

Юрий Евгеньевич ЯКУБОВСКИЙ¹
Василий Иосифович КОЛОСОВ²
Ирина Адольфовна ДОНКОВА³
Сергей Олегович КРУГЛОВ⁴

УДК 539.5

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЯЗКОУПРУГИХ СВОЙСТВ СТАРЕЮЩЕГО МАТЕРИАЛА

¹ доктор технических наук, профессор
кафедры прикладной механики,
Тюменский индустриальный университет
yakubov@tyuiu.ru

² кандидат технических наук, доцент
кафедры прикладной механики,
Тюменский индустриальный университет
kolosova_1_v@mail.ru

³ кандидат технических наук, доцент
кафедры программного обеспечения,
Тюменский государственный университет
irina_donkova@mail.ru

⁴ аспирант кафедры прикладной механики,
Тюменский индустриальный университет
skrugloff@mail.ru

Аннотация

Целью исследования является разработка формы записи ядер ползучести, позволяющих получить представления для расчета кривых ползучести. На основе теории упруго-ползучего тела показана возможность аналитического исследования быстронатекающей ползучести. Определены новые ядра для описания ползучести стареющих материалов.

Цитирование: Якубовский Ю. Е. Моделирование вязкоупругих свойств стареющего материала / Ю. Е. Якубовский, В. И. Колосов, И. А. Донкова, С. О. Круглов // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2018. Том 4. № 4. С. 181-190.
DOI: 10.21684/2411-7978-2018-4-4-181-190

Построено ядро ползучести, которое содержит выражение для описания свойств стареющего материала. Показаны основные этапы формирования предлагаемого ядра ползучести. Соответствие предлагаемых расчетов реальным процессам доказано сравнением с экспериментальными данными. В численной реализации использовано разложение подынтегральных выражений в степенные ряды. На основе экспериментальных данных определены параметры ядер ползучести. Параметры определялись путем минимизации среднеквадратичного отклонения расчетных данных от экспериментальных. Описанный подход моделирования вязкоупругих свойств материала позволяет спрогнозировать перераспределение усилий во времени в слоях составных конструкций.

Ключевые слова

Составные конструкции, ядро ползучести, вязкоупругие свойства, стареющий материал.

DOI: 10.21684/2411-7978-2018-4-4-181-190

Введение

Современный этап развития промышленности характеризуется совершенствованием технических параметров строительных конструкций, повышением их надежности и износостойкости. В рыночных условиях происходит быстрая смена конструкционных материалов. Это связано со снижением материалоемкости при одновременном увеличении прочности, долговечности и экономичности. Решение задачи проектирования сооружений состоит в совершенствовании общих конструктивных схем и методов их расчета, в разработке эффективных элементов конструкций и применении новых высокопрочных материалов. Один из типов современных эффективных конструкций являются составные оболочки, плиты (пластины) и балки [8, 10]. Отдельные элементы подобных конструкций выполнены из различных материалов: полимерных, композитных и т. д. Как наиболее дешевый материал используется бетон. Связи между слоями составных пластин могут быть обеспечены клеевым соединением или анкерами [12, 13].

Практика показывает, что при эксплуатации составных систем имеют место пластические деформации и ползучесть. В вязкоупругом материале при постоянной нагрузке деформации во времени возрастают (накапливаются). Это приводит к качественному и значительному количественному изменению напряженно-деформированного состояния (НДС): уменьшению жесткости, перераспределению усилий между элементами конструкции и др. В отличие от решений в задачах упругости [5, 6], где НДС зависит лишь от пространственных координат, компоненты НДС вязкоупругого материала изменяются во времени [2-5, 7]. Для описания указанных явлений требуется создание специальных физических и математических моделей и методов.

В статье предложена запись соотношений между напряжениями и деформациями для стареющего материала. На основе теории упруго-ползучего тела показана возможность аналитического описания быстроснатекающей ползучести. С использованием методики Н. Х. Арутюняна и А. А. Зевина [1, 2] построены

новые ядра ползучести применительно к стареющему материалу. Рассмотрена численная реализация ядер на примере экспериментальных данных А. А. Росса [10]. Приведена оценка погрешности.

Основная часть

Предполагается, что материал конструкции обладает свойствами ползучести и старения. Тогда в линейной теории упруго-ползучего тела при одноосном напряженном состоянии связь между напряжениями $\sigma(t)$ и деформациями $\varepsilon(t)$ в такой конструкции имеет вид [10]:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} + \frac{1}{E(t)} \int_{\tau_0}^t K(t, \tau) \sigma(\tau) d\tau, \tag{1}$$

где $\varepsilon(t)$ — компоненты деформации в момент времени t ; $\sigma(t)$ — компоненты напряжений в момент времени t ; $E(t)$ — модуль упругости мгновенной деформации; $K(t, \tau)$ — ядро ползучести; t — рассматриваемый момент времени; τ — промежуточный момент времени; τ_0 — момент приложения напряжений $\sigma(t)$.

Целью исследования является разработка формы записи ядер ползучести, позволяющих получить «формульные» представления для расчета кривых ползучести. С использованием методики [10] определены новые ядра для описания ползучести стареющих материалов. Показана возможность вычисления полученных функций с помощью степенных рядов для достаточно широкого интервала времени [4, 10].

Для описания соотношений между напряжениями и деформациями в соответствии с методикой Н. Х. Арутюняна и А. А. Зевина осуществлено построение новых ядер с учетом старения материала [2, 9, 10]:

$$K_1(t, \tau) = Q(t, \tau) + B(t - \tau) + \int_{\tau}^t Q(s) B(s - \tau) ds, \tag{2}$$

$$K_2(t, \tau) = Q(t, \tau) + B(t - \tau) + Q(\tau) \int_{\tau}^t B(t - s) ds.$$

В формулах (2) приняты следующие обозначения: $K_1(t, \tau)$, $K_2(t, \tau)$ — ядра ползучести стареющего материала; $Q(t, \tau)$ — регулярная часть ядра ползучести; $B(t - \tau)$ — разностная часть ядра ползучести; $(t - \tau)$ — разностный аргумент; t — рассматриваемый момент времени; τ — промежуточный момент времени; s — промежуточный аргумент.

В качестве разностной составляющей использовано удовлетворяющее всем необходимым требованиям слабосингулярное ядро [7, 10]:

$$B(t - \tau) = \chi e^{-\rho(t-\tau)^\alpha} (t - \tau)^{\vartheta-1} \frac{1}{\Gamma(\vartheta)}, \tag{3}$$

где $B(t - \tau)$ — разностная часть ядра ползучести; $\Gamma(\vartheta)$ — Гамма-функция; χ , ρ , ϑ — параметры ядра; $\chi > 0$; $\rho > 0$; $\vartheta \in (0; 1)$; $\alpha \in (0; 1)$; $(t - \tau)$ — разностный аргумент; t — рассматриваемый момент времени; τ — промежуточный момент времени.

Введение параметра α расширяет возможность вычисления функции с помощью степенных рядов в более широком интервале времени по сравнению с вариантом, когда $\alpha = 1$ (ядро А. Р. Ржаницына) [7].

В качестве регулярной составляющей использовано ядро, в основе которого мера ползучести вида [9, 10]:

$$\begin{aligned} Q(t, \tau) &= -\frac{\partial}{\partial \tau} [C_0 + Ae^{-\beta\tau}][1 - e^{-\gamma(t-\tau)}] = \\ &= \sum_{k=1}^3 a_k e^{-\gamma_k t} e^{\alpha_k \tau}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \beta A, \quad a_2 = C_0 \gamma, \quad a_3 = A(\gamma - \beta), \\ \alpha_1 &= -\beta, \quad \alpha_2 = \gamma, \quad \alpha_3 = \gamma - \beta, \quad \gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma, \end{aligned}$$

где $Q(t, \tau)$ — регулярная часть ядра ползучести; $(t - \tau)$ — разностный аргумент; t — рассматриваемый момент времени; τ — промежуточный момент времени.

Согласно работе [2], для регулярного ядра резольвента примет вид:

$$\begin{aligned} G(t, \tau) &= Q(t, \tau) e^{(-\int_{\tau}^t Q(t,s) ds)} = \\ &= \sum_{k=1}^3 a_k e^{\alpha_k \tau - \gamma_k t} e^{-[C_0 + Ae^{-\beta\tau}][1 - e^{-\gamma(t-\tau)}]}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $G(t, \tau)$ — резольвента регулярного ядра; $Q(t, \tau)$ — регулярная часть ядра ползучести; $(t - \tau)$ — разностный аргумент; t — рассматриваемый момент времени; τ — промежуточный момент времени; s — промежуточный аргумент.

Подставляя выражения (3) и (4) в выражения для ядра (2), имеем:

$$\begin{aligned} K_r(t, \tau) &= Q(t, \tau) + B(t - \tau) + \\ &+ \frac{\chi}{\Gamma(\vartheta)} \sum_{k=1}^3 [a_k e^{\alpha_k \tau - \gamma_k t} \int_0^{t-\tau} e^{\eta_{rk} z - \rho z^\alpha} z^{\vartheta-1} dz], \end{aligned} \quad (6)$$

где $r = 1, 2$; $\eta_{1k} = \alpha_k$; $\eta_{2k} = \gamma_k$; a_k, χ — искомые параметры; $Q(t, \tau)$ — регулярная часть ядра ползучести; $B(t - \tau)$ — разностная часть ядра ползучести; $\Gamma(\vartheta)$ — Гамма-функция; $(t - \tau)$ — разностный аргумент; t — рассматриваемый момент времени; τ — промежуточный момент времени; z — промежуточный аргумент.

В результате интегрирования выражения (6) получается:

$$\begin{aligned} V_r(t, \tau) &= \int_{\tau}^t K_r(t, s) ds = \\ &= -\frac{\partial}{\partial s} \int_{\tau}^t [C_0 + Ae^{-\beta s}][1 - e^{-\gamma(t-s)}] ds + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\chi}{\Gamma(\vartheta)} \int_{\tau}^t e^{-\rho(t-s)\alpha} (t-s)^{\vartheta-1} ds + \\
 & + \frac{\chi}{\Gamma(\vartheta)} \sum_{k=1}^3 a_k e^{-\gamma_k t} \int_{\tau}^t [e^{\alpha_k s} \int_0^{t-s} e^{\eta_{rk} z - \rho z^\alpha} z^{\vartheta-1} dz] ds = \\
 & = [C_0 + A e^{-\beta \tau}] [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}] + \\
 & \quad + \frac{\chi}{\Gamma(\vartheta)} \left(\int_0^{t-\tau} e^{-\rho z^\alpha} z^{\vartheta-1} dz + \right. \\
 & \quad + \sum_{k=1}^3 \frac{a_k}{\alpha_k} e^{-\gamma_k t} [e^{\alpha_k t} \int_0^{t-\tau} e^{\eta_{rk} z - \rho z^\alpha} z^{\vartheta-1} dz - \\
 & \quad \left. - e^{\alpha_k \tau} \int_0^{t-\tau} e^{\eta_{rk} z - \rho z^\alpha} z^{\vartheta-1} dz \right]), \\
 & \quad \aleph_{1k} = 0, \quad \aleph_{2k} = \gamma_k - \alpha_k,
 \end{aligned} \tag{7}$$

где $V_r(t, \tau)$ — интеграл ядра ползучести; $\Gamma(\vartheta)$ — Гамма-функция; $K_r(t, s)$ — ядра ползучести стареющего материала ($r = 1; 2$); $(t - \tau)$ — разностный аргумент; t — рассматриваемый момент времени; τ — промежуточный момент времени, z — промежуточный аргумент.

Для численной реализации (4) экспоненциальные функции в подынтегральном выражении (7) раскладываются в степенной ряд Маклорена. При удержании первых трех членов ряда получен следующий результат:

$$\begin{aligned}
 V_r(t, \tau) = & [C_0 + A e^{-\beta \tau}] [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}] + \frac{\chi}{\Gamma(\vartheta)} (t - \tau)^\vartheta (B \left[\frac{1}{9} - \right. \\
 & - \frac{\rho}{\alpha + \vartheta} (t - \tau)^\alpha + \frac{\rho^2 (t - \tau)^{2\alpha}}{4\alpha + 2\vartheta} \left. \right] + D_r \left(\frac{t - \tau}{\vartheta + 1} - \frac{\rho (t - \tau)^{\alpha + 1}}{\vartheta + \alpha + 1} + \right. \\
 & \left. + \frac{(t - \tau)^2}{2 + \vartheta} \sum_{k=1}^3 \frac{a_k}{\alpha_k} e^{-\gamma_k t} [e^{\alpha_k t} \aleph_{2k}^2 - e^{\alpha_k \tau} \eta_{2k}^2] \right)),
 \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$\begin{aligned}
 B & = 1 + \sum_{k=1}^3 \frac{a_k}{\alpha_k} e^{-\gamma_k t} (e^{\alpha_k t} - e^{\alpha_k \tau}); \\
 D_r & = \sum_{k=1}^3 \frac{a_k}{\alpha_k} e^{-\gamma_k t} (e^{\alpha_k t} \aleph_{rk} - e^{\alpha_k \tau} \eta_{rk}).
 \end{aligned}$$

Погрешность такого перехода определяется точностью счета интеграла. Численная реализация задачи показала, что при увеличении количества членов степенного ряда Маклорена результаты вычислений не выходят за пределы изменения результата 5%.

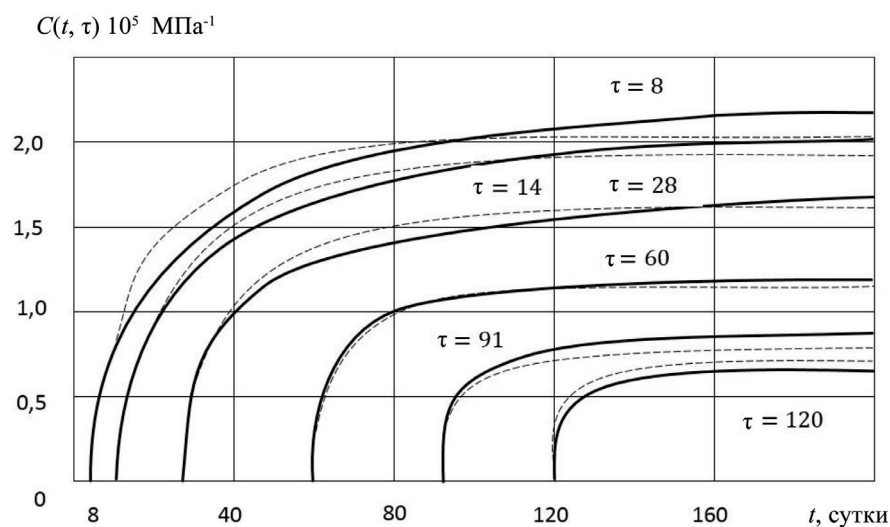


Рис. 1. Экспериментальные и теоретические кривые мер ползучести бетонных образцов разного возраста τ :
 — — — — экспериментальные данные;
 - - - - - аппроксимация эксперимента выражением (8)

Fig. 1. Experimental and theoretical curves of creep measures of concrete samples of different age τ :
 — — — — experimental data;
 - - - - - approximation of the experiment with formula (8)

Возможность использования полученных соотношений для описания ползучести реальных материалов была проверена на экспериментальных данных А. А. Росса [10]. Кривые ползучести, которые получены по данным эксперимента, и их аппроксимация приведены на рис. 1.

Мера ползучести вычислялась по формуле:

$$C(t, \tau) = \frac{V_r(t, \tau)}{E(t)} - \frac{1}{E(\tau)} + \frac{1}{E(t)}, \quad (9)$$

где $C(t, \tau)$ — мера ползучести; $V_r(t, \tau)$ — интеграл ядра ползучести стареющего материала; $E(t)$ — модуль упругости; $E(\tau)$ — коэффициент жесткости бетона в разном возрасте τ .

На интервале времени (рис. 1) показаны экспериментальные кривые $C(t, \tau)$. Переход от меры ползучести $C(t, \tau)$ к интегралу $V_r(t, \tau)$ произведен с использованием методики [2]. Расчеты показали, что НДС составных конструкций существенно зависит от возраста материала τ в момент нагружения. Происходят как количественные, так и качественные изменения в распределениях напряжений, усилий и моментов.

Заключение

Сравнение результатов, полученных при реализации предлагаемой математической модели, и экспериментальных данных показало расхождение не более

10%, что подтверждает достоверность проведенных исследований. Полученные результаты являются теоретическим обоснованием решений нелинейных задач деформирования составных пластин и оболочек с учетом ползучести, что позволяет получить прогнозные оценки поведения конструкций в реальных условиях эксплуатации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арутюнян Н. Х. Об одном классе ядер ползучести стареющих материалов / Н. Х. Арутюнян, А. А. Зевин // Прикладная механика. 1982. Том 8. № 4. С. 14-21.
2. Арутюнян Н. Х. Расчет строительных конструкций с учетом ползучести / Н. Х. Арутюнян, А. А. Зевин. М.: Стройиздат, 1988. 256 с.
3. Васильев П. И. Вопросы развития теории деформирования стареющих сред / П. И. Васильев, Б. А. Гаврилин, А. Б. Малькевич // Исследования по теоретическим основам расчета строительных конструкций: межвузовский тематический сборник трудов. Л.: Ленинградский инженерно-строительный институт, 1983. С. 122-128.
4. Мальцев Л. Е. Теория вязкоупругости для инженеров-строителей / Л. Е. Мальцев, Ю. И. Карпенко. Тюмень: Вектор Бук, 1999. 240 с.
5. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости / В. В. Новожилов. Л.: Политехника, 1991. 211 с.
6. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек / В. В. Новожилов. СПб.: Издательство Санкт-Петербургского государственного университета, 2010. 380 с.
7. Ржаницын А. Р. Теория ползучести / А. Р. Ржаницын. М.: Стройиздат, 1986. 416 с.
8. Якубовский Ю. Е. Изгиб составных пластин и пологих оболочек / Ю. Е. Якубовский, Б. А. Гуляев, В. И. Колосов, Н. А. Кривчун, С. В. Якубовская. Тюмень: Тюменский индустриальный университет, 2016. 185 с.
9. Якубовский Ю. Е. Нелинейная теория изгиба и расчет составных пластин и пологих оболочек переменной жесткости: автореферат дисс. ... д. т. н. / Ю. Е. Якубовский. Екатеринбург, 1994. 46 с.
10. Якубовский Ю. Е. Об определении параметров ядер ползучести для стареющих материалов / Ю. Е. Якубовский // Прикладная механика. 1991. Том 27. № 6. С. 37-44.
11. Якубовский Ю. Е. Ядра ползучести стареющих тел / Ю. Е. Якубовский, В. И. Колосов // Строительная механика и расчет сооружений. 1991. № 1. С. 55-61.
12. Yakubovskiy Y. Bending of Structurally Orthotropic Composite Structures with Anchor Connection Layers / Y. Yakubovskiy, V. Kolosov, B. Gulyaev, V. Goltsov // Procedia Engineering. 2016. Vol. 165. Pp. 1246-1253. DOI: 10.1016/j.proeng.2016.11.847
13. Yakubovskiy Y. Deformation of Working Shells of Mixing Devices in the Production of Concrete for Underground Construction / Y. Yakubovskiy, V. Goltsov, V. Kolosov // Procedia Engineering. 2016. Vol. 165. Pp. 1238-1245. DOI: 10.1016/j.proeng.2016.11.846

Yuriy E. YAKUBOVSKIY¹
Vasily I. KOLOSOV²
Irina A. DONKOVA³
Sergey O. KRUGLOV⁴

UDC 539.5

MODELING VISCOELASTIC PROPERTIES OF AGING MATERIAL

¹ Dr. Sci. (Tech.), Professor,
Department of Applied Mechanics,
Industrial University of Tyumen
yakubov@tyuiu.ru

² Cand. Sci. (Tech.), Associate Professor,
Department of Applied Mechanics,
Industrial University of Tyumen
kolosova_1_v@mail.ru

³ Cand. Sci. (Tech.), Associate Professor,
Department of Software,
University of Tyumen
irina_donkova@mail.ru

⁴ Postgraduate Student,
Department of Applied Mechanics,
Industrial University of Tyumen
skrugloff@mail.ru

Abstract

This study aims to develop a creep kernel recording form, which would allow obtaining representations for creep curves calculation. Based on the elastic-creeping body theory, the authors present a possibility of the high-rate creep movement analytical study. New creep kernels to describe creeping of aging materials have been determined. A creep kernel, which

Citation: Yakubovskiy Yu. E., Kolosov V. I., Donkova I. A., Kruglov S. O. 2018. "Modeling Viscoelastic Properties of Aging Material". Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 4, no 4, pp. 181-190.

DOI: 10.21684/2411-7978-2018-4-4-181-190

contains a formula to describe the aging material properties, has been built. Essential stages of the proposed creep kernel formation have been given. The correspondence of the proposed calculations to real processes has been proved by a comparison with experimental data. In the numerical implementation, decomposition of integration elements into power series has been used.

Based on experimental data, creep kernel parameters have been determined by minimizing the calculated data standard deviation from experimental ones. The described approach to modeling viscoelastic properties of material allows predicting redistribution of stresses in time in layers of composite structures.

Keywords

Composite structures, creep kernel, viscoelastic properties, aging material.

DOI: 10.21684/2411-7978-2018-4-4-181-190

REFERENCES

1. Arutyunyan N. Kh., Zevin A. A. 1982. "Ob odnom klasse yader polzuchesti stareyushchikh materialov" [On a Class of Creep Kernels of Aging Materials]. *Prikladnaya mekhanika*, vol. 8, no 4, pp. 14-21.
2. Arutyunyan N.Kh., Zevin A.A. 1988. *Raschet stroitel'nykh konstruktsiy s uchetom polzuchesti* [Calculation of Building Structures with Regard to Creep]. Moscow: Stroyizdat.
3. Vasilyev P. I. Gavrilin B. A., Malkevich A. B. 1983. *Voprosy razvitiya teorii deformirovaniya stareyushchikh sred* [The Issues of Developing the Theory of Deformation of Aging Media]. *Issledovaniya po teoreticheskim osnovam rascheta stroitel'nykh konstruktsiy*, pp. 122-128. Leningrad: Leningradskiy inzhenero-stroitel'nyy institut.
4. Maltsev L. E., Karpenko Yu. I. 1999. *Teoriya vyazkouprugosti dlya inzhenerov-stroiteley* [The Theory of Viscoelasticity for Civil Engineers]. Tyumen: Vektor Buk.
5. Novozhilov V. V. *Osnovy nelineynoy teorii uprugosti* [Fundamentals of the Nonlinear Theory of Elasticity]. Leningrad: Politekhnik.
6. Novozhilov V. V. 2010. *Teoriya tonkikh obolochek* [Theory of Thin Shells]. Izdatelstvo Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo universiteta.
7. Rzhantsyn A. R. 1986. *Teoriya polzuchesti* [The Theory of Creep]. Moscow: Stroyizdat.
8. Yakubovskiy Yu. E., Gulyaev B. A., Kolosov V. I., Krivchun N. A., Yakubovskaya S. V. 2016. *Izhib sostavnykh plastin i pologikh obolochek: monografiya* [Bending of Composite Plates and Flat Shells]. Tyumen: Industrial University of Tyumen.
9. Yakubovskiy Yu. E. 1994. "Nelineynaya teoriya izgiba i raschet sostavnykh plastin i pologikh obolochek peremennoy zhestkosti" [Nonlinear Theory of Bending and Calculation of Composite Plates and Shallow Shells of Variable Stiffness]. Cand. Sci. (Tech.) diss. abstract. Yekaterinburg.
10. Yakubovskiy Yu. E. 1991. "Ob opredelenii parametrov yader polzuchesti dlya stareyushchikh materialov" [On Determination of Creep Kernel Parameters for Aging Materials]. *Prikladnaya mekhanika*, vol. 27, no 6, pp. 37-44.

11. Yakubovskiy Yu. E., Kolosov V. I. 1991. Yadra polzuchesti stareyushchikh tel [The Cores of the Creep of Aging Bodies]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*, no 1, pp. 55-61.
12. Yakubovskiy Yu., Kolosov V., Gulyaev B., Goltsov V. 2016. "Bending of Structurally Orthotropic Composite Structures with Anchor Connection Layers". *Procedia Engineering*, vol. 165, pp. 1246-1253. DOI: 10.1016/j.proeng.2016.11.847
13. Yakubovskiy Yu., Goltsov V., Kolosov V. 2016. "Deformation of Working Shells of Mixing Devices in the Production of Concrete for Underground Construction. *Procedia Engineering*, vol. 165, pp. 1238-1245. DOI: 10.1016/j.proeng.2016.11.846