21)–(24) с условиями (25), (26) (т. е. начально-краевая задача (21)–(26)) слабо разрешима в пространстве $W_0^{1,0}\left(\mathfrak{I}_T\right)$.

Доказательство. Используя приближения

$$Y_m(k)=\sum_{i=1}^m g_{i,m}^k U_i(x)$$

для функций $Y(k)$, $k=1,2,\ldots,K$, введем функцию $Y_K(x,t)$ вида $Y_K(x,t)=Y_m(k)$, $t\in\left((k-1)\tau,k\tau\right]$, $k=1,2,\ldots,K$, $Y_K(x,0)=Y_0(x)$. Ясно, что $Y_K(x,t)$ принадлежит пространству $W_0^{1,0}\left(\mathfrak{I}_T\right)$. Для функции $Y_K(x,t)$ справедливы утверждения теоремы 3 (неравенства (35), (36)) и, следовательно, неравенство

$$\|Y_K\|+\|\frac{\partial Y_K}{\partial x}\|\le C^*\tag{38}$$

с не зависящей от τ постоянной $C^*>0$. Аналогично $Y_K(x,t)$ введем функцию $F_K(x,t)$, используя $F_\tau(k):=F_\tau(x;k)$: $F_K(x,t)=F_\tau(x;k)$, $t\in\left((k-1)\tau,k\tau\right]$, $k=1,2,\ldots,K$. При $K\to\infty$ $(\tau\to 0)$ получим последовательность $\{Y_K(x,t)\}$, из которой при учете (38) можно выделить подпоследовательность $\{\tilde{Y}_K(x,t)\}$, слабо сходящуюся к $Y(x,t)\in W_0^{1,0}\left(\mathfrak{I}_T\right)$.

Остается показать, что $Y(x,t)$ является слабым решением системы (21)–(26), для чего достаточно установить, что $Y(x,t)$ удовлетворяет тождеству (37) для любой дифференцируемой на $\mathfrak{I}$ функции $\eta(x,t)$, которая удовлетворяет соотношениям

$$\int_{S_j}\frac{\partial\eta(x,t)}{\partial\overline{n}_j}dS+\sum_{s=2}^{m_j}\int_{S_{js}}\frac{\partial\eta(x,t)}{\partial\overline{n}_{js}}dS=0$$

на поверхностях примыкания $S_j=S_{j1}=\bigcup_{s=2}^{m_j}S_{js}$ и $S_{js}\subset\partial\mathfrak{I}_{j_s}$ $\left(s=\overline{2,m_j}\right)$ всех узловых мест ω_j $\left(j=\overline{1,M}\right)$ при любых $t\in(0,T)$ и условиях $\eta\big|_{\partial\mathfrak{I}_T}=0$, $\eta\big|_{t\in[T,T+\tau]}=0$.

По $\eta(x,t)$ осуществляется построение функций

$$\eta(k):=\eta(x,k\tau),\ \eta(k)_t:=\frac{1}{\tau}\big[\eta(k+1)-\eta(k)\big],\ k=1,2,\dots,K;$$

$\eta(K)_t = 0$, т. к. $\eta(K+1) = \eta(K) = 0$. Затем, как и выше, строятся функции $\eta_K(x,t)$, $\eta_K(x,t)_t$. Ясно, что

$$\eta_K(x,t),\ \frac{\partial\eta_K(x,t)}{\partial x_\iota},\ \frac{\partial\eta_K(x,t)_t}{\partial x_\iota}$$

равномерно сходятся к

$$\eta(x,t),\ \frac{\partial\eta(x,t)}{\partial x_\iota},\ \frac{\partial\eta(x,t)}{\partial t}$$

при $K\to\infty$ соответственно, и $\eta_K(x,t)\big|_{t\in[T,\,T+\tau]}=0.$

Положим в интегральном тождестве (37) $\eta(x)=\tau\eta(x)=\tau\eta(x;k)$ и просуммируем его по k от 1 до N. Получим

$$\begin{gathered}-\tau\sum_{k=1}^{N}\int_{\Im}\big(Y(k)\eta k\big)_t\,dxdt-\int_{\Im}Y_0\eta(1)dx+\\+\nu\sum_{k=1}^{N}\tau\rho\big(Y(k),\eta(k)\big)=\sum_{k=1}^{N}\tau\int_{\Im}F_\tau(k)\eta(k),\end{gathered}\tag{39}$$

учитывая соотношения

$$\tau\sum_{k=1}^{N}Y(k)_t\eta(k)=-\tau\sum_{k=1}^{N}Y(k)\eta(k)_t-Y(0)\eta(1),$$

$$\eta(N)=\eta(N+1)=0.$$

Из соотношения (39) непосредственно следует

$$\begin{gathered}-\int_{\Im_T}Y_K(x,t)\eta_K(x,t)_t\,dxdt-\int_{\Im}Y_0(x,t)\eta(x,\tau)dx+\nu\int_0^T\rho\big(Y_K,\eta_K\big)dt=\\=\int_{\Im_T}F(x,t)\eta_K(x,t)dxdt.\end{gathered}\tag{40}$$

Переходя в (40) к пределу по подпоследовательности $\{Y_K(x,t)\}$, учитывая при этом непрерывность формы $\rho(Y_K,\eta_K)$ по своим переменным, получим тождество (37) определения 8 слабого решения дифференциальной системы (21)–(26). Теорема доказана.

Заключение

Представлены условия на исходные данные дифференциально-разностной системы (7), (8), при выполнении которых имеют место оценки норм слабого решения этой системы. Полезность таких оценок заключается в использовании их при доказательстве теоремы существования решения дифференциально-разностной системы (7), (8), формировании условий единственности этого решения, а также условий, гарантирующих непрерывную зависимость решения от априорных данных системы. Важным результатом наличия априорных оценок является использование их при получении условий разрешимости начально-краевой задачи для параболической системы (17)–(19), а также разрешимости эволюционной системы Навье — Стокса (21)–(26). Тем самым получено обоснование метода полудискретизации [Ладыженская, 1973, с. 189] для указанных систем в классе суммируемых в сетеподобной области $\mathfrak{I}$ функций. Использование этого метода дает возможность построения эффективных алгоритмов отыскания приближений к слабым решениям эволюционных систем, описывающих математические модели процессов переноса многофазных сплошных сред в сетевых и магистральных носителях. Полученные результаты найдут свое место при анализе задач управления (оптимального управления) [Provotorov и др., 2021], стабилизации и устойчивости [Веремей, Сотникова, 2011; Aleksandrov, Zhabko, 2003; Kamachkin и др., 2020] дифференциальных систем, аналогичных (7), (8), (17)–(19), (21)–(26).

Список литературы

Веремей Е. И., Сотникова М. В. 2011. Стабилизация плазмы на базе прогноза с устойчивым линейным приближением // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. № 1. С. 116–133.

Ладыженская О. А. 1973. Краевые задачи математической физики. М.: Наука. 407 с.

Лионс Ж.-Л. 1972а. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир. 414 с.

Лионс Ж.-Л. 1972б. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир. 587 с.

Aleksandrov A. Yu., Zhabko A. P. 2003. On stability of solutions to one class of nonlinear difference systems // Siberian Mathematical Journal. Vol. 44. No. 6. Pp. 951–958. https://doi.org/10.1023/B:SIMJ.0000007470.46246.bd

Artemov M. A., Baranovskii E. S. 2019. Solvability of the Boussinesq approximation for water polymer solutions // Mathematics. Vol. 7. No. 7. Article 611. https://doi.org/10.3390/math7070611

Artemov M. A., Baranovskii E. S., Zhabko A. P., Provotorov V. V. 2019. On a 3D model of non-isothermal flows in a pipeline network // Journal of Physics: Conference Series. Vol. 1203. Article 012094. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1203/1/012094

Baranovskii E. S. 2016. Mixed initial-boundary value problem for equations of motion of Kelvin–Voigt fluids // Computational Mathematics and Mathematical Physics. Vol. 56. No. 7. Pp. 1363–1371. https://doi.org/10.1134/S0965542516070058

Baranovskii E. S. 2019. Steady flows of an Oldroyd fluid with threshold slip // Communications on Pure and Applied Analysis. Vol. 18. No. 2. Pp. 735–750. https://doi.org/10.3934/cpaa.2019036

Baranovskii E. S., Provotorov V. V., Artemov M. A., Zhabko A. P. 2021. Non-isothermal creeping flows in a pipeline network: Existence results // Symmetry. Vol. 13. Article 1300. https://doi.org/10.3390/sym13071300

Kamachkin A. M., Potapov D. K., Yevstafyeva V. V. 2020. Existence of periodic modes in automatic control system with a three-position relay // International Journal of Control. Vol. 93. No. 4. Pp. 763–770. https://doi.org/10.1080/00207179.2018.1562221

Provotorov V. V., Provotorova E. N. 2017. Optimal control of the linearized Navier–Stokes system in a netlike domain // Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes. Vol. 13. No. 4. Pp. 431–443. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2017.409

Provotorov V. V., Sergeev S. M., Hoang V. N. 2021. Point control of a differential-difference system with distributed parameters on the graph // Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes. Vol. 17. No. 3. Pp. 277–286. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.305

References

Veremey, E. I., & Sotnikova, M. V. (2011). Plasma stabilization on the base of model predictive control with the linear closed-loop system stability. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes,* (1), 116–133. [In Russian]

Ladyzhenskaya, O. A. (1973). *Boundary value problems of mathematical physics*. Science. [In Russian]

Lyons, J. L. (1972a). *Optimal control of systems described by partial differential equations*. Mir. [In Russian]

Lyons, J. L. (1972b). *Some methods for solving nonlinear boundary value problems*. Mir. [In Russian]

Aleksandrov, A. Yu., & Zhabko, A. P. (2003). On stability of solutions to one class of nonlinear difference systems. *Siberian Mathematical Journal*, *44*(6), 951–958. https://doi.org/10.1023/B:SIMJ.0000007470.46246.bd

Artemov, M. A., & Baranovskii, E. S. (2019). Solvability of the Boussinesq approximation for water polymer solutions. *Mathematics*, *7*(7), Article 611. https://doi.org/10.3390/math7070611

Artemov, M. A., Baranovskii, E. S., Zhabko, A. P., & Provotorov, V. V. (2019). On a 3D model of non-isothermal flows in a pipeline network. *Journal of Physics: Conference Series*, *1203*, Article 012094. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1203/1/012094

Baranovskii, E. S. (2016). Mixed initial-boundary value problem for equations of motion of Kelvin–Voigt fluids. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, *56*(7), 1363–1371. https://doi.org/10.1134/S0965542516070058

Baranovskii, E. S. (2019). Steady flows of an Oldroyd fluid with threshold slip. *Communications on Pure and Applied Analysis*, *18*(2), 735–750. https://doi.org/10.3934/cpaa.2019036

Baranovskii, E. S., Provotorov, V. V., Artemov, M. A., & Zhabko, A. P. (2021). Non-isothermal creeping flows in a pipeline network: Existence results. *Symmetry*, *13*, Article 1300. https://doi.org/10.3390/sym13071300

Kamachkin, A. M., Potapov, D. K., & Yevstafyeva, V. V. (2020). Existence of periodic modes in automatic control system with a three-position relay. *International Journal of Control*, *93*(4), 763–770. https://doi.org/10.1080/00207179.2018.1562221

Provotorov, V. V., & Provotorova, E. N. (2017). Optimal control of the linearized Navier–Stokes system in a netlike domain. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, *13*(4), 431–443. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2017.409

Provotorov, V. V., Sergeev, S. M., & Hoang, V. N. (2021). Point control of a differential-difference system with distributed parameters on the graph. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, *17*(3), 277–286. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2021.305

Информация об авторах

Ван Нгуен Хоанг, аспирант кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
fadded9x@gmail.com, https://orcid.org/0000-0001-6970-2770

Вячеслав Васильевич Провоторов, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
wwprov@mail.ru, https://orcid.org/0000-0001-8761-7174

Information about the authors

Van Nguyen Hoang, Postgraduate Student, Department of Partial Differential Equations and Probability Theory, Voronezh State University, Voronezh, Russia
fadded9x@gmail.com, https://orcid.org/0000-0001-6970-2770

Vyacheslav V. Provotorov, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Professor of the Department of Partial Differential Equations and Probability Theory, Voronezh State University, Voronezh, Russia
wwprov@mail.ru, https://orcid.org/0000-0001-8761-7174