Федор Сергеевич БАЯНОВ[1]
Татьяна Евгеньевна КАЗАНЦЕВА[2]
Владислав Владимирович МАЧУЛИС[3]

УДК 517.9

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ТИПА «ТРЕХМЕРНЫЙ ЦЕНТР» В СИСТЕМЕ ТРЕХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

[1] магистрант,
Тюменский государственный университет
fedyabay@yandex.ru

[2] старший преподаватель
кафедры фундаментальной математики и механики,
Тюменский государственный университет
t.e.kazanceva@utmn.ru

[3] кандидат педагогических наук, доцент
кафедры фундаментальной математики и механики,
Тюменский государственный университет
mareliks@gmail.com

Аннотация

В данной статье рассматривается система трех дифференциальных уравнений с кубическими многочленами в правых частях, содержащая семь произвольных параметров. Цель исследования заключается в получении условий для параметров, при которых заданная система будет иметь в начале координат положение равновесия типа «центр». Малая окрестность такого положения равновесия нелинейной системы содержит замкнутые траектории, вложенные друг в друга, что соответствует наличию малоамплитудных периодических движений системы. Введением малого параметра и последующим переходом к новой системе координат исходная система сведена

Цитирование: Баянов Ф. С. Условия существования положения равновесия типа «трехмерный центр» в системе трех дифференциальных уравнений / Ф. С. Баянов, Т. Е. Казанцева, В. В. Мачулис // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2019. Том 5. № 2. С. 137-147.
DOI: 10.21684/2411-7978-2019-5-2-137-147

к системе двух дифференциальных уравнений. Решение преобразованной системы представлено в виде ряда по степеням малого параметра, что делает возможным получение отображения Пуанкаре в виде ряда по степеням этого же параметра. Исследованием отображения Пуанкаре получены условия существования положения равновесия типа «центр».

Ключевые слова

Динамическая система, качественная теория, трехмерный центр, отображение Пуанкаре, функции Мельникова, периодические траектории, малый параметр.

DOI: 10.21684/2411-7978-2019-5-2-137-147

Введение

Математические модели многих явлений науки и техники представляют собой системы обыкновенных дифференциальных уравнений с конечным числом параметров. При этом лишь небольшая часть таких систем может быть решена аналитически. Применение методов качественной теории нелинейных дифференциальных уравнений позволяет не только описать поведение решений системы в целом, но и выбрать параметры системы таким образом, чтобы обеспечить интересующие исследователя динамические свойства. Особый интерес представляют системы, в которых возможны устойчивые периодические движения.

Положения равновесия типа «нелинейный центр» в малой своей окрестности окружены периодическими траекториями. Строго говоря, положение равновесия трехмерной системы нельзя называть центром, т. к. спектр матрицы линейной части A не может состоять только из чисто мнимых собственных значений — одно из них обязательно будет действительным. Если spectr $A = \{a, \pm i\}$, то соответствующее положение равновесия называют или устойчивым ($a < 0$), или неустойчивым ($a > 0$) узло-центром. Под трехмерным центром будем понимать положение равновесия, для которого spectr $A = \{0, \pm i\}$. Стоит отметить, что подобные системы весьма редко и недостаточно подробно упоминаются даже в наиболее полных руководствах по методам нелинейной динамики, таких как, например, [1, 2, 12, 13].

Будем рассматривать систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = kx - y + x(x + y + a_1 z), \\ \dot{y} = x + y(b_1 x + y + b_2 z), \\ \dot{z} = z(c_1 x^2 + c_2 y^2 + c_3 z^2). \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, k, a_1, b_1, b_2, c_1, c_2, c_3 — некоторые произвольные параметры.

В [14] рассмотрены системы вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + F_1(x, y, z), \\ \dot{y} = x + F_2(x, y, z), \\ \dot{z} = F_3(x, y, z). \end{cases} \tag{2}$$

Здесь $F_1(x, y, z)$, $F_2(x, y, z)$, $F_3(x, y, z)$ — полиномы второго порядка с произвольными коэффициентами. Для таких систем авторами [14] получены условия, при которых начало координат будет являться трехмерным центром. Подобная задача для случая полиномов третьего и более высоких порядков пока не решена. В данной работе мы ограничимся исследованием системы, в которой полином третьего порядка присутствует только в правой части последнего уравнения. В дальнейшем это исследование планируется продолжить, вводя кубические нелинейности в оставшиеся два уравнения.

Замена переменных

Нетрудно заметить, что начало координат является положением равновесия системы (1). Матрица линейной части этой системы имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} k & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Собственные значения (3) следующие: $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{k-1}, \lambda_3 = 0$. Очевидно, что только при $k = 0$ положение равновесия (0, 0, 0) может являться трехмерным центром. Таким образом, получено первое требование к коэффициентам системы. При дальнейших расчетах будем использовать значение $k = 0$.

Т. к. мы исследуем поведение траекторий только в окрестности начала координат, введем замену:

$$(x, y, z) \to \left({}^{x}/_{\varepsilon}, {}^{y}/_{\varepsilon}, {}^{z}/_{\varepsilon}\right), \tag{4}$$

где $|\varepsilon|$ достаточно мал.

Затем произведем следующую замену (polar blow-up), которая позволит «раздуть» окрестность начала координат:

$$x = r\cos\theta, \; y = r\sin\theta, \; z = r\omega. \tag{5}$$

Тогда система (1) примет вид:

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon r^2((a_1 - b_2)\omega\cos^2\theta - b_1\cos^3\theta + \cos^3\theta + b_2\omega + b_1\cos\theta + \sin\theta), \\ \dot{\omega} = \varepsilon r\omega((c_1 - c_2)\varepsilon r\cos^2\theta + (b_2 - a_1)\omega\cos^2\theta + (b_1 - 1)\cos^3\theta + \\ \quad + c_2\varepsilon r + (c_3 - b_2)\omega - b_1\cos\theta - \sin\theta), \\ \dot{\theta} = 1 + (b_2 - a_1)\varepsilon r\omega\cos\theta\sin\theta + (b_1 - 1)\varepsilon r\cos^3\theta\sin\theta. \end{cases} \tag{6}$$

Разделим первое уравнение (6) на второе и третье уравнение на второе. Получим систему, с которой и будем дальше работать:

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{d\theta} = \dfrac{\varepsilon r^2((a_1 - b_2)\omega\cos^2\theta - b_1\cos^3\theta + \cos^3\theta + b_2\omega + b_1\cos\theta + \sin\theta)}{1 + (b_2 - a_1)\varepsilon r\omega\cos\theta\sin\theta + (b_1 - 1)\varepsilon r\cos^3\theta\sin\theta}, \\ \dfrac{d\omega}{d\theta} = \dfrac{\varepsilon r\omega\big((c_1 - c_2)\varepsilon r\cos^2\theta + (b_2 - a_1)\omega\cos^2\theta + (b_1 - 1)\cos^3\theta\big)}{1 + (b_2 - a_1)\varepsilon r\omega\cos\theta\sin\theta + (b_1 - 1)\varepsilon r\cos^3\theta\sin\theta} + \\ \qquad + \dfrac{\varepsilon r\omega(c_2\varepsilon r + (c_3 - b_2)\omega - b_1\cos\theta - \sin\theta)}{1 + (b_2 - a_1)\varepsilon r\omega\cos\theta\sin\theta + (b_1 - 1)\varepsilon r\cos^3\theta\sin\theta}. \end{cases} \tag{7}$$

Эту же систему запишем в более компактном виде:

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{d\theta} = \varepsilon R(\theta, r, \omega; \varepsilon), \\ \dfrac{d\omega}{d\theta} = \varepsilon W(\theta, r, \omega; \varepsilon). \end{cases} \tag{8}$$

В результате перешли от системы трех дифференциальных уравнений к системе двух дифференциальных уравнений, что значительно упрощает исследование. Неподвижная точка исходной системы (1) будет соответствовать инвариантному множеству $\{r = 0\}$ системы (8).

Отображение Пуанкаре

От системы дифференциальных уравнений (8) можно перейти к дискретной системе меньшей размерности с помощью сечений Пуанкаре. Для этого на фазовую плоскость системы (8) помещают некоторую кривую L так, чтобы фазовые траектории пересекали ее трансверсально. С этой кривой выпускают фазовую траекторию и отслеживают, когда она вновь пересечет L. Таким образом, в результате получают множество точек пересечения P_i кривой фазовой траекторией, которое называют сечением Пуанкаре. Соответствующее отображение секущей кривой в себя называют отображением Пуанкаре. В случае двухмерной системы (8) оно будет одномерным.

Переход к отображению Пуанкаре сохраняет все основные свойства породившей его непрерывной системы. Например, если исходная система дифференциальных уравнений диссипативна, то отображение будет сокращать расстояние между соседними точками. Если исходная система допускает устойчивые периодические движения, то в правильно подобранном сечении Пуанкаре мы увидим одну точку, периодически посещаемую. Т. е., исследуя отображение Пуанкаре, можно проанализировать динамику исходного потока.

Сложность заключается в том, что найти отображение Пуанкаре в явном виде удается крайне редко, ведь чтобы его построить, необходимо знать аналитические решения исходной системы. Если система не решается аналитически, одним из вариантов построения отображения Пуанкаре может быть использование численного алгоритма (например, метода Эно [9]). Иногда вместо отображения Пуанкаре используют стробоскопическое отображение, которое фиксирует состояние системы один раз за заранее заданный период (как, например, в [11]).

Система (7) относится к случаям, когда аналитическое решение не представляется возможным найти. Ее решение будем искать с помощью метода малого параметра. В роли малого параметра выступает ε, введенный заменой (4). Итак, пусть некоторая функция $\Psi(\theta, r_0, \omega_0; \varepsilon) = (r(\theta, r_0, \omega_0; \varepsilon), \omega(\theta, r_0, \omega_0; \varepsilon))$ определяет решение системы (8) с начальными условиями $\Psi(0, r_0, \omega_0; \varepsilon) = (r_0, \omega_0)$. Ясно, что любое периодическое решение системы (7) с периодом 2π соответствует периодической орбите системы (1) в окрестности начала координат.

Определим отображение Пуанкаре как $\Pi(r_0, \omega_0; \varepsilon) = \Psi(2\pi; r_0, \omega_0; \varepsilon)$ и введем отображение смещения:

$$d(r_0, \omega_0; \varepsilon) = \Pi(r_0, \omega_0; \varepsilon) - \mathrm{I}d(r_0, \omega_0), \tag{9}$$

где $\mathrm{I}d(r_0, \omega_0) = (r_0, \omega_0)$ — тождественное отображение. Стоит отметить, что (9) является аналитической функцией. Это следует из того, что исходная система (1) и, следовательно, система (3) являются аналитическими [14]. Остается связать существование вложенных периодических траекторий с видом отображения смещения.

Теорема [14]. Начало координат исходной системы является трехмерным центром тогда и только тогда, когда

$$d(r_0, \omega_0; \varepsilon) \equiv 0. \tag{10}$$

Из этой теоремы и будут получены условия существования трехмерного центра в точке (0, 0, 0) для системы (1) — все коэффициенты $d_j(r_0, \omega_0)$ при $j \geq 1$ в разложении в ряд Тейлора отображения (9) должны обращаться в нуль:

$$d(r_0, \omega_0; \varepsilon) = \sum_{j\geq 1} d_j(r_0, \omega_0)\varepsilon^j. \tag{11}$$

По аналогии со случаем двумерного центра будем называть $d_j\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ j-ми функциями Мельникова.

Расчет условий на коэффициенты

Зададим начальные условия для системы (8): $r(0) = r_0$, $\omega(0) = \omega_0$. При $\varepsilon = 0$ решением данной системы будет:

$$r(\theta) = r_0,\ \omega(\theta) = \omega_0. \tag{12}$$

Это решение нулевого приближения системы (8). Следуя алгоритму метода малого параметра, найдем решение в виде разложения в ряд по степеням ε:

$$\begin{gathered} r(\theta) = r_0 + \varepsilon r_1(\theta) + \varepsilon^2 r_2(\theta) + \cdots, \\ \omega(\theta) = \omega_0 + \varepsilon\omega_1(\theta) + \varepsilon^2\omega_2(\theta) + \cdots. \end{gathered} \tag{13}$$

Подставим выражения для $r(\theta)$ и $\omega(\theta)$ из (13) в систему (8):

$$\begin{cases} \sum_{j\geq 1} \varepsilon^j \dfrac{dr_j}{d\theta} = \varepsilon R(\theta, r_0 + \varepsilon r_1 + \varepsilon^2 r_2 + \cdots, \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \cdots; \varepsilon), \\ \sum_{j\geq 1} \varepsilon^j \dfrac{d\omega_j}{d\theta} = \varepsilon W(\theta, r_0 + \varepsilon r_1 + \varepsilon^2 r_2 + \cdots, \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \cdots; \varepsilon). \end{cases} \tag{14}$$

Правые части (14) разложим в ряд по степеням ε, а затем будем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях ε в левой и правой частях, начиная с первой:

$$\begin{cases} \dfrac{dr_1}{d\theta} = r_0^2(b_2\omega_0 - b_1\cos^3\theta + \cos^3\theta + \sin\theta - b_2\cos^2\theta + \\ \qquad + b_1\cos\theta + a_1\omega_0\cos^2\theta), \\ \dfrac{d\omega_1}{d\theta} = r_0\omega_0(-b_2\omega_0 + b_1\cos^3\theta - \cos^3\theta - \sin\theta + b_2\cos^2\theta - \\ \qquad - b_1\cos\theta - a_1\omega_0\cos^2\theta). \end{cases} \tag{15}$$

Правые части (15) зависят только от θ. Система (15) является распадающейся, поэтому можно независимо друг от друга интегрировать оба дифференциальных уравнения по θ, получая в правой части сумму несложных интегралов:

$$\begin{gathered} r_1(\theta) = -r_0^2\cos\theta + \frac{1}{12}r_0^2 b_1\sin 3\theta + \frac{1}{4}r_0^2 b_1\sin\theta + \frac{1}{12}r_0^2\sin 3\theta + \\ + \frac{3}{4}r_0^2\sin\theta - \frac{1}{4}r_0^2 b_2\omega_0\sin 2\theta + \frac{1}{2}r_0^2 b_2\omega_0\theta + \\ + \frac{1}{4}r_0^2 a_1\omega_0\sin 2\theta + \frac{1}{2}r_0^2 a_1\omega_0 + \theta r_0^2, \\ \omega_1(\theta) = r_0\omega_0\cos\theta + \frac{1}{12}r_0 b_1\sin 3\theta - \frac{1}{4}r_0\omega_0 b_1\sin\theta - \\ - \frac{1}{12}r_0\omega_0\sin 3\theta - \frac{3}{4}r_0\omega_0\sin\theta + \frac{1}{4}r_0\omega_0^2 b_2\sin 2\theta - \\ - \frac{1}{2}r_0\omega_0^2 b_2\theta - \frac{1}{4}r_0\omega_0^2 a_1\sin 2\theta - \frac{1}{2}r_0\omega_0^2 a_1\theta - r_0\omega_0. \end{gathered} \tag{16}$$

Отображение Пуанкаре мы определяли как решение (8): $\Pi(r_0, \omega_0; \varepsilon) = \Psi(2\pi; r_0, \omega_0; \varepsilon)$. Подставляя в (16) $\theta = 2\pi$, получим:

$$\begin{gathered} r_1(2\pi) = r_0^2\omega_0\pi(a_1 + b_2), \\ \omega_1(2\pi) = -r_0^2\omega_0\pi(a_1 + b_2). \end{gathered} \tag{17}$$

Из (9), (10) и (13) следует, что первая функция Мельникова $d_1(r_0, \omega_0)$ обращается в нуль тогда и только тогда, когда

$$a_1 = -b_2. \tag{18}$$

Получено еще одно условие существования трехмерного центра в начале координат для системы (1). Учитывая (18), продолжим приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях ε:

$$\begin{cases} \dfrac{dr_2}{d\theta} = r_0(2r_0a_1\omega_1(\theta)\cos^2\theta - r_0a_1\omega_1(\theta) - 2a_1\omega_0r_1(\theta) + \\ \quad + 4a_1\omega_0r_1(\theta)\cos^2\theta + 2r_1(\theta)\cos\theta - r_0^2a_1^2\omega_0^2\sin 2\theta + \\ \quad + 2r_0^2a_1\omega_0\cos\theta - 2r_0^2a_1\omega_0\cos^3\theta + 2\,r_0^2a_1^2\omega_0^2\cos^2\theta\sin 2\theta + \\ \quad + 2r_1(\theta)\sin\theta + 2r_0^2a_1\omega_0\cos^2\theta\sin\theta), \\ \dfrac{d\omega_2}{d\theta} = 2r_0a_1\omega_0\omega_1(\theta) - 2r_0^2c_2\omega_0\cos^2\theta - 4r_0a_1\omega_0\omega_1(\theta)\cos^2\theta + \\ \quad + r_0^2c_2\omega_0 - r_0\omega_1(\theta)\sin\theta - r_0\omega_1(\theta)\cos\theta + a_1\omega_0^2r_1(\theta) - \\ \quad - \omega_0r_1(\theta)\sin\theta - 2a_1\omega_0^2r_1(\theta)\cos^2\theta - \omega_0r_1(\theta)\cos\theta + \\ \quad + r_0^2a_1^2\omega_0^3\sin 2\theta - 2\,r_0^2a_1\omega_0^2\cos\theta + 2r_0^2a_1\omega_0^2\cos^3\theta - \\ \quad - 2r_0^2a_1^2\omega_0^3\cos^2\theta\sin 2\theta - 2\,r_0^2a_1\omega_0^2\sin\theta\cos^2\theta\,. \end{cases} \tag{19}$$

В (19) в правых частях присутствуют функции $r_1(\theta)$ и $\omega_1(\theta)$, однако они получены выше, поэтому система (19) примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dr_2}{d\theta} = r_0^3(2 - a_1\omega_0 + 2\cos\theta + 2a_1\omega_0\cos^2\theta - 4\cos^2\theta - \\ \quad - 6a_1\omega_0\cos^3\theta + 5a_1\omega_0\cos\theta + 3a_1^2\omega_0^2\cos^2\theta\sin 2\theta + \\ \quad + 2\sin\theta - 3a_1^2\omega_0^2\sin\theta\cos\theta + 6a_1\omega_0\cos^2\theta\sin\theta - a_1\omega_0\sin\theta), \\ \dfrac{d\omega_2}{d\theta} = -r_0^2\omega_0\big((a_1\omega_0 + 2c_2\cos^2\theta - c_2 + a_1\omega_0\cos\theta - 2a_1\omega_0\cos^2\theta - \\ \quad - a_1^2\omega_0^2\sin\theta\cos\theta + a_1^2\omega_0^2\cos^2\theta\sin 2\theta + a_1\omega_0\sin\theta). \end{cases} \tag{20}$$

Снова получили распадающуюся систему дифференциальных уравнений. Решим ее относительно $r_2(\theta)$ и $\omega_2(\theta)$, а затем положим $\theta = 2\pi$. Получим:

$$\begin{gathered} r_2(2\pi) = \frac{1}{4}\pi r_0^3(1 - b_1), \\ \omega_2(2\pi) = r_0^2\omega_0\pi\left(c_1 + c_2 + \frac{1}{4}b_1 - \frac{1}{4} + 2\omega_0^2c_3\right). \end{gathered} \tag{21}$$

Для того, чтобы $d_2(r_0, \omega_0)$ обращалась в нуль при любых начальных условиях (r_0, ω_0), должны выполнятся условия:

$$b_1 = 1,\ c_1 = -c_2,\ \ c_3 = 0. \tag{22}$$

Продолжая действовать таким же образом для степеней ε выше, чем вторая, мы убедились, что выполнение соотношений (18) и (22) гарантирует обращение в нуль всех $d_j(r_0, \omega_0)$ при $j \geq 3$. Условия существования положения равновесия типа «трехмерный центр» в системе (1) получены.

Заключение

Исследована система трех автономных дифференциальных уравнений с кубическими полиномами с семью произвольными коэффициентами. На ее примере изучен и отработан алгоритм получения условий на параметры системы, гарантирующие существование в начале координат трехмерного центра. Результаты данного исследования можно в дальнейшем дополнить поиском аналогичных условий в системе, содержащем кубические многочлены с большим числом произвольных коэффициентов, а также на системы с полиномами порядка степени 4 и выше.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андронов А. А. Качественная теория динамических систем второго порядка / А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, А. Г. Майер. М.: Наука, 1966. 568 с.
2. Андронов А. А. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, А. Г. Майер. М.: Наука, 1967. 487 с.
3. Андронов А. А. Теория колебаний / А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. 2-е изд., перераб. и испр. М.: Наука, 1981. 918 с.
4. Анищенко В. С. Сложные колебания в простых системах / В. С. Анищенко. М.: Наука, 1990. 312 с.
5. Баутин Н. Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н. Н. Баутин, Е. А. Леонтович. 2-е изд., доп. М.: Наука, 1990. 486 с.
6. Бутенин Н. В. Введение в теорию нелинейных колебаний / Н. В. Бутенин, Ю. И. Неймарк, Н. Л. Фуфаев. 2-е изд., перераб. М.: Наука, 1987. 382 с.
7. Гукенхеймер Дж. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей / Дж. Гукенхеймер, Ф. Холмс. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 560 с.
8. Каток А. Б. Введение в современную теорию динамических систем / А. Б. Каток, Б. М. Хасселблат. М.: Факториал, 1999. 768 с.
9. Кузнецов С. П. Динамический хаос. Курс лекций: учеб. пособие для студ. вузов, обуч. по физ. спец. / С. П. Кузнецов. М.: Физматлит, 2001. 296 с.
10. Найфэ А. Введение в методы возмущений / А. Найфэ; пер. с англ. М.: Мир, 1984. 535 с.
11. Семенова Н. И. Возвраты Пуанкаре в стробоскопическом сечении неавтономного генератора ван дер Поля / Н. И. Семенова, В. С. Анищенко // Нелинейная динамика. 2014. Том 10. № 2. С. 149-156. DOI: 10.20537/nd1402002

12. Шильников А. Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике / Л. П. Шильников, А. Л. Шильников, Д. В. Тураев, Л. Чуа. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 428 с.
13. Шильников Л. П. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 2 / Л. П. Шильников, А. Л. Шильников, Д. В. Тураев, Л. Чуа. М.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований, 2009. 548 с.
14. García I. A. The three-dimensional center problem for the zero-Hopf singularity / I. A. García, C. Valls // Discrete and Continuous Dynamical Systems — Series A. 2016. Vol. 36. № 4. Pp. 2027-2046. DOI: 10.3934/dcds.2016.36.2027

Fedor S. BAYANOV[1]
Tatyana E. KAZANTSEVA[2]
Vladislav V. MACHULIS[3]

UDC 517.9

THE EXISTENCE OF A THREE-DIMENSIONAL CENTER IN A SYSTEM OF THREE DIFFERENTIAL EQUATIONS

[1] Master Student,
University of Tyumen
fedyabay@yandex.ru

[2] Senior Lecturer,
Department of Fundamental Mathematics and Mechanics,
University of Tyumen
t.e.kazanceva@utmn.ru

[3] Cand. Sci. (Ped.), Associate Professor,
Department of Fundamental Mathematics and Mechanics,
University of Tyumen
mareliks@gmail.com

Abstract

This article studies a system of three differential equations with cubic polynomials in the right-hand sides and seven arbitrary parameters. The authors aim to meet the conditions for the parameters which will allow the system to have a center at the origin. An area of the origin is completely foliated by periodic orbits at such system. This corresponds to the low-amplitude periodic solutions. By introducing a small parameter and transformation to new coordinates, the system is reduced to a set of two differential equations. The solution of the transformed system is represented as a series in powers of a small parameter, as is the Poincare map and displacement map. The study of these maps obtains conditions for the existence of a three-dimensional center.

Citation: Bayanov F. S., Kazantseva T. E., Machulis V. V. 2019. “The existence of a three-dimensional center in a system of three differential equations”. Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 5, no 2, pp. 137-147.
DOI: 10.21684/2411-7978-2019-5-2-137-147

Keywords

Dynamical system, qualitative theory, three-dimensional center, Poincare map, Melnikov functions, periodical orbits, small parameter.

DOI: 10.21684/2411-7978-2019-5-2-137-147

REFERENCES

1. Andronov A. A., Leontovich E. A., Gordon I. I., Mayer A. G. 1966. Qualitative Theory of Second-Order Dynamical Systems. Moscow: Nauka. [In Russian]
2. Andronov A. A., Leontovich E. A., Gordon I. I., Mayer A. G. 1967. Theory of Bifurcations of Dynamical Systems on the Plane. Moscow: Nauka. [In Russian]
3. Andronov A. A., Witt A. A., Haikin S. E. 1981. Oscillation Theory. 2nd edition. Moscow: Nauka. [In Russian]
4. Anishchenko V. S. 1990. Complex Oscillations in Simple Systems. Moscow: Nauka. [In Russian]
5. Bautin N. N., Leontovich E. A. 1990. Methods and Techniques for Qualitative Research of Dynamic Systems on the Plane. 2nd edition. Moscow: Nauka. [In Russian]
6. Butenin N. V., Neymark Yu. I., Fufaev N. L. 1987. Introduction to the Theory of Nonlinear Oscillations. 2nd edition. Moscow: Nauka. [In Russian]
7. Guckenheimer J., Holmes F. 2002. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. Moscow; Izhevsk: IKI. [In Russian]
8. Katok A. B., Hasselblat B. M. 1999. Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems. Moscow: Faktorial. [In Russian]
9. Kuznecov S. P. 2001. Dynamical Chaos. Moscow: Fizmatlit. [In Russian]
10. Naife A. 1984. Introduction to Perturbation Methods. Moscow: Mir. [In Russian]
11. Semenova N. I., Anishchenko V. S. 2014. "Poincare returns in a stroboscopic section of a non-autonomous van der Pol generator". Nelineynaya dinamika, vol. 10, no 2, pp. 149-156. DOI: 10.20537/nd1402002 [In Russian]
12. Shilnikov L. P., Shilnikov A. L., Turaev D. V., Chua L. 2003. Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Moscow; Izhevsk: Institut kompyuternyh issledovanij. [In Russian]
13. Shilnikov L. P., Shilnikov A. L., Turaev D. V., Chua L. 2009. Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Vol. 2. Izhevsk: Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika, Institut kompyuternykh issledovaniy. [In Russian]
14. García I. A., Valls C. 2016. "The three-dimensional center problem for the zero-Hopf singularity". Discrete and Continuous Dynamical Systems — Series A, vol. 36, no 4, pp. 2027-2046. DOI: 10.3934/dcds.2016.36.2027