

На правах рукописи

ГЕРБЕР Евгений Александрович

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ДВИЖЕНИЯ И ТЕПЛОПЕРЕНОСА
В ПЛОСКОМ КОЛЬЦЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ
СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ**

Специальность 05.13.18 – математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Тюмень – 2011

Работа выполнена на кафедре алгебры и математической логики Института математики, естественных наук и информационных технологий ФГБОУ ВПО Тюменский государственный университет.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
КУТРУНОВ Владимир Николаевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
БАУТИН Сергей Петрович
(Уральский государственный университет
путей сообщения)

доктор физико-математических наук, профессор
ФЕДОРОВ Константин Михайлович
(Тюменский государственный университет)

Ведущая организация: Сибирский Государственный Аэрокосмический
Университет имени академика М.Ф. Решетнева

Защита диссертации состоится « 19 » декабря 2011 г. в 14 часов на заседании диссертационного совета Д 212.274.14 при Тюменском государственном университете по адресу 625003, г. Тюмень, ул. Перекопская, 15А, ауд. 410.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Тюменского государственного университета.

Автореферат разослан « » ноября 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета

А.А. Ступников

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

В данной работе рассматривается задача о движении вращающегося по инерции плоского кольца вязкой капиллярной жидкости и влиянии его динамики на поле температур. Аналогом изучаемого объекта при ряде ограничений могут быть срезы вихревых колец. Вихревые кольца, в свою очередь, имеют большое влияние на многие технологические процессы. Например, они появляются при истечении газа или жидкости из сопла, в турбулентном слое при обтекании воздухом крыла самолета, могут использоваться при тушении нефтяных пожаров и в других технологиях. Помимо этого форму колец в срезе имеют такие объекты как торнадо, подводные вихри, а если перейти к макромасштабам, то окажется, что формой колец обладают некоторые галактики, которые называют кольцевыми. Человечество давно и пристально изучает все эти явления, так как некоторые из них носят разрушительный характер, другие существенно влияют на движущиеся объекты, третьи представляют интерес с позиции возникновения, развития и будущего вселенной. Таким образом, задача об описании динамики кольца жидкости и о распространении тепла внутри него, безусловно, является актуальной. Тем более, что именно сейчас появились эффективные средства компьютерного моделирования, которые позволяют установить закономерности, свойственные изучаемым объектам. Имея адекватную математическую модель описания вышеупомянутых объектов, появляется возможность поиска закономерностей тепломассопереноса, свойственных кольцу жидкости, что также является актуальным, ввиду распространенности явления.

Дополнительно, в работе численно и аналитически изучается вопрос о различиях классической и неклассической моделей гидродинамики на примере задачи о динамике плоского кольца жидкости. Неклассическая модель упоминалась в работах В.К. Андреева, Б.Д. Аннина, В.В. Бублика, С.И. Сенашева, и активно продвигалась В.О. Бытевым.

Цель работы

Целью данной работы является аналитическое и численное исследование динамики кольца жидкости и процессов теплопереноса в нем. Анализ влияния физических и геометрических характеристик кольца на его динамику. Поиск эффектов появляющихся в рамках неклассической модели. Реализация соответствующих алгоритмов в виде программного комплекса.

Научная новизна

В рамках данной диссертационной работы были получены следующие новые результаты, которые можно условно разделить на три группы:

Математическое моделирование: предложен новый метод математического моделирования динамики кольца вязкой жидкости со свободными границами, заключающийся в том, что уравнения гидродинамики используемые в качестве математической модели этого объекта преобразованы к уравнению нелинейного осциллятора.

В результате применения приближенных аналитических методов, получено гармоническое приближение нелинейного осциллятора, описывающего кольцо вязкой жидкости. В результате получены приближенные формулы для частоты колебаний и логарифмического декремента затухания колебаний, которые согласуются с численным экспериментом с точностью до 10%.

Проведено комплексное исследование динамики кольца вязкой жидкости, с применением современных технологий математического моделирования и вычислительного эксперимента. Получены аналитические формулы для поиска координат стационарного состояния динамической системы, с точностью до 1%. Обнаружены эффекты, появляющиеся в неклассической модели гидродинамики жидкого кольца. В рамках исследуемой математической модели обнаружены колебания кольца жидкости, проведена классификация колебаний.

Численные методы: для решения задачи о динамике кольца жидкости и теплопереноса в нем, впервые были применены эффективные численные мето-

ды, которые были протестированы на известных частных аналитических решениях. Проанализирована устойчивость реализованных численных методов.

Комплексы программ: Разработаны взаимосвязанные проблемно-ориентированные программные пакеты «Ring v1.1» и «Ring v1.2», в которых реализованы эффективные численные алгоритмы. Специально разработанное приложение «Makegraph», используемое для визуализации численных экспериментов, вместе с программными пакетами «Ring v1.1» и «Ring v1.2», образует комплекс программ для полного численного исследования.

Достоверность результатов

Достоверность результатов обеспечивается использованием классических уравнений гидродинамики (при решении задачи в рамках классической модели), применением известных математических методов. Достоверность результатов численного моделирования проверена сравнением с известными частными аналитическими решениями как для поля скоростей, так и для поля температур. Установлено качественное совпадение полученных результатов, с экспериментальными результатами других исследователей.

Практическая ценность

Аналитические исследования и численные результаты, получаемые с помощью программного комплекса могут быть использованы при анализе результатов натурных и лабораторных исследований плоских колец жидкости.

Полученные и описанные закономерности движения кольца жидкости расширяют наши знания о поведении исследуемых объектов, например, таких как торнадо, тайфун, кольцевая галактика, вихревое кольцо.

Полученные формулы для инженерных расчетов позволяют получить в первом приближении характеристики плоского кольца, такие как частота и декремент затухания колебаний. Кроме того, параметры предельных стационарных состояний динамической системы могут быть вычислены с помощью точных аналитических выражения для поиска координат.

Апробация работы

Основные результаты работы докладывались и обсуждались на научных конференциях: труды XIV молодежной научно-практической конференции «Наукоемкие информационные технологии» УГП имени А.К. Айламазяна, г. Переславль-Залесский, апрель 2010; Третья региональная научно-практическая конференция «Современные проблемы математического и информационного моделирования. Перспективы разработки и внедрения инновационных IT-решений», Тюмень, ТюмГУ, ИМиКН, 14-15 апреля 2010 года; Всероссийская научно-практическая конференция молодых ученых «Современные проблемы математики и её прикладные аспекты», Пермь, Пермский Государственный Университет, 12 марта 2010 года; XXIII международная научная конференция «Математические методы в технике и технологиях», Саратов, СГТУ, 22-25 июня 2010; Всероссийская конференция «Нелинейные волны: Теория и новые приложения» посвященная памяти чл.корр. РАН В.М.Тешукова и приуроченная к 65-летию со дня его рождения, Новосибирск, 2-4 марта 2011 года.

Публикации

По теме диссертации опубликовано 14 работ, в том числе пять в издании из списка, рекомендованного ВАК РФ, получено 2 сертификата о государственной регистрации программ для ЭВМ.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка использованных источников, пяти приложений, содержит 45 иллюстраций и 4 таблицы. Общий объем диссертации составляет 157 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность и практическая ценность темы исследования, описаны решаемые проблемы и цели исследования.

В первой главе приведена постановка задачи о движении кольца жидкости с двумя свободными границами, движущегося по инерции. Проведен обзор существующих постановок задач о движении кольца жидкости. На основании обзора постановок задачи движения кольца жидкости (Пухначев В.В., Лаврентьева О.М., Бытев В.О.), поставлена модифицированная задача о движении кольца вязкой капиллярной жидкости, в рамках классической модели гидродинамики. В этой постановке предполагается произвольным закон изменения давления на внутренней и внешней границах.

Плоская задача о динамике кольца жидкости выглядит следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} - \nu \Delta \vec{u} - \frac{1}{\rho} \nabla p = 0 \\ \nabla \vec{u} = 0 \\ T_{1r|1} \vec{n}_1 - T_{1r|2} \vec{n}_1 = 2\sigma H_1 \vec{n}_1 \\ T_{2r|1} \vec{n}_2 - T_{2r|2} \vec{n}_2 = 2\sigma H_2 \vec{n}_2 \\ \vec{u}|_{t=0} = \vec{u}_0 \end{array} \right. , \quad (1)$$

где ∇ - оператор Гамильтона, $\vec{u} = (u_x, u_y)$ - векторное поле скоростей, t - время, ρ - плотность, p - давление Δ - оператор Лапласа, ν - коэффициент кинематической вязкости, σ - коэффициент поверхностного натяжения, $T_{ir|j}$ - тензор напряжений жидкости на i -ой границе, $T_{ir|2}$ - тензор напряжений газа на i -ой границе, H_i - средняя кривизна на i -ой границе \vec{n}_i - вектор нормали на i -ой границе кольца, $i=1..2$.

Для описания динамики жидкости используется тензор напряжений характерный для классической стоксовой жидкости:

$$T = -pI + 2\mu D, \quad (2)$$

где p - гидростатическое давление, I - единичный тензор, μ - динамическая вязкость, $D_{ij} = (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i) / 2$ $i, j = 1, 2$ - тензор скоростей деформации.

Тензор напряжений газа на границах имеет вид:

$$T_{ir} = \begin{pmatrix} -p_{ig}(t) & 0 \\ 0 & -p_{ig}(t) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где T_{ir} - тензор напряжений контактирующей с жидкостью среды на i -ой границе, $p_{ig}(t)$ - закон изменения давления газа на i -ой границе, $i=1..2$.

Геометрическая часть постановки задачи (рис. 1): пусть $r = R_1(t)$, $r = R_2(t)$ - положение, соответственно, внешней и внутренней границ кольца.

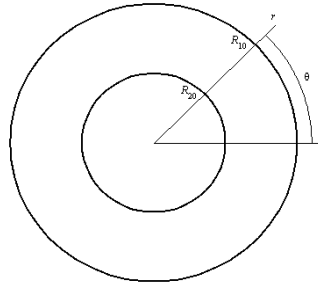


Рис. 1. Геометрия кольца жидкости

Здесь R_{10} , $R_{20} > 0$ и R_{10} , R_{20} - положение свободных границ в нулевой момент времени.

Ход преобразований задачи (1) включал несколько этапов. Запись системы уравнений в полярной системе координат в предположении существования осевой симметрии ($\bar{u}(r), r \in [R_2(t), R_1(t)]$), переход к новой переменной η на основании следующих соотношений:

$$\xi(t) = R_2^2(t)/R_{20}^2; \eta = (r^2 - R_2^2(t))/R_{20}^2 = -\xi + r^2/R_{20}^2 \quad (4)$$

Соотношения (4) приводят интервал значений безразмерной пространственной переменной η к не изменяющемуся во времени отрезку $[0, a]$, где $a = R_{10}^2/R_{20}^2 - 1$, причем $\eta = 0$ соответствует положению внутренней границы кольца, а $\eta = a$ - внешней.

Затем было проведено обезразмеривание времени и искомых функций по следующим формулам: $\tau = vt/R_{20}^2$, $\Psi = u_r r/v$, $\omega = u_\varphi R_{20}/v\sqrt{\xi + \eta}$. В результате преобразований получаем:

$$\begin{cases}
\frac{d\Psi}{d\tau} \ln\left(1 + \frac{a}{\xi}\right) - \frac{a(\Psi^2 - 4\Psi)}{\xi(a + \xi)} - \int_0^a \omega^2 d\eta - \int_0^a \frac{\partial \omega}{\partial \eta} d\eta = \\
= -\delta_1 (1/\sqrt{\xi} + 1/\sqrt{a + \xi}) + \delta_2 \delta p_{gaz}; \\
\Psi(0) = \Psi_0 \\
\frac{d\xi}{d\tau} = 2\Psi; \xi(0) = 1 \\
\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \frac{2\Psi \omega}{(\xi + \eta)} = 8 \frac{\partial \omega}{\partial \eta} + 4(\xi + \eta) \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2}; \omega(0, \eta) = \omega_0(\eta) \\
\left. \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right|_{\eta=0, a} = 0
\end{cases} \quad (5)$$

где $\delta_2 = 2R_{20}^2 \rho^{-1} \nu^{-2}$, $\delta_1 = 2R_{20} k_\sigma \sigma \nu^{-2} \rho^{-1}$ - комбинации величин, в которых, k_σ - множитель, учитывающий наличие или отсутствие сил поверхностного натяжения, может принимать значения 1 или 0, $\delta p_{gaz} = p_{2g}(t) - p_{1g}(t)$ - разность давлений между давлением внутри полости и снаружи.

Задача (5), на текущий момент, не имеет общего аналитического решения, в связи с этим для ее решения был разработан программный пакет «Ring v1.1», который был протестирован на единственном известном частном решении системы (5), найденном Бытевым В.О.

Кроме того, с помощью «Ring v1.1» были численно получены параметры теоретически предсказанных Лаврентьевой О.М и Бытевым В.О. режимов движения кольца жидкости, таких как: схлопывание кольца (изменение его топологии), неограниченное расширение кольца, и стационарный режим движения.

Показано, что в динамике кольцо совершает затухающие периодические колебания, которые в рамках данной модели были обнаружены впервые.

В главе сформулированы предпосылки постановки сквозной задачи о тепломассопереносе внутри кольца жидкости, заключающейся сначала в поиске поля скоростей, а затем в его использовании для поиска поля температур.

Вторая глава посвящена постановке сквозной задачи тепломассопереноса. Помимо включения в рассмотрение нестационарного уравнения теплопроводности, приведено обобщение задачи (5), связанное с использованием определяющих соотношений свойственных неклассической модели гидродинамики, о которой идет речь в работах Андреева В.К., Аннина Б.Д., Бытева В.О., Бублика В.В., Сенашева С.И. Тензор напряжений в этом случае имеет вид:

$$T = -pI + 2MD \quad (6)$$

где $M = \begin{pmatrix} \mu & \mu_0 \\ -\mu_0 & \mu \end{pmatrix}$ - матрица динамической вязкости, μ_0 - недиссипативная динамическая вязкость.

Задача о динамике кольца жидкости с учетом (6), после преобразований, аналогичных описанным в первой главе, запишется в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\Psi}{d\tau} \ln(1+a/\xi) - \frac{a(\Psi^2 - 4\Psi)}{\xi(a+\xi)} - \int_0^a \omega^2 d\eta - \\ -4\varepsilon(\omega(a, \tau) - \omega(0, \tau)) = -\delta_1 (1/\sqrt{\xi} + 1/\sqrt{a+\xi}) + \delta_2 \cdot \delta p_{gz}; \Psi(0) = \Psi_0; \\ \frac{d\xi(\tau)}{d\tau} = 2\Psi; \xi(0) = 1; \\ \frac{\partial\omega}{\partial\tau} + \frac{2\Psi\omega}{(\xi+\eta)} = 8\frac{\partial\omega}{\partial\eta} + 4(\xi+\eta)\frac{\partial^2\omega}{\partial\eta^2}; \\ \left(\frac{\partial\omega}{\partial\eta} + \frac{\varepsilon}{(\xi+\eta)^2} \Psi \right) \Big|_{\eta=0,a} = 0; \omega(\eta, 0) = \omega_0(\eta); \end{array} \right. \quad (7)$$

где $\nu_0 = \mu_0 / \rho$ - недиссипативная кинематическая вязкость, $\varepsilon = \nu_0 / \nu$ - безразмерный параметр, согласно Андрееву В.К., Бублику В.В. и Бытеву В.О.-мера несоосности девиатора тензора напряжений и девиатора тензора скоростей деформации.

В сравнении с классической моделью здесь появляется ряд слагаемых, но, как легко убедиться, при $\varepsilon = 0$ получается постановка классической задачи.

В данной главе для неклассической постановки, в предположении адиабатического поведения газа внутри полости кольца ($p_{2g}(t) = p_{20} / \xi^\gamma$, p_{20} - начальное давление на внутренней границе, γ - показатель адиабаты), доказана теорема существования и единственности решения.

Кроме того, в главе поставлена задача о распределении тепла внутри кольца. В самом общем случае она имеет вид:

$$\rho C_p \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} = \text{div}(k \nabla \tilde{T}) + 2(MD) \cdot D; \tilde{T}_{t=0} = \tilde{T}_0; \quad (8)$$

$$k \frac{d\tilde{T}}{d\tilde{n}} \Big|_{1r} = \alpha_1 (\tilde{T} - \tilde{T}(t)_{1r}); k \frac{d\tilde{T}}{d\tilde{n}} \Big|_{2r} = \alpha_2 (\tilde{T} - \tilde{T}(t)_{2r})$$

где k - коэффициент теплопроводности, C_p - удельная теплоемкость, \tilde{T} - искомая температура, $\alpha_1 \alpha_2$ - коэффициенты поверхностного теплообмена. При

$\alpha_i \neq 0$ получаются условия типа Неймана, при $\alpha_i \rightarrow \infty$ - условия типа Дирихле. Компоненты тензора скоростей деформации D вычисляются после решении системы (7).

Показано, что прямое тензорное произведение $2(MD) \cdot D = 2\mu D \cdot D$. Таким образом, в конечном варианте записи задачи о распространении тепла недиссипативная вязкость отсутствует и её влияние осуществляется только косвенно, через поле скоростей. После перехода к безразмерным переменным и добавления начального и краевых условий для безразмерной температуры Θ получаем задачу:

$$A \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = B(\xi + \eta) \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \eta^2} + B \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} + \frac{\Phi^2}{(\xi + \eta)^2} + (\xi + \eta)^2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right)^2; \Theta(\eta, 0) = \Theta_0$$

$$\Theta|_{\eta=0,a} = f(\tau) \text{ или } \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} \Big|_{\eta=0,a} = f(\tau)$$
(9)

где $\Theta(r, t) = T(r, t)/T_{baz}$ - безразмерная температура, T_{baz} - температура, используемая для обезразмеривания, $A = \rho C_p R_{20}^2 T_{baz} / 4\mu$, $B = 4kR_{20}^2 T_{baz} / 4\mu$ - комбинации величин, используемые для упрощения записи.

Для решения сквозной задачи был разработан программный пакет «Ring v1.2», который был протестирован на единственном известном частном аналитическом решении задачи (7), и на единственном известном частном решении нестационарного уравнения теплопроводности (9).

Третья глава содержит все основные результаты работы, которые были получены путем анализа системы уравнений поставленной задачи и численного моделирования задачи тепломассопереноса.

Для численного моделирования динамики кольца жидкости использовался программный пакет «Ring v1.1». Написанный на его основе программный пакет «Ring v1.2» имеет более широкий функционал и позволяет проводить моделирование не только поля скоростей, но и поля температур. Результаты работы программ «Ring v1.1» и «Ring v1.2», обрабатывались с помощью программы «Makegraph», с целью получения наглядного графического представления.

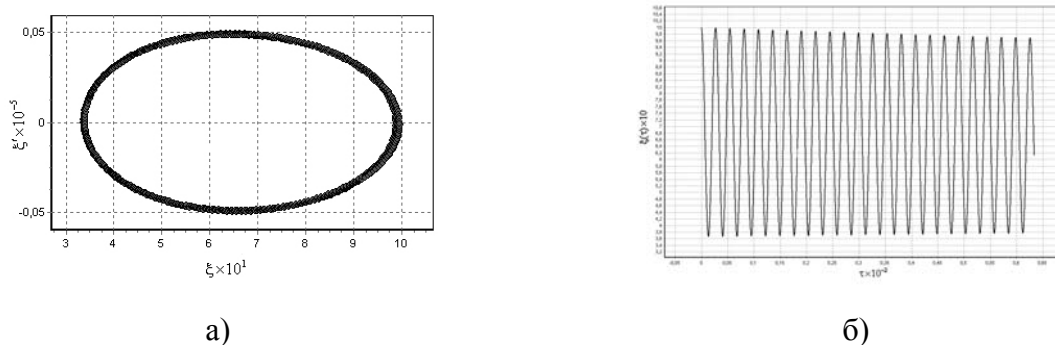


Рис. 2. Фазовый портрет для ξ (а) и зависимость $\xi(\tau)$ (б)

В рамках данной работы, были обнаружены колебания кольца жидкости (рис. 2). Из рисунка 2(б) видно, что с течением времени амплитуда колебательного процесса уменьшается и как показано далее, в пределе, равна нулю. Рисунки 2(а) и 2(б) изменятся, если увеличить вязкость. В этом случае колебательный процесс будет затухать значительно быстрее.

Для выявления механизмов связанных с возникновением колебаний, рассматривалась система, в которой силы инерции и силы вязкости в потоке жидкости соизмеримы. Это связано с тем, что в рамках данной работы исследование проводилось с помощью численных методов, то есть на конечном интервале времени. На нем, при значительном преобладании сил инерции над силами вязкости (или наоборот), моделируемая динамическая система может не успеть совершить ни одного колебания. Для наблюдения колебаний понадобится очень большой интервал времени. Отношением этих сил является число Рейнольдса: $Re = \rho u h / \mu$, где ρ - плотность, h - это характерный размер системы, в котором происходит перераспределение жидкости (толщина кольца), u - характерная скорость, μ - динамическая вязкость.

Для сокращения времени счета, входные данные для численного моделирования подбирались таким образом, чтобы число Рейнольдса попадало в интервал $Re \approx 1..1000$. Для этого были взяты следующие значения: использовались физические характеристики воды для кольца жидкости, которое находится в воздухе; размеры кольца измеряются в сантиметрах - $h = 10^{-2}$ м.; начальная безразмерная угловая скорость $\omega_0 = C_0 = 3000$, соответствует реальной угловой скорости $u_\varphi \approx 10^{-2}$ м/сек. (при этом в начальный момент времени предполагается

вращение кольца как жесткого целого); начальная безразмерная радиальная скорость $\Psi(0) \approx 10$, соответствует реальной скорости $u_r \approx 10^{-2}$ м/сек.

Результаты, полученные в рамках классической модели гидродинамики ($\varepsilon = 0$). Были выявлены основные факторы, влияющие на возникновение периодического движения: начальное вращение, сила поверхностного натяжения и переменное давление. Данные факторы были разделены на две группы:

- ◆ силы, направленные от центра кольца: положительное адиабатическое давление внутри полости p_2 , эффекты связанные с начальным вращением кольца ω_0 ;
- ◆ силы, направленные в центр кольца: положительное давление вне полости p_1 и эффекты связанные с наличием сил поверхностного натяжения σ .

На основании комбинации этих факторов можно ввести следующую классификацию колебаний по причинам их возникновения (см. Таблица 1, галочками отмечено наличие соответствующих факторов)

Таблица 1.

Классификация колебаний

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p_1	✓	✓			✓	✓		✓	✓
p_2	✓		✓			✓	✓	✓	✓
σ		✓		✓	✓	✓	✓		✓
ω_0			✓	✓	✓		✓	✓	✓

Отметим, что возникновение колебаний является физически ожидаемым результатом.

Периодический характер движения наблюдался у всех функций описывающих состояние изучаемой динамической системы (7) (9). Более того, численное моделирование показало, что период колебаний функций $\Psi, \xi, \omega, \Theta$ отвечающих за состояние системы одинаков. В связи с этим, анализ периодического режима движения проводился на основе функции $\xi(\tau)$, которая связана с

описанием размеров кольца, и, на взгляд автора, является наиболее иллюстративной.

Анализ динамической системы, описываемой системой дифференциальных уравнений (7), показал, что у этой системы существует особая точка типа фокус, с координатами $(\Psi = 0, \xi = \xi_*, \omega = C_0(a+2)/(a+2\xi_*))$, причем ξ_* является решением следующего нелинейного уравнения:

$$\delta_1 \left(\frac{1}{\sqrt{\xi_*}} + \frac{1}{\sqrt{a+\xi_*}} \right) = \delta_2 \left(\frac{p_{20}}{\xi_*} - p_{10} \right) + \frac{aC_0(a+2)^2}{\delta_1(a+2\xi_*)^2} \quad (10)$$

В результате сравнения ξ_* найденного на основе (10), и стационарного значения, найденного на основе численного моделирования при одних и тех же входных параметрах, было установлено, что они согласуются с погрешностью в 1%. Это означает, что стационарное состояние динамической системы можно находить по формулам (10) и еще раз подтверждает достоверность результатов численного моделирования.

В предположении, отсутствия вращений динамическая система (7) сводится к системе вида:

$$\begin{cases} \frac{d\Psi}{d\tau} = \frac{1}{\ln(1+\frac{a}{\xi})} \left\{ \frac{a(\Psi^2 - 4\Psi)}{\xi(a+\xi)} - \delta_1 \left(\frac{1}{\sqrt{\xi}} + \frac{1}{\sqrt{a+\xi}} \right) + \delta_2 \left(\frac{p_{20}}{\xi} - p_{10} \right) \right\} \\ \frac{d\xi}{d\tau} = 2\Psi \end{cases} \quad (11)$$

Если свести (11) к одному уравнению, то получим обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка, относительно искомой функции ξ :

$$\xi'' - \frac{2}{\ln(1+\frac{a}{\xi})} \left\{ \frac{a(\xi'^2 - 8\xi')}{4\xi(a+\xi)} - \delta_1 \left(\frac{1}{\sqrt{\xi}} + \frac{1}{\sqrt{a+\xi}} \right) + \delta_2 \cdot \delta p_{gaz} \right\} = 0 \quad (12)$$

Из рисунка 2 видно, что колебания происходят с одинаковой частотой. Более детальное численное исследование показало, что частота колебаний, в начале процесса и вблизи стационарного состояния изменяется незначительно, что позволило получить приближенные формулы для характеристик колебательного процесса. Для этого был проведен анализ уравнения (12) вблизи ста-

ционарного состояния, где величина ξ' (скорость изменения ξ) близка к нулю и она много меньше величины ξ . Кроме того, квадратом величины ξ' можно пренебрегать по сравнению с величиной ξ . Пользуясь этим и разложением в ряд Тейлора в окрестности ξ_* , можно преобразовать уравнение (12) к линейному дифференциальному уравнению колебаний при наличии сопротивления и без труда получить формулы для частоты колебаний и логарифмического декремента затухания.

В связи со сказанным полученные приближенные формулы распространяется не только на колебания в окрестности ξ_* , но и на колебания в начале процесса.

Полученные формулы приведены в Таблице 2.

Таблица 2. Приближенные формулы для инженерных расчетов

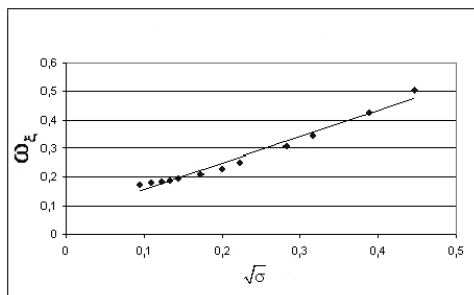
Описание	Формула
Частота колебаний безразмерного внутреннего радиуса ω_ξ	$\omega_\xi = \sqrt{\frac{4\sigma}{\rho R_{20}^3} (-\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) + \frac{4}{R_{20}^2 \rho \xi_s^\gamma} \left(\frac{\alpha_1 \gamma}{\xi_s} - \alpha_2 (p_{20} - p_{10} \xi_s^\gamma) \right)}$ <p>, где $\alpha_1 = 1/\ln(1+a/\xi_*)$, $\alpha_2 = a/\xi_*^2/\ln(1+a/\xi_*)$,</p> $\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{\xi_*}} + \frac{1}{\sqrt{a+\xi_*}}, \quad \beta_2 = \frac{1}{2\sqrt{\xi_*^3}} + \frac{1}{2\sqrt{(a+\xi_*)^3}}.$
Логарифмический декремент затухания колебаний безразмерного внутреннего радиуса δ_ξ	$\delta_\xi = \frac{2\pi d_\xi}{\omega_\xi}, \quad \text{где}$ $d_\xi = \frac{2}{\ln(1+a/\xi_*)} \frac{\nu a}{R_{20}^2} \frac{1}{\xi_* (a+\xi_*)}.$

В частности, из формулы для частоты колебаний следует, что частота колебаний, в первом приближении, не зависит от коэффициента кинематической вязкости (ν), а её величина прямо пропорциональна $\sqrt{\sigma}$, обратно пропорциональна $\sqrt{\rho}$ и $\sqrt{R_{20}^3}$, кроме того, она сложным образом зависит от безразмерной ширины кольца a .

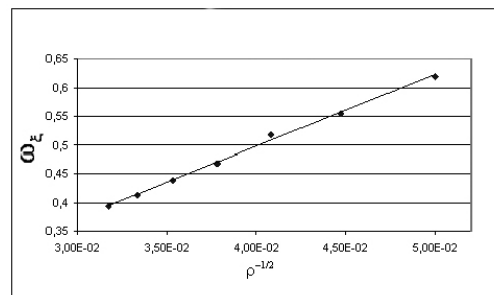
Логарифмический декремент затухания оказался прямо пропорционален коэффициенту кинематической вязкости ν и обратно пропорционален R_{20}^2 .

Справедливость приближенных формул была проверена результатами численного моделирования. Например, величина частоты колебаний полученная по формуле, согласуется с найденной, с помощью программного пакета «Ring v1.2», с точностью порядка 10 %, что подтверждает верность выбранного подхода к получению приближенных формул.

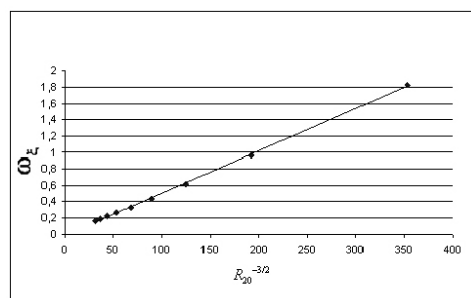
На рисунке 3, представленном ниже, приведено сопоставление результатов численных экспериментов с полученными аналитическими зависимостями (точками изображены значения частоты и декремента затухания, найденные с помощью численных экспериментов, линиями – аналитические зависимости из таблицы 2).



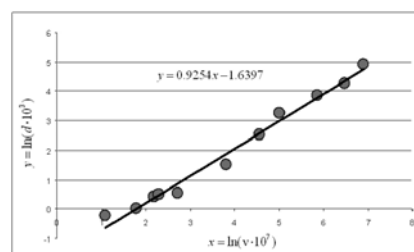
а) зависимость частоты от коэффициента поверхностного натяжения



б) зависимость частоты от плотности



в) зависимость частоты от начального внутреннего радиуса



г) зависимость логарифмического декремента затухания от вязкости

Рис. 3. Зависимость частоты и декремента затухания колебаний от физических и геометрических характеристик динамической системы

Поведение остальных функций $\Psi(\tau), \omega(\tau, \eta)$, описывающих состояние динамической системы, подтверждает наличие аналогичных периодических зависимостей.

При анализе температурного поля было установлено, что монотонный рост температуры разбит по времени на характерные интервалы, равные периоду колебаний кольца.

Результаты, полученные в рамках неклассической модели гидродинамики ($\varepsilon \neq 0$). При исследовании влияния недиссипативной вязкости на динамику кольца жидкости, было обнаружено, что новая вязкость усиливает действие обычной диссипативной вязкости, при этом знак ε не имеет значения.

При моделировании поведения объекта в осесимметричном случае в отсутствии начальных вращений при $\varepsilon \neq 0$, был обнаружен эффект появления вращения кольца, причем направление вращения напрямую зависело от знака ε .

При исследовании вопросов влияния параметра ε на распределение поля температур была обнаружена квадратичная зависимость тепла, выделенного за один период колебаний, от ε .

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

В заключении дан обзор основных результатов, полученных в рамках данной диссертационной работы. К ним относятся:

Новый метод математического моделирования динамики кольца вязкой жидкости со свободными границами, заключающийся в том, что уравнения гидродинамики используемые в качестве математической модели этого объекта преобразованы к уравнению нелинейного осциллятора.

Приближенные формулы для инженерных расчетов, для частоты колебаний, логарифмического декремента затухания колебаний и для поиска координат стационарного состояния динамической системы. Полученные формулы согласуются с численным экспериментом с точностью от 1% до 10%.

Анализ механизмов возникновения и классификация колебаний жидкого кольца.

Описание эффектов, появляющихся в неклассической модели гидродинамики жидкого кольца.

Разработанные и протестированные численные методы, которые впервые применялись для решения задачи о движениях плоского кольца вязкой жидкости

Разработанные проблемно-ориентированные программные пакеты «Ring v1.1» и «Ring v1.2». Созданный комплекс программ, включающий в себя программные пакеты «Ring v1.1» и «Ring v1.2», а так же дополнительные программные модули и приложение «Makegraph».

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Основное содержание диссертационной работы опубликовано в 14 статьях. Пять из них опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК РФ.

1. Бытев В.О., Гербер Е.А., О восстановлении точного решения и о распространении температуры в жидком кольце // Современные проблемы математического и информационного моделирования решений. Перспективы разработки и внедрения инновационных IT - Тюмень: Издательство «Вектор Бук», 2009. – с. 25-31

2. Бытев В.О., Гербер Е.А. Динамика кольца двухвязкостной жидкости // Вестник Самарского государственного университета 2010 / 4 (78) – с.21-27

3. Бытев В.О., Гербер Е.А. Об одной задаче с двумя свободными границами // Современные проблемы в математике и их прикладные аспекты – 2010. Пермь 2010 – с. 100

4. Бытев В.О., Гербер Е.А. Влияние недиссипативной вязкости на динамику жидкого кольца // Математические Методы в Технике и Технологиях - ММТТ- 23 – Саратов, изд-во СГТУ 2010 – с 96-99

5. Бытев В.О., Гербер Е.А. Численное моделирование динамики жидкого кольца // XIV Молодежная научная конференция «Наукоемкие информационные технологии». Переславль-Залесский: изд-во «Университет города Переславля», 2010 - с. 109-115

6. Бытев В.О., Гербер Е.А. Изучение поведения кольца несжимаемой жидкости путем численного моделирования // Современные проблемы математического и информационного моделирования решений. Перспективы разра-

ботки и внедрения инновационных IT. Тюмень: изд-во «Вектор Бук», 2010 – с. 68-73

7. Гербер Е.А., Кутрунов В.Н., О механизме и закономерностях периодических движений кольца капиллярной жидкости // Вестник ТюмГУ. Тюмень. 2011. №7. с.136-142

8. Гербер Е.А., Кутрунов В.Н., О движении кольца вязкой несжимаемой капиллярной жидкости // Научно-технический вестник Поволжья №1 2011 – Казань: Научно-технический вестник поволжья, 2011 – с. 105-109

9. Бытев В.О., Гербер Е.А. Численный эксперимент по определению температуры внутри вращающегося по инерции жидкого кольца со свободными границами // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2011 Вып. 1 – Тула: изд-во ТулГУ, 2011 – с. 103-112

10. Бытев В.О., Гербер Е.А. Распределение температуры внутри кольца неклассической жидкости с двумя свободными границами // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11., вып. 3, Ч. 2. С. 81-86.

11. Гербер Е.А., Кутрунов В.Н. Периодическое движение жидкого кольца // Математические Методы в Технике и Технологиях - ММТТ- 24 – Саратов, изд-во СГТУ 2011 – с 126-128

12. Гербер Е.А., Кутрунов В.Н., Движение кольца вязкой капиллярной жидкости // Всероссийская конференция Нелинейные волны: теория и новые приложения. посвященная памяти чл.корр. РАН В.М. Тешукова и приуроченная к 65 летию со дня его рождения. Тезисы докладов. Новосибирск. Изд-во ИГиЛ СО РАН 2011 - с. 23-24

13. Бытев В.О., Гербер Е.А. «Ring v1.1» // Свидетельство государственной регистрации программы для ЭВМ №2010614880

14. Гербер Е.А., Кутрунов В.Н. «Ring v1.2» // Свидетельство государственной регистрации программы для ЭВМ №2011613120