

На правах рукописи

БУТАКОВА Нина Николаевна

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛН НА
ПОВЕРХНОСТИ ДВУХФАЗНОЙ СРЕДЫ**

05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

**диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук**

Тюмень – 2002

Работа выполнена на кафедре математического моделирования Тюменского государственного университета.

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук,
доцент Василий Александрович Баринов

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Константин Михайлович Федоров
кандидат физико-математических наук,
доцент Анатолий Афанасьевич Поздняков

Ведущая организация: Санкт-Петербургский государственный
университет

Защита состоится « ___ » _____ 2003 г. в _____ часов на заседании диссертационного совета К 212.274.01 по присуждению ученой степени кандидата наук в Тюменском государственном университете по адресу: 625003, г. Тюмень, ул. Перекопская, 15А, ауд. 217.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Тюменского государственного университета.

Автореферат разослан « ___ » _____ 2002 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
кандидат физико-математических наук, доцент

В. А. Баринов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

В динамике однофазных жидкостей изучение задачи о распространении поверхностных волн началось еще в XIX веке. Среди первых работ в этой области основными являются исследования Стокса, который предложил два метода решения волновых задач. Первый метод позволяет получить решение в виде рядов по малому амплитудному параметру. Сходимость рядов была доказана А. Н. Некрасовым и Леви-Чивита. В дальнейшем метод Стокса получил развитие в работах Л.Н. Сретенского, Я. И. Секерж-Зеньковича, Ю. З. Алешкова и других авторов. Вопрос о распространении волн по свободной поверхности многофазной среды остался практически не изученным. Гидродинамика многофазных сред наиболее полно разработана в работах Р. И. Нигматулина. В. Ю. Ляпидевский исследовал бегущие волны на свободной поверхности газожидкостной смеси в односкоростном приближении. В работе Н. И. Лобова и Д. В. Любимова решена задача о стоячих волнах на поверхности раздела жидкости и смеси этой же жидкости с твердыми частицами. В рамках многоскоростной модели задача о поверхностных волнах не рассматривалась. В связи с тем, что многофазные и, в частности, двухфазные среды широко распространены в природе и различных технологических процессах, а волны на свободной поверхности таких сред мало изучены, исследование данного вопроса является актуальным. С одной стороны оно позволяет развить теорию поверхностных волн, с другой стороны полученные результаты могут найти применение при решении экологических проблем загрязнения в прибрежных зонах океанов и морей, а также в других приложениях.

Цель работы состоит в построении математической модели распространения волн по свободной поверхности двухфазной среды с однородной и неоднородной концентрацией дисперсной фазы; исследовании влияния примесей на параметры волны и форму свободной поверхности, а также изменения концентрации частиц за счет распространения волны.

Научная новизна результатов, полученных в работе, сводится к следующим положениям.

1. Построена математическая модель распространения поверхностных волн малой амплитуды по слою дисперсной смеси конечной глубины.
2. В нелинейной постановке решены задачи о распространении плоских и пространственных волн по свободной поверхности смеси с однородным распределением частиц в покоящемся слое. С точностью до второго приближения по малому амплитудному параметру найдены поля скоростей, давления и концентрации фаз, форма свободной поверхности.
3. Установлено, что возмущение концентрации является величиной более низкого порядка по сравнению с остальными волновыми возмущениями. Найдены аналитические выражения для фазовой скорости и декремента затухания волны.
4. В случае плоскопараллельного волнового движения в линейном приближении найдены траектории частиц несущей и дисперсной фаз. В отличие от классической задачи теории волн, разомкнутость траекторий проявляется уже в первом приближении, что обусловлено затуханием волны под воздействием межфазного трения.
5. В линейном приближении по малому амплитудному параметру исследована задача о плоских волнах на свободной поверхности двухфазной среды с неоднородной концентрацией дисперсной фазы. Получено ее асимптотическое решение с точностью до второго приближения по параметру, характеризующему неоднородность распределения концентрации. Исследована зависимость решения от параметров среды.

Методы исследования. При построении математической модели использовались методы механики многофазных сред и теории поверхностных волн. Для решения поставленных задач применялись методы возмущения, разделения переменных, а также методы интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Расчеты для конкретных сред были выполнены с использованием пакета Maple.

Научно-практическая значимость. Результаты, полученные в диссертации, развивают теорию поверхностных волн. Проведенные исследования могут слу-

жить основой для разработки волнового метода определения степени загрязнения водных бассейнов, так как дают возможность по известным волновым параметрам определить концентрацию примесей.

Достоверность полученных результатов и выводов определяется применением хорошо разработанных математических методов, в том числе метода малого параметра, использованного ранее при решении многочисленных прикладных задач, а также тем, что из полученных в диссертации результатов следуют как частные случаи классические результаты теории поверхностных волн.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на Международной конференции студентов и аспирантов по фундаментальным наукам «Ломоносов – 2000» (Москва, 2000); Международной научной конференции молодых ученых (Ишим, 2001); IV Международной научно-технической конференции «Математическое моделирование физических, экономических, социальных систем и процессов» (Ульяновск, 2001); V Международной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения» (Саранск, 2002); Всероссийской конференции «Теория и приложения задач со свободными границами» (Бийск, 2002).

Публикации. Основное содержание диссертации отражено в 12 печатных работах, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Общий объем работы составляет 124 страницы. Библиографический список насчитывает 61 наименование.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность темы диссертационной работы, дается обзор работ, непосредственно примыкающих к теме диссертации, формулируется цель исследования, приводится краткое содержание диссертации.

Первая глава диссертации посвящена построению математической модели распространения волн по свободной поверхности слоя дисперсной смеси конечной глубины. Эта глава является общей для всей работы.

В первом параграфе приводятся уравнения, описывающие движение двухфазной среды. Рассматривается слой двухфазной жидкости постоянной глубины, находящийся на твердом горизонтальном основании. Свободная поверхность слоя граничит со средой пренебрежимо малой плотности, характеризующейся постоянным давлением P_a (в частности, атмосферным). Предполагается, что несущая фаза ($i = 1$) – идеальная несжимаемая жидкость, вязкость которой проявляется только на межфазной границе; дисперсная фаза ($i = 2$) – недеформируемые частицы. Движение такой среды в отсутствие тепло- и массообмена описывается двухскоростными уравнениями сохранения массы и импульса, приведенными в работе Р. И. Нигматулина.

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t^*} + \bar{\nabla}(\rho_i \bar{v}_i^*) = 0,$$

$$\rho_i \frac{d\bar{v}_i^*}{dt^*} = -\alpha_i \bar{\nabla} P_i + (-1)^i \alpha_1 \alpha_2 \rho_1^0 \frac{s}{2} \left(\frac{d\bar{v}_1^*}{dt^*} - \frac{d\bar{v}_2^*}{dt^*} \right) + (-1)^i \alpha_1 \alpha_2 R (\bar{v}_1^* - \bar{v}_2^*) + \rho_i \bar{g},$$

$$\rho_i = \rho_i^0 \alpha_i, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad \rho_i^0 = \text{const}, \quad i = 1, 2. \quad (1)$$

Здесь α_i , \bar{v}_i^* , P_i , ρ_i , ρ_i^0 – объемная концентрация, вектор скорости, давление, приведенная и истинная плотность i -й фазы; \bar{g} – вектор ускорения силы тяжести; звездочкой обозначены (где это необходимо) размерные величины. Эмпирический коэффициент R характеризует силу вязкого трения Стокса, вызванную несовпадением скоростей фаз. Например, для сферических частиц радиуса a его значение принимается равным $R = 9\eta/2a^2$, где η – коэффициент динамической вязкости жидкости. Безразмерный коэффициент s принимает значение 1 или 0 в зависимости от того, учитывается или нет сила присоединенных масс. Такая запись позволяет оценить влияние этой силы на волновые параметры.

Во втором параграфе выводятся граничные условия на свободной поверхности и на дне слоя. Декартова система координат выбрана так, что плоскость $z^* = 0$ совпадает с невозмущенной поверхностью, ось z^* направлена противоположно вектору \bar{g} . Кинематическое и динамическое условия на свободной поверхности, заданной уравнением $z^* = \xi(t^*, x^*, y^*)$, имеют вид

$$\alpha_1 v_{1n}^* + \alpha_2 v_{2n}^* = V_n, P = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 = P_a \quad (2)$$

где $\alpha_1 v_{1n}^* + \alpha_2 v_{2n}^*$, V_n – нормальная проекция объемной скорости смеси и свободной поверхности соответственно. Считая, что смесь «проскальзывает» вдоль твердой поверхности основания, на дне $z^* = -l^*$ (l^* – глубина слоя) имеем условие непротекания для каждой фазы

$$v_{in}^* = 0, i = 1, 2. \quad (3)$$

В третьем параграфе поставлена краевая задача для определения неизвестных характеристик волнового движения в случае распространения по свободной поверхности в положительном направлении оси x^* прогрессивной волны длиной λ с фазовой скоростью c^* . Для этого система, описывающая движение смеси, записывается для приведенных давлений фаз – возмущений давления, вызванных распространением волны. Предполагается, что в отсутствие волны среда находится в покое. Возмущения давления одинаковы в обеих фазах и равны $p'(t^*, x^*, y^*, z^*)$. Тогда

$$P_i = P_a - \rho_i^0 g z^* + p', i = 1, 2, \alpha_1 = 1 - \alpha(z^*) - \alpha', \alpha_2 = \alpha(z^*) + \alpha',$$

где $\alpha(z^*)$, $\alpha' = \alpha'(t^*, x^*, y^*, z^*)$ – концентрация дисперсной фазы в отсутствие волны и ее волновое возмущение соответственно. С учетом сделанных предположений уравнения (1) и граничные условия (2), (3) принимают вид

$$-\frac{\partial \alpha'}{\partial t^*} + \bar{\nabla}((1 - \alpha(z^*) - \alpha')\bar{v}_1^*) = 0, \frac{\partial \alpha'}{\partial t^*} + \bar{\nabla}((\alpha(z^*) + \alpha')\bar{v}_2^*) = 0,$$

$$\left(\rho_1^0 + \frac{s}{2} \rho_1^0 (\alpha(z^*) + \alpha') \right) \frac{d\bar{v}_1^*}{dt^*} - \frac{s}{2} \rho_1^0 (\alpha(z^*) + \alpha') \frac{d\bar{v}_2^*}{dt^*} - R(\alpha(z^*) + \alpha')(\bar{v}_2^* - \bar{v}_1^*) + \bar{\nabla} p' = 0,$$

$$\left(\rho_2^0 + \frac{s}{2} \rho_1^0 (1 - \alpha(z^*) - \alpha') \right) \frac{d\bar{v}_2^*}{dt^*} - \frac{s}{2} \rho_1^0 (1 - \alpha(z^*) - \alpha') \frac{d\bar{v}_1^*}{dt^*} + R(1 - \alpha(z^*) - \alpha')(\bar{v}_2^* - \bar{v}_1^*) + \bar{\nabla} p' = 0. \quad (4)$$

На свободной поверхности $z^* = \xi(t^*, x^*, y^*)$ выполняются кинематическое и динамическое условия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t^*} - (1 - \alpha(\xi) - \alpha')v_{1z}^* - (\alpha(\xi) + \alpha')v_{2z}^* + \frac{\partial \xi}{\partial x^*} [(1 - \alpha(\xi) - \alpha')v_{1x}^* + (\alpha(\xi) + \alpha')v_{2x}^*] + \\ + \frac{\partial \xi}{\partial y^*} [(1 - \alpha(\xi) - \alpha')v_{1y}^* + (\alpha(\xi) + \alpha')v_{2y}^*] = 0, \\ p' - [\rho_1^0(1 - \alpha(\xi) - \alpha') + \rho_2^0(\alpha(\xi) + \alpha')]g\xi = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

На дне $z^* = -l^*$ заданы условия

$$v_{iz}^* = 0, \quad i = 1, 2. \quad (6)$$

Система уравнений (4) и граничных условий (5), (6) является замкнутой и составляет нелинейную краевую задачу для определения неизвестных характеристик волнового движения.

Во второй главе в линейном приближении исследуется распространение поверхностных волн по свободной поверхности смеси с однородной концентрацией дисперсной фазы в покоящемся слое $\alpha(z^*) = \alpha_0 = \text{const}$ в случае плоскопараллельного движения.

Первый параграф посвящен определению скоростей волнового движения фаз, возмущений давления и концентрации, а также формы свободной поверхности. Вводятся следующие безразмерные переменные и величины

$$\begin{aligned} t = kc^*t^*, \quad x = kx^*, \quad z = kz^*, \quad l = kl^*, \quad \mu_i = \rho_i^0/\rho^0, \quad r = R/\rho^0kc_0, \\ \gamma = \alpha'/\varepsilon\alpha_0, \quad \zeta = k\xi/\varepsilon, \quad \bar{v}_i = \bar{v}_i^*/\varepsilon c_0, \quad p = p'/\varepsilon\rho^0c_0^2, \quad c = c^*/c_0, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\rho^0 = (1 - \alpha_0)\rho_1^0 + \alpha_0\rho_2^0$ – плотность покоящейся смеси, c_0 – фазовая скорость, соответствующая линейной задаче, $\varepsilon = k\xi_{\max}$ – малый положительный параметр, ξ_{\max} – максимальное значение ординаты свободной поверхности, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число. В безразмерных переменных задача (4) – (6) принимает вид

$$\begin{aligned} -\alpha_0 c \frac{\partial \gamma}{\partial t} + (1 - \alpha_0 - \varepsilon \alpha_0 \gamma) \bar{\nabla} \bar{v}_1 - \varepsilon \alpha_0 \bar{v}_1 \bar{\nabla} \gamma = 0, \\ c \frac{\partial \gamma}{\partial t} + (1 + \varepsilon \gamma) \bar{\nabla} \bar{v}_2 + \varepsilon \bar{v}_2 \bar{\nabla} \gamma = 0, \end{aligned}$$

делены из начальной формы волны. Возмущение концентрации дисперсной фазы в первом приближении равно нулю, т. е. эта величина имеет более высокий порядок малости, чем остальные волновые возмущения.

Во втором параграфе получены аналитические выражения для декремента затухания, фазовой скорости и амплитуды волны. Исследована зависимость решения от параметров среды. Проверена устойчивость полученного решения (декремент β принимает только положительные значения, следовательно, возмущения являются затухающими). Размерный декремент затухания определяется формулой

$$\beta = \left[-\frac{\chi}{2} + \sqrt{\frac{\chi^2}{4} + \frac{\Psi^3}{27}} \right]^{\frac{1}{3}} + \left[-\frac{\chi}{2} - \sqrt{\frac{\chi^2}{4} + \frac{\Psi^3}{27}} \right]^{\frac{1}{3}} + \frac{2R\rho^0}{3\rho_1^0(s\rho^0 + 2\rho_2^0)},$$

$$\Psi = \frac{3\rho^0\rho_1^0(s\rho^0 + 2\rho_2^0)(s\rho_1^0 + 2\rho_1^0 + 2\alpha_0(\rho_2^0 - \rho_1^0))gk \, thkl^* - 4R^2\rho^{0^2}}{12\rho_1^{0^2}(s\rho^0 + 2\rho_2^0)^2},$$

$$\chi = \frac{R\rho^0 \left[4R^2\rho^{0^2} + 9\rho_1^0(s\rho^0 + 2\rho_2^0)(s\rho_1^0\rho^0 - \alpha_0(1 - \alpha_0)(\rho_2^0 - \rho_1^0)^2 + 2\rho_1^0\rho_2^0)gk \, thkl^* \right]}{54\rho_1^{0^3}(s\rho^0 + 2\rho_2^0)^3}.$$

Фазовая скорость связана с декрементом затухания волны соотношением

$$c_o^2 = c_g^2 + c_d^2 + c_r^2,$$

где

$$c_g^2 = \frac{g \, thkl^*}{k}, \quad c_d^2 = \frac{2\alpha_0(1 - \alpha_0)(\rho_1^0 - \rho_2^0)^2}{\rho_1^0(s\rho^0 + 2\rho_2^0)} \frac{g \, thkl^*}{k}, \quad c_r^2 = \frac{\beta}{k^2} \left(3\beta - \frac{4R\rho^0}{\rho_1^0(s\rho^0 + 2\rho_2^0)} \right).$$

Величина c_g^2 является квадратом фазовой скорости гравитационной волны; $c_d^2 \geq 0$ – добавка к фазовой скорости за счет наличия дисперсной фазы; c_r^2 – добавка, обусловленная силами межфазного взаимодействия. Показано, что в рамках данной модели декремент затухания находится в пределах $0 < \beta < 2R\rho^0/3\rho_1^0(s\rho^0 + 2\rho_2^0)$, а добавка c_r^2 может принимать только отрицательные значения. Следовательно, наличие межфазного трения приводит к уменьшению значения фазовой скорости по сравнению со скоростью гравитационной волны в

чистой жидкости, а также к общему затуханию волны. С другой стороны наличие дисперсной фазы влечет увеличение квадрата фазовой скорости на величину c_d^2 .

В третьем параграфе для иллюстрации полученных результатов приводятся расчеты для среды с параметрами: $l^* = 10$ м, $\lambda = 1$ м, $\rho_1^0 = 1000$ кг/м³, $\eta = 1,004 \cdot 10^{-3}$ кг/(м·с), $a = 0,25 \cdot 10^{-2}$ м. На рис. 1 представлена зависимость декремента затухания β от истинной плотности примесей ρ_2^0 . Из рисунка следует, что при одинаковом значении $|\rho_2^0 - \rho_1^0|$ затухание волны происходит намного быстрее, если дисперсная фаза менее плотная, чем несущая среда. На рис. 2 эта же зависимость показана для модели, учитывающей только силу трения Стокса ($s = 0$). Разница между соответствующими значениями β значительна, например, при $\rho_2^0 = 400$ кг/м³, $\alpha_0 = 0,1$ они отличаются почти в пять раз ($\beta = 0,0139$ 1/с в первом случае и $\beta = 0,0612$ 1/с во втором). Следовательно, сила присоединенных масс оказывает существенное влияние на волновые параметры, поэтому для более точного моделирования волновых процессов ее учет необходим.

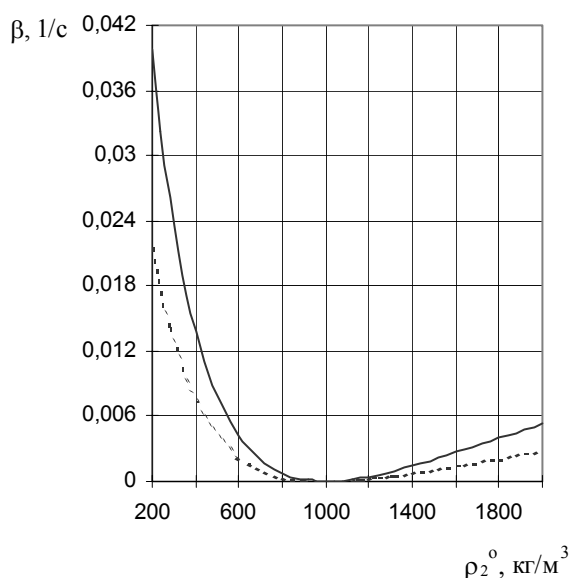


Рис. 1. Зависимость декремента затухания β от плотности дисперсной фазы ρ_2^0 :
 ---- $\alpha_0=0,05$, _____ $\alpha_0=0,1$.

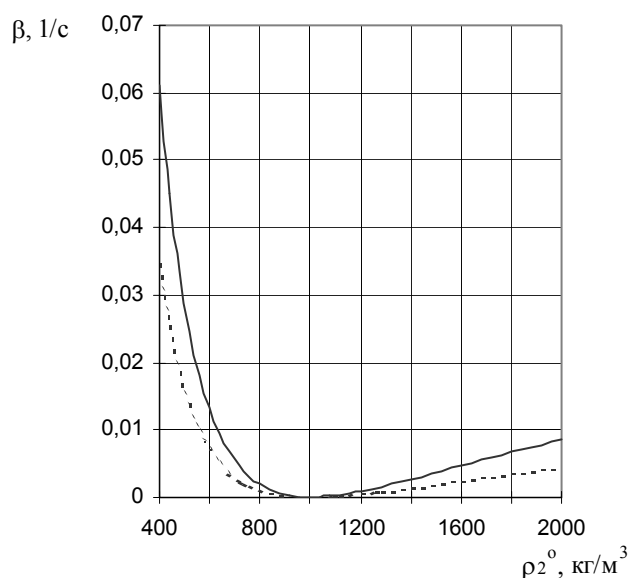


Рис. 2. Зависимость декремента затухания β от плотности дисперсной фазы ρ_2^0 ($s=0$):
 ---- $\alpha_0=0,05$, _____ $\alpha_0=0,1$.

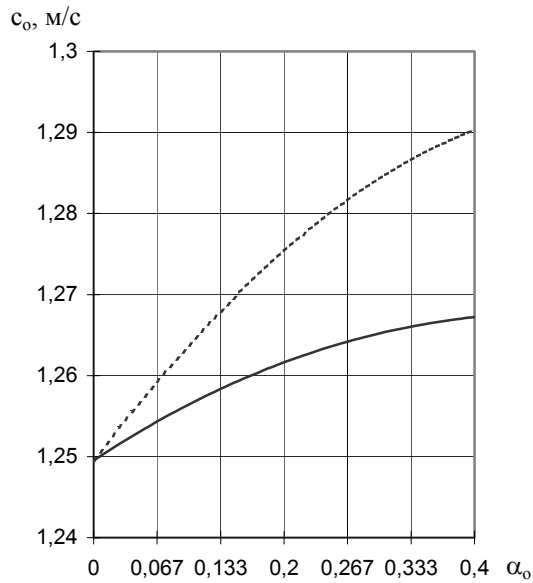


Рис. 3. Зависимость фазовой скорости c_0 от концентрации дисперсной фазы α_0 :
 --- $\rho_2^0=500 \text{ кг/м}^3$, ___ $\rho_2^0=1500 \text{ кг/м}^3$.

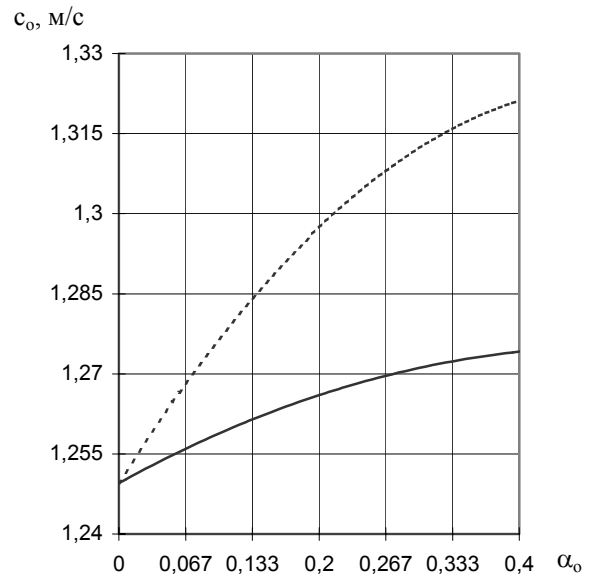


Рис. 4. Зависимость фазовой скорости c_0 от концентрации α_0 ($s=0$):
 --- $\rho_2^0=500 \text{ кг/м}^3$, ___ $\rho_2^0=1500 \text{ кг/м}^3$.

Рис. 3 иллюстрирует характер зависимости фазовой скорости c_0 от концентрации α_0 . С ростом α_0 фазовая скорость растет, начиная с $c_0 = 1,2495 \text{ м/с}$ (фазовая скорость гравитационной волны для чистой жидкости) и, например, при $\alpha_0 = 0,4$ достигает значения $c_0 = 1,2903 \text{ м/с}$ ($\rho_2^0 = 500 \text{ кг/м}^3$) или $c_0 = 1,2672 \text{ м/с}$ ($\rho_2^0 = 1500 \text{ кг/м}^3$). На рис. 4 данная зависимость представлена при $s = 0$ (учитывается только сила трения). В этом случае c_0 достигает больших значений: $c_0 = 1,3211 \text{ м/с}$ ($\rho_2^0 = 500 \text{ кг/м}^3$) и $c_0 = 1,2741 \text{ м/с}$ ($\rho_2^0 = 1500 \text{ кг/м}^3$). Разница особенно существенна для среды с «легкими», по сравнению с несущей фазой, примесями. Таким образом, учет силы присоединенных масс приводит к общему снижению фазовой скорости волны.

В четвертом параграфе в линейном приближении определены траектории частиц несущей и дисперсной фазы. Траектории являются разомкнутыми вследствие затухания волны за счет межфазного трения. При малом влиянии трения траектории практически являются эллипсами, что соответствует классическим результатам. Также установлено, что частицы меньшей, по сравнению с несущей фазой, плотности движутся по траекториям большего размера, чем при $\rho_2^0 > \rho_1^0$.

В пятом параграфе приводится другой способ решения линейной задачи.

Задача сведена к уравнению для одной неизвестной функции $p(t, x, z)$. Найдено решение, из которого как частный случай следует решение, полученное в первом параграфе.

В третьей главе рассматривается нелинейная задача о плоских волнах на слое смеси с однородным распределением примесей в покоящемся слое.

В первом параграфе дается постановка нелинейной краевой задачи для определения характеристик волнового движения. Граничные условия, заданные на неизвестной поверхности $z = \varepsilon \zeta(t, x)$, при помощи разложения в ряд Тейлора переносятся на фиксированную поверхность $z = 0$. Решение нелинейной задачи ищется в виде рядов по малому параметру ε

$$\bar{v}_i = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \bar{v}_{ik}, \quad p = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k p_k, \quad \gamma = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \gamma_k, \quad \zeta = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \zeta_k, \quad c = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k c_k. \quad (8)$$

Выписывается система уравнений и граничных условий для определения второго приближения по малому амплитудному параметру.

Во втором параграфе определяется решение задачи во втором приближении в виде затухающих прогрессивных волн. Найдено возмущение концентрации дисперсной фазы α' , являющееся величиной более низкого порядка по сравнению с возмущениями скорости и давления.

$$\alpha' = \varepsilon^2 \alpha_0 \frac{e^{-2\beta t^*}}{\text{sh}^2 kl^*} [S_4 \sin 2k(x^* - c_0 t^*) + K_4 \cos 2k(x^* - c_0 t^*) + L_4 \text{ch} 2k(z^* + l^*)].$$

Коэффициенты S_4 , K_4 и L_4 определены в диссертации. Поправка к значению фазовой скорости во втором приближении равна нулю, что соответствует классическим результатам.

Третий параграф посвящен анализу возмущения концентрации и формы свободной поверхности. Рассматривается возмущение концентрации дисперсной фазы, вызванное распространением поверхностной волны длиной $\lambda = 10$ м с начальной высотой $h = 0,5$ м по слою глубиной $l^* = 100$ м. Несущей фазой является жидкость с плотностью $\rho_1^0 = 1000$ кг/м³ и коэффициентом динамической вязкости $\eta = 1,004 \cdot 10^{-3}$ кг/(м·с). Концентрация примесей в покоящемся слое $\alpha_0 = 0,1$. На рис. 5 и рис. 6 приводятся графики изменения концентрации примесей с глубиной

z^* (при $x^* = 0, t^* = 0$). Волновые возмущения охватывают слой глубиной около четырех метров. Для частиц большего размера ($a = 0,25 \cdot 10^{-2}$ м) возмущение концентрации значительно, чем для более мелких ($a = 0,15 \cdot 10^{-2}$ м). Вблизи свободной поверхности концентрация «легких» по сравнению с несущей жидкостью частиц ($\rho_2^0 < \rho_1^0$) уменьшается, а «тяжелых» ($\rho_2^0 > \rho_1^0$) возрастает.

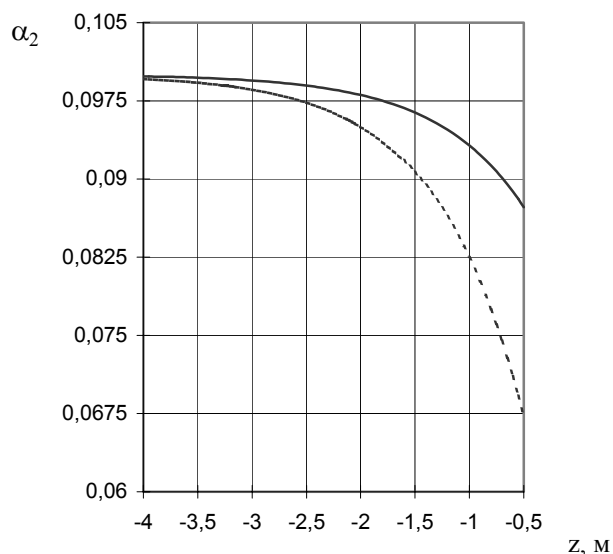


Рис. 3.1. Изменение концентрации дисперсной фазы α_2 с глубиной z при $\rho_2^0 = 500 \text{ кг/м}^3$: - - - - $a = 0,25 \cdot 10^{-2}$ м, — $a = 0,15 \cdot 10^{-2}$ м.

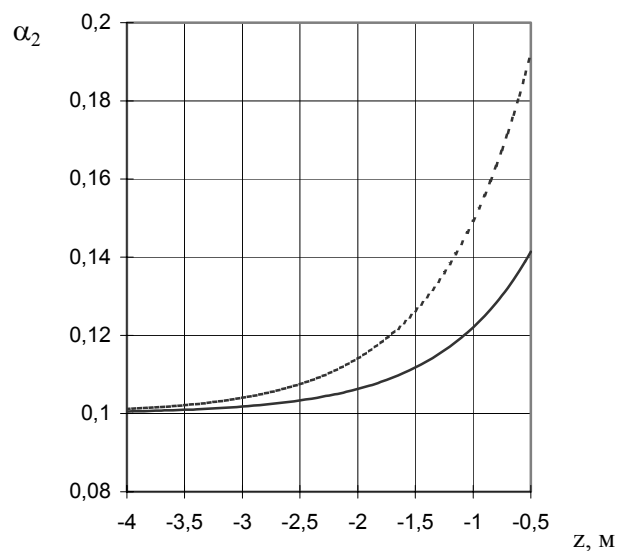


Рис. 3.2. Изменение концентрации дисперсной фазы α_2 с глубиной z при $\rho_2^0 = 1500 \text{ кг/м}^3$: - - - - $a = 0,25 \cdot 10^{-2}$ м, — $a = 0,15 \cdot 10^{-2}$ м.

В данном параграфе также исследуется влияние примесей на форму волны. Показано, что и для двухфазной среды справедлив нелинейный эффект Стокса: гребень нелинейной волны уже, а впадина шире.

В четвертой главе решена нелинейная краевая задача о пространственных волнах на слое дисперсной среды с однородной концентрацией примесей в покоящемся слое. С точностью до второго приближения по малому амплитудному параметру найдены скорости волнового движения, давления и концентрации фаз, а также форма свободной поверхности. Исследована зависимость полученного решения от длины волны и параметров среды.

В первом параграфе дается постановка нелинейной краевой задачи для определения скоростей волнового движения фаз, возмущений давления и концентрации, профиля волны, а также величины c^* – фазовой скорости волны в направ-

лении оси x^* . Для этого, также как и в плоской задаче, вводятся безразмерные переменные и величины (7); граничные условия со свободной поверхности $z = \varepsilon\zeta(t, x, y)$ переносятся на фиксированную поверхность $z = 0$; решение ищется в виде рядов по малому параметру ε (8). Получены системы уравнений и граничных условий для определения решения задачи в первом и втором приближении.

Во втором параграфе найдено решение задачи в первом приближении. Система уравнений и граничных условий сведена к краевой задаче для p_0

$$\Delta p_0 = 0, \quad \frac{\partial p_0}{\partial z} = 0, \quad z = -l,$$

$$\frac{\partial^3 p_0}{\partial t^3} + \frac{2r}{\mu_1(1+2\mu_2)} \frac{\partial^2 p_0}{\partial t^2} + \frac{(\mu_1+2\mu)v_0^2}{\mu_1(1+2\mu_2)} \frac{\partial^2 p_0}{\partial t \partial z} + \frac{2r v_0^2}{\mu_1(1+2\mu_2)} \frac{\partial p_0}{\partial z} = 0, \quad z = 0,$$

$$p_0\left(t, x + \frac{2\pi}{\kappa_1}, y + \frac{2\pi}{\kappa_2}, 0\right) = p_0(t, x, y, 0), \quad \int_0^{2\pi/\kappa_1} dx \int_0^{2\pi/\kappa_2} p_0(t, x, y, 0) dy = 0,$$

где $\mu = (1 - \alpha_0)\mu_2 + \alpha_0\mu_1$, Δ – оператор Лапласа, $\kappa_i = k_i/k$, $k_i = 2\pi/\lambda_i$, λ_1 и λ_2 длины волны в направлении осей x^* и y^* соответственно. Последние два условия следуют из условия периодичности волновой поверхности и условия сохранения массы жидкости соответственно. Найдено волновое решение данной задачи

$$p_0 = L \frac{e^{-bt}}{\text{sh}l} \cos \kappa_1(x - t + \varepsilon_1) \cos \kappa_2(y + \varepsilon_2) \text{ch}(z + l),$$

где постоянные L , ε_1 и ε_2 , как и для волн на поверхности однофазных сред, определяются из дополнительных начальных данных. Найдены декремент затухания и фазовая скорость волны. Для фазовой скорости получена зависимость, аналогичная выражению для фазовой скорости плоской волны,

$$c_0^2 = c_g^2 + c_d^2 + c_r^2,$$

$$c_g^2 = \frac{gk \text{th}kl^*}{k_1}, \quad c_d^2 = \frac{2\alpha_0(1 - \alpha_0)(\rho_1^0 - \rho_2^0)^2}{\rho_1^0(s\rho^0 + 2\rho_2^0)} \frac{gk \text{th}kl^*}{k_1}, \quad c_r^2 = \frac{\beta}{k_1^2} \left(3\beta - \frac{4R\rho^0}{\rho_1^0(s\rho^0 + 2\rho_2^0)} \right).$$

Скорости волнового движения фаз и возмущение концентрации определяются через p_0 из уравнений неразрывности и движения, из кинематического условия оп-

ределяется форма свободной поверхности. Возмущение концентрации, как и для плоских волн в линейном приближении равно нулю.

В третьем параграфе найдено решение задачи во втором приближении по малому амплитудному параметру. Аналогично линейному приближению, задача сводится к системе уравнений и граничных условий для $p_1(t, x, y, z)$. Поправка к значению фазовой скорости пространственной волны равна нулю. Определены скорости волнового движения фаз, возмущение концентрации и форма свободной поверхности.

В четвертом параграфе исследуется зависимость полученного решения от характеристик среды. Установлено, что возмущение концентрации является величиной более низкого порядка по сравнению с остальными волновыми возмущениями. Показано, что для волновой поверхности имеет место нелинейный эффект Стокса: гребень нелинейной волны уже, а впадина шире. Для иллюстрации этого эффекта на рис. 7 и рис. 8 представлены фрагменты свободной поверхности в линейном и нелинейном приближении соответственно. Расчеты выполнены для среды с параметрами: $\rho_1^0 = 1000 \text{ кг/м}^3$, $\rho_2^0 = 500 \text{ кг/м}^3$, $\eta = 1.004 \cdot 10^{-3} \text{ кг/(м} \cdot \text{с)}$, $a = 0.25 \cdot 10^{-2} \text{ м}$, $\alpha_0 = 0,1$, $l^* = 100 \text{ м}$, $\lambda = 10 \text{ м}$, $h = 0,5 \text{ м}$, $\lambda_1 = 20/\sqrt{3} \text{ м}$, $\lambda_2 = 20 \text{ м}$. При $\rho_2^0 > \rho_1^0$ волновая поверхность имеет аналогичный вид.

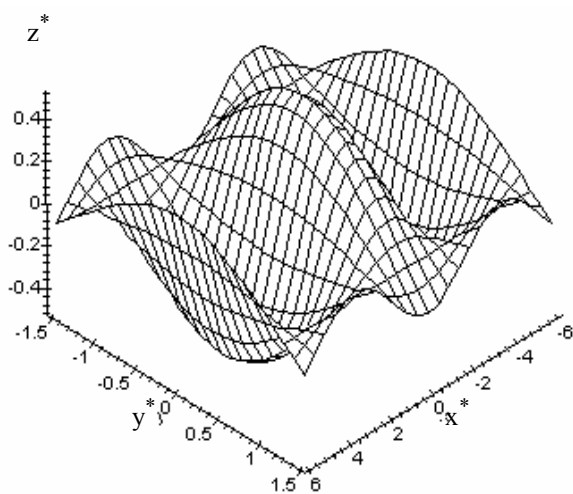


Рис. 7. Фрагмент свободной поверхности в линейном приближении.

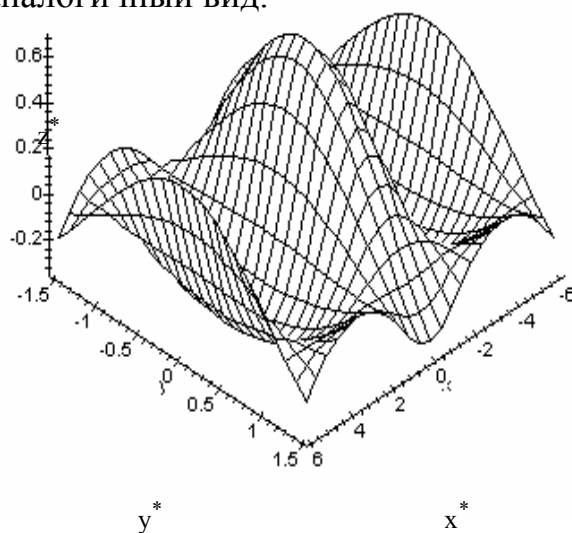


Рис. 8. Фрагмент свободной поверхности в нелинейном приближении.

Пятая глава посвящена исследованию волн на поверхности слоя двухфазной среды с неоднородной концентрацией дисперсной фазы в покоящемся слое.

В первом параграфе приводится математическая модель волнового движения дисперсной смеси с неравномерным по глубине распределением примеси. Предполагается, что в отсутствие волновых возмущений дисперсные частицы экспоненциально распределены по слою смеси, т. е.

$$\alpha(z^*) = \alpha_0 e^{\theta \delta^* z^*},$$

где α_0 – концентрация частиц на невозмущенной поверхности $z^* = 0$; δ^* – положительный коэффициент, зависящий от параметров среды; коэффициент $\theta = 1$ при $\rho_2^0 < \rho_1^0$ и $\theta = -1$ при $\rho_2^0 > \rho_1^0$.

Во втором параграфе поставлена краевая задача о плоских поверхностных волнах. Для этого введены безразмерные переменные и величины

$$t = kc^* t^*, \quad x = kx^*, \quad z = kz^*, \quad l = kl^*, \quad \mu_i = \rho_i^0 / \rho^0, \quad r = R / \rho^0 kc_0,$$

$$\delta = \delta^* / k, \quad \gamma = \alpha' / \alpha_0, \quad \zeta = k\xi, \quad \bar{v}_i = \bar{v}_i^* / c_0, \quad p = p' / \rho^0 c_0^2, \quad c = c^* / c_0,$$

где $\rho^0 = (1 - \alpha_0)\rho_1^0 + \alpha_0\rho_2^0$ – плотность покоящейся смеси на невозмущенной свободной поверхности, c_0 – фазовая скорость волны, соответствующая равномерному распределению примесей в покоящемся слое, в линейном приближении. Для поверхностных волн малой амплитуды, скорости волнового движения фаз и волновые возмущения одного порядка с величиной ζ , т. е. малы. Учитывая малость, входящих в уравнения и граничные условия, неизвестных величин, оставляя только линейные по отношению к ним слагаемые, получаем линейную задачу. Эта задача может быть сведена к системе уравнений и граничных условий для определения возмущения давления

$$\begin{aligned} & c^2 \mu_1 (s \rho(z) + 2\mu_2) (s \mu_1 + 2\mu(z)) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta p + 4cr (s \mu_1 \rho(z) + \mu(z) \rho(z) + \mu_1 \mu_2) \frac{\partial}{\partial t} \Delta p + \\ & + 4r^2 \rho(z) \Delta p = \rho'(z) \left[c^2 \mu_1 (s + 2) (s \mu_1 + 2\mu_2) \frac{\partial^3 p}{\partial t^2 \partial z} + 4cr (s \mu_1 + \mu_1 + \mu_2) \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial z} + 4r^2 \frac{\partial p}{\partial z} \right], \\ & \frac{\partial^3 p}{\partial t^3} + \frac{2r}{c \mu_1 (s + 2\mu_2)} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{(s \mu_1 + 2\mu^0) v_0^2}{c^2 \mu_1 (s + 2\mu_2)} \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial z} + \frac{2r v_0^2}{c^3 \mu_1 (s + 2\mu_2)} \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad z = 0, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad z = -l, \quad p(t, x + 2\pi, 0) = p(t, x, 0), \quad \int_0^{2\pi} p(t, x, 0) dx = 0.$$

где $\rho(z) = \mu_1 + \alpha_0 e^{\theta \delta z} (\mu_2 - \mu_1)$, $\mu(z) = \mu_2 - \alpha_0 e^{\theta \delta z} (\mu_2 - \mu_1)$, $\mu^0 = \mu(0)$, Δ – оператор Лапласа. Полученное уравнение является уравнением в частных производных четвертого порядка с переменными коэффициентами. Его решение предложено искать в виде асимптотического ряда по параметру δ .

В третьем параграфе получено решение краевой задачи в виде рядов по малому параметру δ . Из условия равномерной пригодности разложения найдены ограничения на область применимости модели

$$\frac{\alpha_0}{\alpha_l} < e \quad \text{при } \rho_2^0 < \rho_1^0, \quad \frac{\alpha_l}{\alpha_0} < e \quad \text{при } \rho_2^0 > \rho_1^0,$$

где α_l – концентрация дисперсной фазы при $z = -l$. Данная модель хорошо описывает волновой процесс, если концентрация дисперсной фазы изменяется по глубине слоя менее чем в e раз. С точностью до второго приближения по δ определены скорости волнового движения фаз, возмущения давления и концентрации, форма свободной поверхности. Получены поправки к значениям фазовой скорости и декремента затухания волны.

В четвертом параграфе на примере конкретных сред исследована зависимость решения от параметров среды. В отличие от задачи с однородной концентрацией примесей в покоящемся слое возмущение концентрации проявляется уже в первом приближении по амплитудному параметру. На рис. 9 представлено возмущение концентрации дисперсной фазы в начальный момент времени. Возмущение носит волновой характер и является периодическим по x^* с периодом равным длине волны. С глубиной возмущение уменьшается и становится практически незаметным при $z^* = -1$ м. По мере прохождения волны возмущение концентрации быстро затухает (рис. 10). Расчеты были выполнены для среды с параметрами: $l^* = 10$ м, $\lambda = 1$ м, $h = 0,1$ м, $\rho_1^0 = 1000$ кг/м³, $\eta = 1,004$ кг/(м·с), $a = 0,25 \cdot 10^{-2}$ м, $\alpha_0 = 0,1$, $\delta^* = 0,05$ 1/м, $\rho_2^0 = 1500$ кг/м³.

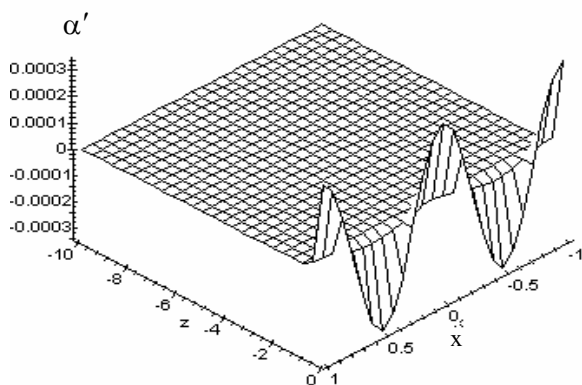


Рис. 9. Начальное возмущение концентрации дисперсной фазы α' .

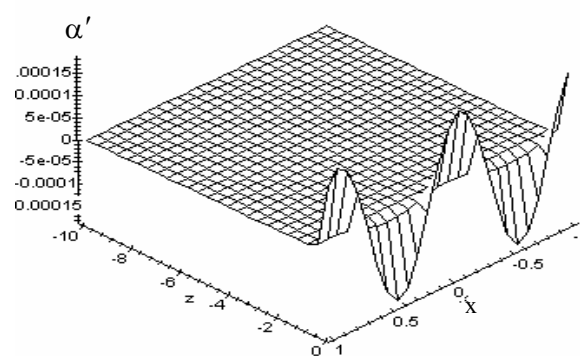


Рис. 10. Возмущение концентрации дисперсной фазы α' в момент времени $t=300$ с.

В заключении приведены основные результаты и выводы диссертации:

1. Построена математическая модель распространения поверхностных волн малой амплитуды по слою дисперсной смеси конечной глубины.
2. В нелинейной постановке исследованы плоские и пространственные волны на свободной поверхности смеси с однородным распределением частиц в покоящемся слое. С точностью до второго приближения по малому амплитудному параметру найдены поле скоростей, давления и концентрации фаз, форма свободной поверхности. Получены аналитические выражения для фазовой скорости и декремента затухания волны. Исследована зависимость решения от длины волны и параметров среды.
3. Наличие в жидкости дисперсной фазы приводит к затуханию поверхностной волны за счет межфазного трения. Волны на свободной поверхности смеси, содержащей легкие, по сравнению с несущей жидкостью, примеси гаснут быстрее, чем на поверхности смеси жидкости с более тяжелыми частицами.
4. Наличие дисперсной фазы оказывает двойное влияние на фазовую скорость волны. С одной стороны оно приводит к увеличению значения фазовой скорости по сравнению со скоростью гравитационной волны в чистой жидкости, а с другой стороны к ее уменьшению за счет межфазного трения.

5. Учет силы присоединенных масс приводит к увеличению значения декремента затухания и общему снижению фазовой скорости волны по сравнению со значениями, полученными только с учетом силы трения Стокса.
6. Возмущение концентрации дисперсной фазы является величиной более низкого порядка по сравнению с остальными волновыми возмущениями.
7. Траектории частиц несущей и дисперсной фазы в линейном приближении являются разомкнутыми, что объясняется затуханием волны. При малом влиянии сил трения траектории практически являются эллипсами, что соответствует классическим результатам. Дисперсные частицы с меньшей, по сравнению с несущей жидкостью, плотностью ($\rho_2^0 < \rho_1^0$) движутся по траекториям большего размера, чем при $\rho_2^0 > \rho_1^0$.
8. В линейном приближении по малому амплитудному параметру исследовано распространение плоских поверхностных волн на слое двухфазной смеси в случае неоднородной концентрации примесей. Получено асимптотическое решение соответствующей краевой задачи в виде рядов по малому параметру, характеризующему неоднородность распределения дисперсной фазы. Найдено условие применимости предложенной математической модели.
9. Учет неоднородности распределения примесей по глубине приводит к снижению фазовой скорости по сравнению с фазовой скоростью волны, распространяющейся по свободной поверхности среды с равномерным распределением примесей в покоящемся слое.
10. Возмущение концентрации дисперсной фазы, как и в случае равномерного распределения примесей в отсутствие волны, является малой величиной по сравнению с остальными волновыми возмущениями, но отлично от нуля уже в линейном приближении по амплитудному параметру.
11. Для поверхностных волн на слое двухфазной среды справедливы классические результаты теории волн. Поправка к значению фазовой скорости во втором приближении по малому амплитудному параметру равна нулю. Для волновой поверхности имеет место нелинейный эффект Стокса: гребень нелинейной волны уже, а впадина шире.

Основное содержание диссертации опубликовано в следующих работах:

1. Бутакова Н. Н. Поверхностные волны на слое дисперсной жидкости // Материалы международной конференции студентов и аспирантов по фундаментальным наукам « Ломоносов – 2000». Москва: Изд-во Моск. ун-та, 2000. Вып. 4. С. 323.
2. Баринов В. А., Бутакова Н. Н. Поверхностные волны на слое дисперсной жидкости // Математическое и информационное моделирование. Тюмень: Изд-во Тюмен. ун-та, 2000. С. 57- 63.
3. Бутакова Н. Н. Поверхностные волны на слое дисперсной жидкости // Материалы международной конференции молодых ученых. Ишим: Изд-во Ишим. пед. ин-та, 2001. С. 146-148.
4. Баринов В. А., Бутакова Н. Н. Исследование распространения волн по свободной поверхности двухфазной жидкой смеси // Вестник ТюмГУ. 2001. №2. С.182-190.
5. Баринов В. А., Бутакова Н. Н. Моделирование волн на свободной поверхности двухфазной среды // Труды IV международной научно-технической конференции «Математическое моделирование физических, экономических, технических, социальных систем и процессов». Ульяновск: Изд-во Ульян. ун-та, 2001. С.5-7.
6. Баринов В. А., Бутакова Н. Н. Нелинейные волны на свободной поверхности дисперсной смеси // Тр. Средневолж. матем. о-ва. 2002. Т.3-4. №1. С.47-53.
7. Баринов В. А., Бутакова Н. Н. Нелинейная задача о волнах на свободной поверхности двухфазной смеси // Математическое и информационное моделирование. Тюмень: Изд-во Тюмен. ун-та, 2002. Вып. 4. С. 133-144.
8. Баринов В. А., Бутакова Н. Н. Нелинейные волны на свободной поверхности дисперсной смеси // Материалы Всероссийской конференции «Теория и приложения задач со свободными границами». Барнаул: Изд-во АлтГУ, 2002. С. 10-12.

9. Баринов В.А., Бутакова Н.Н. Волны на свободной поверхности двухфазной среды // Прикл. мех. и техн. физ. 2002. Т.43. №4. С.27-35.
10. Баринов В. А., Бутакова Н. Н. Пространственная задача о волнах на свободной поверхности двухфазной смеси // Вестник ТюмГУ. 2002. №3. (в печати)
11. Баринов В. А., Бутакова Н. Н. Волны на свободной поверхности смеси с неоднородной концентрацией дисперсной фазы // Вестник ТюмГУ. 2002. №3. (в печати)
12. V. A. Barinov, N. N. Butakova. Waves on the free surface of a two-phase medium// J. of Appl. Mech. and Tech. Phys. 2002. Vol. 43. № 4. pp. 512-518.