

Владимир Леонидович ЛИТНЕВСКИЙ¹
Леонид Аркадьевич ЛИТНЕВСКИЙ²
Григорий Иванович КОСЕНКО³
Сергей Иванович МАЗУР⁴

УДК 539.172.17

**НОВЫЙ МЕТОД ПРИБЛИЖЕННОГО
РАСЧЕТА ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ АТОМНЫХ ЯДЕР
(НА ПРИМЕРЕ КУЛОНОВСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ)**

¹ кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры физики и химии,
Омский государственный университет путей сообщения
vlad.lit@bk.ru

² кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры физики и химии,
Омский государственный университет путей сообщения
litnevskyla@yandex.ru

³ доктор физико-математических наук,
профессор кафедры физико-математических дисциплин,
филиал Военной академии материально-технического
обеспечения им. генерала армии А. В. Хрулёва (г. Омск)
kosenkophys@gmail.com

⁴ аспирант,
Омский государственный технический университет
mazur1sergey@gmail.com

Цитирование: Литневский В. Л. Новый метод приближенного расчета потенциальной энергии взаимодействия двух атомных ядер (на примере кулоновского взаимодействия) / В. Л. Литневский, Л. А. Литневский, Г. И. Косенко, С. И. Мазур // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2019. Том 5. № 2. С. 59-70.
DOI: 10.21684/2411-7978-2019-5-2-59-70

Аннотация

Для моделирования процесса столкновения атомных ядер необходимо знать потенциальную энергию их взаимодействия. Увеличение точности описания формы системы (увеличение количества рассматриваемых степеней свободы), а также учет структуры атомных ядер позволяет существенно продвинуться в понимании процессов, происходящих при их столкновении. С другой стороны, увеличение точности расчета существенно увеличивает время, необходимое для его выполнения. Так, при учете четырех параметров формы системы (расстояние между центрами масс ядер, параметр деформации ядра-снаряда и ядра-мишени, а также угол между линией, соединяющей центры масс ядер, и осью симметрии ядра-мишени) расчет карты потенциальной энергии занимает около суток. Добавление параметра, описывающего ориентацию ядра-снаряда в пространстве, увеличивает время расчета карты в десять раз. Для учета всех возможных относительных ориентаций сталкивающихся ядер (три угла Эйлера) требуется ввести еще один параметр, что увеличивает время расчета еще в десять раз. Наконец, учет диффузности ядерной поверхности увеличивает время расчета еще в тысячу раз. В результате задача расчета карты потенциальной энергии взаимодействия атомных ядер становится практически невыполнимой. В настоящей работе предложен приближенный метод, позволяющий существенно ускорить процесс расчета энергии взаимодействия сталкивающихся атомных ядер, при этом точность расчета остается достаточно высокой. Апробация метода произведена для расчета потенциальной энергии кулоновского взаимодействия двух сферических атомных ядер, находящихся на произвольном расстоянии друг от друга. В работе производится сравнение точности и времени расчетов, выполненных по традиционным методам, по предложенному приближенному методу и по аналитической формуле для кулоновского взаимодействия двух сферически симметричных атомных ядер. Показано, что применение разработанного метода является целесообразным при расчетах, учитывающих деформацию и взаимную ориентацию сталкивающихся ядер, а также при необходимости учитывать диффузность распределения ядерного вещества (диффузность ядерной поверхности).

Ключевые слова

Моделирование столкновения атомных ядер, потенциал взаимодействия атомных ядер, кулоновское взаимодействие, ядерное взаимодействие, диффузность ядерной поверхности, интерполяция методом сплайнов, численное интегрирование.

DOI: 10.21684/2411-7978-2019-5-2-59-70

Введение

Для моделирования процесса столкновения атомных ядер широко используются стохастические динамические модели [3, 7, 8]. Для их применения необходимо знать потенциальную энергию кулоновского и ядерного взаимодействий атомных ядер, участвующих в реакции. Потенциальная энергия системы, состоящей из покоящегося ядра-мишени и налетающего на него ядра-снаряда, зависит от расстояния между центрами масс ядер, их формы и взаимной ориен-

тации, т. е. она постоянно изменяется во время эволюции формы системы. Естественно, что точный расчет потенциалов взаимодействия атомных ядер, который в общем случае сводится к расчету суммарного взаимодействия каждого элемента объема одного ядра с каждым элементом объема второго ядра (т. е. к вычислению шестикратного интеграла [4]), для каждого момента времени невозможен, т. к. требует длительных вычислений. Поэтому вместо точного расчета значений потенциалов применяются различные приближенные методы, причем точность приближения может улучшаться по мере развития расчетной техники.

В первом приближении можно рассматривать столкновение двух сферических атомных ядер, в этом случае потенциальная энергия кулоновского взаимодействия может быть рассчитана аналитически, а для потенциальной энергии ядерного взаимодействия можно получить приближенную формулу, не требующую интегрирования [2, 3].

Далее, если есть необходимость учитывать деформации сталкивающихся ядер, можно либо пренебречь диффузностью ядерной поверхности при расчете кулоновского взаимодействия, либо учесть ее приближенно [10], в таком случае шестикратное интегрирование объемных интегралов сводится к четырехкратным поверхностным интегралам [5]. А при расчете ядерного взаимодействия можно использовать приближение, в котором каждый нуклон одного ядра взаимодействует с некоторым усредненным потенциалом, созданным вторым ядром [3] (метод однократной свертки потенциала). В этом случае интегрирование производится только по объему одного из ядер.

Трех- или четырехкратное интегрирование также занимает достаточно много машинного времени, поэтому расчет потенциалов при каждом изменении параметров системы, состоящей из двух взаимодействующих атомных ядер, не представляется возможным. Вместо этого для дискретного набора значений, которые могут принимать параметры формы системы, рассчитывается сетка, размерность которой совпадает с числом параметров формы системы. Дальнейшее вычисление потенциала сводится к интерполяции между узлами данной сетки. Такую интерполяцию также можно выполнять с различной степенью точности. Первоначально она выполнялась с помощью полиномов первой степени (линейная интерполяция). Для повышения точности расчета можно использовать интерполяцию с помощью сплайнов, которая, однако, требует достаточно много оперативной памяти для хранения коэффициентов интерполяционных многочленов.

Расчет сетки потенциалов превращается в достаточно громоздкую задачу в случае, если кроме расстояния между центрами масс и деформаций каждого из ядер учитывать также и их взаимную ориентацию [6]. В этом случае размерность сетки достигает пяти-шести измерений.

В настоящей работе предлагается приближенный метод расчета потенциальной энергии взаимодействия двух ядер (на примере кулоновского взаимодействия), сводящийся к вычислению трехкратных интегралов. Данный метод приводит к существенному увеличению скорости расчета, при этом точность вычислений остается достаточно высокой.

Методы расчета потенциальной энергии взаимодействия сталкивающихся ядер

Для функционирования современных моделей, описывающих процесс столкновения атомных ядер, требуется произвести расчеты пяти-шестимерных карт потенциальной энергии системы, где размерность карт зависит от числа учитываемых степеней свободы (параметров формы) системы. Такие карты содержат примерно 10^6 - 10^8 точек. Для расчета такой карты необходимо потратить от $10 \Delta t$ до $1\,000 \Delta t$ суток, где Δt — время (в секундах), необходимое для расчета одной точки, которое зависит от точности расчета и от метода численного интегрирования. Так, при интегрировании методом Гаусса по 32 точкам Δt может достигать нескольких секунд, если при расчете потенциальной энергии взаимодействия атомных ядер производится учет диффузности ядерной поверхности [4]:

$$V_{nucl} = \int \rho_t \rho_p V_{NN} d\vec{r}_t d\vec{r}_p, \quad (1)$$

$$V_{Coul} = k_e \int \frac{\rho_t \rho_p}{|\vec{s} + \vec{r}_p - \vec{r}_t|} d\vec{r}_t d\vec{r}_p, \quad (2)$$

где интегрирование проводится по объемам обоих сталкивающихся ядер, т. е. вычисляется шестикратный интеграл. Первый интеграл описывает ядерное взаимодействие двух атомных ядер, для его расчета требуется знать потенциал нуклон-нуклонного взаимодействия V_{NN} . Второй интеграл описывает кулоновское взаимодействие ядер (k_e — электрическая постоянная, а \vec{s} — вектор, направленный из центра масс ядра-мишени в центр масс ядра-снаряда). В оба интеграла входит величина $\vec{r}_{t(p)}$ — радиус-вектор произвольной точки соответствующего ядра в системе координат, связанной с его центром масс. Плотность ядерного вещества задается выражением:

$$\rho(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{1 + \exp\left(\frac{|\vec{r} - \vec{R}(\rho_{cil}, z_{cil}, \varphi_{cil}, \alpha_i)|}{a}\right)}, \quad (3)$$

где $|\vec{r} - \vec{R}(\rho_{cil}, z_{cil}, \varphi_{cil}, \alpha_i)|$ имеет смысл кратчайшего расстояния от малого элемента объема ядра, положение которого задано радиус-вектором \vec{r} , до ядерной поверхности, заданной профильной функцией $\rho_{cil}(z_{cil}, \alpha_i)$, зависящей от параметров α_i , задающих форму ядра в соответствующей параметризации (например [1, 9]).

Из выражений (1) и (2) видно, что методы расчета потенциальной энергии ядерного и кулоновского взаимодействия схожи, поэтому дальнейшие рассуждения будут проводиться только для кулоновского взаимодействия. В этом случае существует простой способ проверки точности расчетов — изучение взаимодействия двух сферических ядер.

Отказавшись от учета диффузности ядерной поверхности в (2), можно перейти от объемных интегралов к поверхностным [5]:

$$V_{Coul}^{sharp} = -\frac{1}{2} \oint \oint |\vec{s} + \vec{r}_2 - \vec{r}_1| (\vec{dS}_1 \cdot \vec{dS}_2). \quad (4)$$

Формула (4) позволяет значительно сократить время расчета. Именно с расчетами, проведенными по данной формуле, мы и будем сравнивать точность и скорость разрабатываемого приближенного метода.

Суть метода состоит в том, что расчет потенциальной энергии можно разделить на две стадии. Сначала нужно рассчитать потенциал, создаваемый ядром-мишенью в окружающем его пространстве:

$$\varphi(x, y, z) = k_e \frac{q_e Z_t}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (5)$$

Расчет потенциала производится для дискретного набора точек (узлов сетки) в трехмерном пространстве. Потенциал электрического поля является достаточно гладкой функцией декартовых координат (рис. 1), поэтому значения потенциала в точках, не совпадающих с узлами сетки, можно с высокой точностью получить, интерполируя данную функцию трехмерным кубическим сплайном. Естественно, точность интерполяции повышается с уменьшением шага сетки (Δx , Δy , Δz).

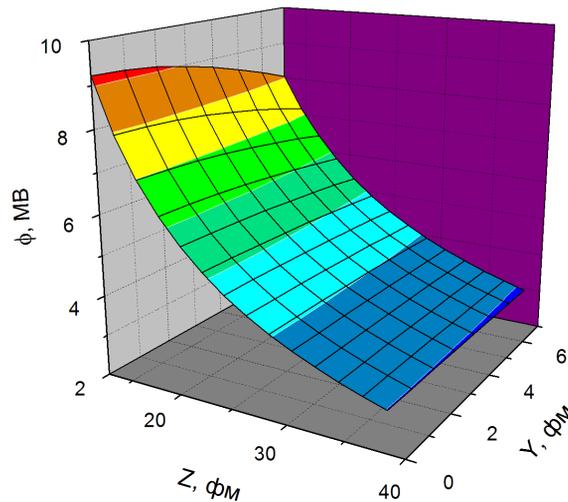


Рис. 1. Потенциал электрического поля $\varphi(x=0, y, z)$, созданного сферическим ядром-мишенью, которое находится в начале координат

Примечание: ядро-снаряд будет подлетать в направлении, противоположном оси OZ .

Fig. 1. The electric field potential $\varphi(x=0, y, z)$, created by a spherical target nucleus at the origin of coordinates

Note: projectile-nucleus will fly up in the direction opposite to the axis of OZ .

Интерполируя потенциал электрического поля, созданного ядром-мишенью, интегрируя по объему ядра-снаряда, мы можем рассчитать потенциальную энергию кулоновского взаимодействия двух ядер:

$$V_{Coul}^{interp} = \int \rho \phi dV. \quad (6)$$

Следует заметить, что на одном поле мы можем рассчитать потенциальную энергию для любой деформации и ориентации ядра-снаряда, а также для любого расстояния между сталкивающимися ядрами (рис. 2).

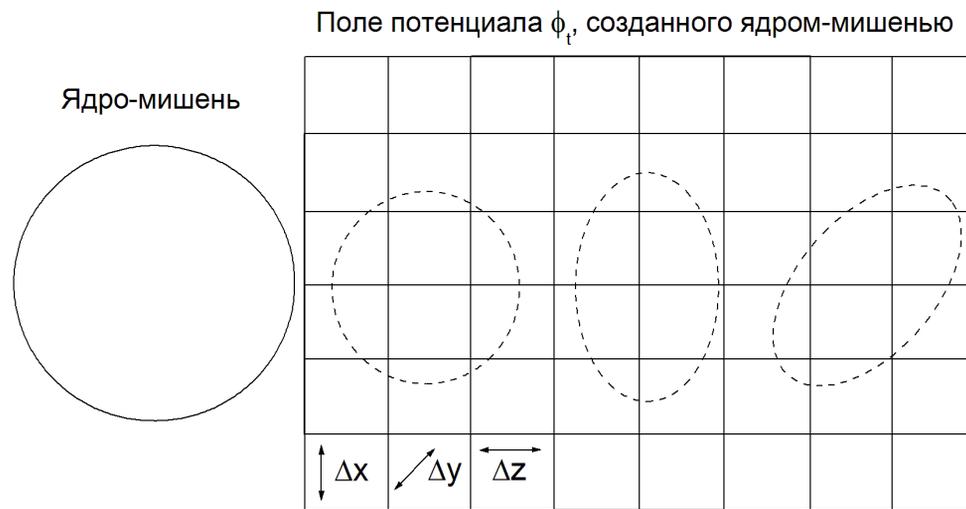


Рис. 2. Расчетная сетка потенциала электрического поля, созданного ядром-мишенью

Примечание: узловые точки сетки рассчитаны по формуле (5), значение потенциала между узлами сетки определяется методом интерполяции кубическим сплайном. Шаги сетки потенциала в направлении соответствующих осей обозначены как $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$. Пунктирные линии (профили ядра-снаряда) иллюстрируют тот факт, что на одной сетке можно рассчитать потенциальную энергию взаимодействия ядра-мишени с произвольно деформированным и ориентированным в пространстве ядром-снарядом, удаленном от ядра-мишени на произвольное расстояние.

Fig. 2. Computational grid of electric field potential created by the target-nucleus

Note: the nodal points of the grid are calculated by the formula (5), the value of the potential between the nodes of the grid is determined by the cubic spline interpolation method. The steps of the potential grid in the direction of the corresponding axes are denoted as $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$. Dotted lines (projectile-nucleus profiles) illustrate the fact that it is possible to calculate the potential energy of the target-nucleus interaction with an arbitrarily deformed and space-oriented projectile-nucleus at an arbitrary distance from the target-nucleus on this, once calculated grid.

Результаты и их обсуждение

Для оценки точности предлагаемого метода расчета мы использовали известную аналитическую формулу расчета потенциальной энергии кулоновского взаимодействия двух сферических ядер (точечных зарядов):

$$V_{analit} = k_e \frac{q_e^2 Z_t Z_p}{r_{cm}}, \quad (7)$$

соответственно, все расчеты проводились для системы, состоящей из двух сферических ядер. Следует заметить, что сферическая симметрия ядер не использовалась для упрощения процесса интегрирования, т. е. все расчеты были проведены в общем виде, и выводы работы сохранят свою силу и в случае рассмотрения взаимодействия двух деформированных, произвольно ориентированных в пространстве ядер.

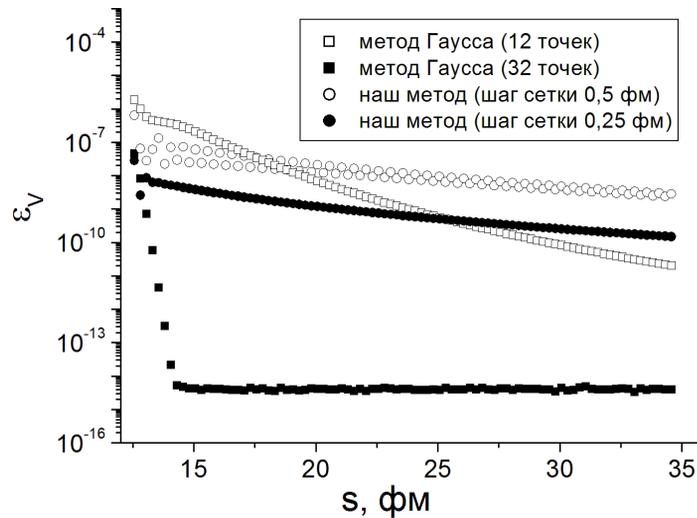


Рис. 3. Оценка точности вычислений потенциальной энергии взаимодействия двух сферических ядер, проведенная по формуле (8)

Примечания: квадраты — расчет четырехкратного интеграла по методу Гаусса (открытые символы — интегрирование по 12 точкам, закрытые символы — интегрирование по 32 точкам); кружки — расчет по приближенному методу с шагом сетки потенциала $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0,5$ фм (открытые символы) и $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0,25$ фм (закрытые символы).

Fig. 3. Estimation of the accuracy of calculations of the potential energy of interaction between two spherical nuclei, calculated by the formula (8)

Notes: squares — calculation of the fourfold integral by Gauss method (open symbols — 12 points integration, closed symbols — 32 points integration); circles — calculation by the approximate method with step of a grid potential, $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.5$ fm (open symbols) and $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.25$ fm (closed symbols).

При расчете потенциальной энергии по описываемому методу были использованы сетки потенциалов с шагом $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0,5$ фм и $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0,25$ фм. Численное интегрирование выполнялось с помощью метода Гаусса по 32 точкам.

Кроме того, для сравнения точности расчета нами была рассчитана потенциальная энергия кулоновского взаимодействия сталкивающихся сферических ядер путем вычисления четырехкратного интеграла (4). Численное интегрирование выражения (4) выполнялось по методу Гаусса по 32 и 12 точкам.

Для оценки точности расчета была использована формула:

$$\varepsilon_V = \frac{|V_{Coul} - V_{analit}|}{V_{analit}}. \quad (8)$$

Как видно из рис. 3, точность разработанного метода в области малых расстояний между центрами масс сталкивающихся ядер (а это наиболее важная для моделирования область) несколько превышает точность интегрирования выражения (6) по методу Гаусса по 12 точкам (время расчета в данном случае примерно одинаково) и может быть улучшена путем уменьшения шага сетки потенциала. Следует заметить, что уменьшение шага сетки потенциала (в разумных пределах) не приводит к существенному увеличению времени расчета.

Время расчета по нашему методу примерно совпадает со временем, необходимым для численного расчета трехкратного интеграла. Соответственно, наш метод работает примерно в 30 раз быстрее (при интегрировании по 32 точкам), чем предложенный в [5] метод, позволяющий вычислять кулоновское взаимодействие двух атомных ядер с резким краем, и в 30 000 раз быстрее, чем взятие шестикратного интеграла (1), необходимого для учета диффузности ядерной поверхности.

Заключение

В настоящей работе предложен новый метод, позволяющий существенно ускорить расчет потенциальной энергии взаимодействия сталкивающихся атомных ядер. Результаты расчетов сохраняют точность, достаточную для динамического расчета процесса столкновения атомных ядер [7]. Применение разработанного метода особенно целесообразно при вычислении потенциальной энергии взаимодействия атомных ядер, рассчитываемого с учетом диффузности ядерных поверхностей. Следует заметить, что предложенный метод без существенных изменений может быть применен и для вычисления потенциальной энергии ядерного взаимодействия с помощью выражения (1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Brack M. Funny hills: The shell-correction approach to nuclear shell effects and its applications to the fission process / M. Brack, J. Damgaard, A. S. Jensen, H. C. Pauli, V. M. Strutinsky, C. Y. Wong // *Reviews of Modern Physics*. 1972. Vol. 44. № 2. Pp. 320-405. DOI: 10.1103/RevModPhys.44.320

2. Denisov V. Yu. Interaction of two deformed, arbitrarily oriented nuclei / V. Yu. Denisov, N. A. Pilipenko // *Physical Review C*. 2007. Vol. 76. № 1. 014602.
DOI: 10.1103/PhysRevC.76.014602
3. Gross D. H. E. Friction model of heavy-ion collisions / D. H. E. Gross, H. Kalinovski // *Physics Reports*. 1978. Vol. 45. № 3. Pp. 175-210. DOI: 10.1016/0370-1573(78)90031-5
4. Ismail M. Azimuthal angle dependence of Coulomb and nuclear interactions between two deformed nuclei / M. Ismail, A. Y. Ellithi, M. M. Botros, A. E. Mellik // *Physical Review C*. 2007. Vol. 75. № 6. 064610. DOI: 10.1103/PhysRevC.75.064610
5. Kurmanov R. S. New approach to calculating the potential energy of colliding nuclei / R. S. Kurmanov, G. I. Kosenko // *Physics of Atomic Nuclei*. 2014. Vol. 77. № 12. Pp. 1442-1452. DOI: 10.1134/S1063778814120102
6. Litnevsky V. L. Allowance for the orientation of colliding ions in describing the synthesis of heavy nuclei / V. L. Litnevsky, G. I. Kosenko, F. A. Ivanyuk, V. V. Pashkevich // *Physics of Atomic Nuclei*. 2012. Vol. 75. № 12. Pp. 1500-1512.
DOI: 10.1134/S1063778812110142
7. Litnevsky V. L. Allowance for the tunnel effect in the entrance channel of fusion-fission reactions / V. L. Litnevsky, G. I. Kosenko, F. A. Ivanyuk // *Physics of Atomic Nuclei*. 2016. Vol. 79. № 3. Pp. 342-350. DOI: 10.1134/S1063778816020113
8. Marten J. Langevin description of heavy-ion collisions within the surface friction model / J. Marten, P. Fröbrich // *Nuclear Physics, Section A*. 1992. Vol. 545. № 4. Pp. 854-870.
DOI: 10.1016/0375-9474(92)90533-P
9. Pashkevich V. V. On the asymmetric deformation of fissioning nuclei / V. V. Pashkevich // *Nuclear Physics A*. 1971. Vol. 169. № 2. Pp. 275-293.
DOI: 10.1016/0375-9474(71)90884-0
10. Sierk A. J. Macroscopic model of rotating nuclei / A. J. Sierk // *Physical Review C*. 1986. Vol. 33. № 6. Pp. 2039-2053. DOI: 10.1103/PhysRevC.33.2039

Vladimir L. LITNEVSKY¹

Leonid A. LITNEVSKY²

Grigory I. KOSENKO³

Sergey I. MAZUR⁴

UDC 539.172.17

**A NEW METHOD FOR THE APPROXIMATE CALCULATION
OF THE POTENTIAL ENERGY OF INTERACTION
BETWEEN TWO ATOMIC NUCLEI (THE CASE
OF THE COULOMB INTERACTION)**

¹ Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor,
Department of Physics and Chemistry,
Omsk State Transport University
vlad.lit@bk.ru

² Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor,
Department of Physics and Chemistry,
Omsk State Transport University
litnevskyla@yandex.ru

³ Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor,
Department of Physical and Mathematical Disciplines,
Military Academy of Logistics named
after the Army General A. V. Khrulev (Omsk)
kosenkophys@gmail.com

⁴ Postgraduate Student,
Omsk State Technical University
mazur1sergey@gmail.com

Citation: Litnevsky V. L., Litnevsky L. A., Kosenko G. I., Mazur S. I. 2019. "A new method for the approximate calculation of the potential energy of interaction between two atomic nuclei (the case of the Coulomb interaction)". Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 5, no 2, pp. 59-70.
DOI: 10.21684/2411-7978-2019-5-2-59-70

Abstract

Modeling of the collision process of atomic nuclei requires knowing the potential energy of their interaction. Increasing the accuracy of the description of the system's shape (i. e. the number of the degrees of freedom), as well as taking into account the structure of atomic nuclei can significantly advance the understanding of the processes during their collision. On the other hand, the rising accuracy of the calculation significantly increases the time of its performance. Thus, taking into account the four shape parameters (the distance between the centers of mass of the nuclei, the deformation parameter of the projectile nucleus and of the target nucleus, as well as the angle between the line connecting the centers of mass of the nuclei and the axis of symmetry of the target nucleus), the potential energy map takes about one day. Adding the parameter, which describes the orientation of the projectile nucleus in the space, increases the time of calculation of the map by ten times. Calculating all the possible relative orientations of colliding nuclei (three Euler angles) require one more parameter, which increases the calculation time by ten times more. Finally, taking into account the diffuseness of the nuclear surface increases the calculation time by a thousand times. As a result, the problem of calculating the potential energy map of atomic nuclei interaction becomes practically impossible.

In this paper, the authors propose an approximation method to speed up the process of calculating the interaction energy of colliding atomic nuclei, while the accuracy of the calculation remains high enough. The proposed method can significantly accelerate the process of calculating the interaction energy of colliding atomic nuclei, while the calculation accuracy remains high enough. The method was tested to calculate the potential energy of the Coulomb interaction between two spherical atomic nuclei located at the different distance from each other.

The paper compares the accuracy and time of calculations performed using traditional methods, the proposed approximate method and the analytical formula for the Coulomb interaction of two spherically symmetric atomic nuclei. The results show that the application of the developed method is appropriate in calculations that take into account the deformation and mutual orientation of colliding nuclei, as well as, if necessary, take into account the diffuseness of the distribution of nuclear matter (the diffuseness of the nuclear surface).

Keywords

The process of fusion-fission, heavy ions, the interaction potential, compound nucleus, the cross section of the touch, super-heavy elements.

DOI: 10.21684/2411-7978-2019-5-2-59-70

REFERENCES

1. Brack M., Damgaard J., Jensen A. S., Pauli H. C., Strutinsky V. M., Wong C. Y. 1972. "Funny hills: The shell-correction approach to nuclear shell effects and its applications

- to the fission process". *Reviews of Modern Physics*, vol. 44, no 2, pp. 320-405. DOI: 10.1103/RevModPhys.44.320
2. Denisov V. Yu., Pilipenko N. A. 2007. "Interaction of two deformed, arbitrarily oriented nuclei". *Physical Review C*, vol. 76, no 1, 014602. DOI: 10.1103/PhysRevC.76.014602
 3. Gross D. H. E., Kalinowski H. 1978. "Friction model of heavy-ion collisions". *Physics Reports*, vol. 45, no 3, pp. 175-210. DOI: 10.1016/0370-1573(78)90031-5
 4. Ismail M., Ellithi A. Y., Botros M. M. and Mellik A. E. 2007. "Azimuthal angle dependence of Coulomb and nuclear interactions between two deformed nuclei". *Physical Review C*, vol. 75, no 6. 064610. DOI: 10.1103/PhysRevC.75.064610
 5. Kurmanov R. S., Kosenko G. I. 2014. "New approach to calculating the potential energy of colliding nuclei". *Physics of Atomic Nuclei*, vol. 77, no 12, pp. 1442-1452. DOI: 10.1134/S1063778814120102
 6. Litnevsky V. L., Kosenko G. I., Ivanyuk F. A., Pashkevich V. V. 2012. "Allowance for the orientation of colliding ions in describing the synthesis of heavy nuclei". *Physics of Atomic Nuclei*, vol. 75, no 12, pp. 1500-1512. DOI: 10.1134/S1063778812110142
 7. Litnevsky V. L., Kosenko G. I., Ivanyuk F. A. 2016. "Allowance for the tunnel effect in the entrance channel of fusion-fission reactions". *Physics of Atomic Nuclei*, vol. 79, no 3, pp. 342-350. DOI: 10.1134/S1063778816020113
 8. Marten J., Fröbrich P. 1992. "Langevin description of heavy-ion collisions within the surface friction model". *Nuclear Physics, Section A*, vol. 545, no 4, pp. 854-870. DOI: 10.1016/0375-9474(92)90533-P
 9. Pashkevich V. V. 1971. "On the asymmetric deformation of fissioning nuclei". *Nuclear Physics A*, vol. 169, no 2, pp. 275-293. DOI: 10.1016/0375-9474(71)90884-0
 10. Sierk A. J. 1986. "Macroscopic model of rotating nuclei". *Physical Review C*, vol. 33, no 6, pp. 2039-2053. DOI: 10.1103/PhysRevC.33.2039