

Павел Тихонович ЗУБКОВ¹
Эдуард Игоревич НАРЫГИН²

УДК 532.5.032, 536.2

ВЛИЯНИЕ ВЯЗКОЙ ДИССИПАЦИИ НА ЕСТЕСТВЕННУЮ КОНВЕКЦИЮ В КВАДРАТНОЙ ОБЛАСТИ

¹ доктор физико-математических наук,
профессор кафедры фундаментальной математики и механики,
Тюменский государственный университет
pzubkov@utmn.ru

² аспирант кафедры фундаментальной математики и механики,
Тюменский государственный университет
e.i.narygin@yandex.ru

Аннотация

В данной работе рассматривается задача об естественной конвекции вязкой несжимаемой жидкости, находящейся в квадратной полости в поле действия силы тяжести. На правой и левой стенках квадрата поддерживается постоянная температура, причем температура левой стенки выше температуры правой стенки, остальные стенки считаются теплоизолированными. В начальный момент времени температура жидкости считается постоянной и равной температуре правой стенки. В начальный момент времени жидкость внутри области покоится. Будем рассматривать только те случаи, где полученное течение в области будет ламинарным. Все теплофизические характеристики считаются постоянными, за исключением плотности при учете силы тяжести в уравнении движения. В качестве математической модели было выбрано приближение Буссинеска, но в уравнении энергии присутствуют члены, отвечающие за вязкую диссипацию. В работе было проанализировано влияние вязкой диссипации на естественно-конвективный перенос тепла через квадратную полость. Показано, что

Цитирование: Зубков П. Т. Влияние вязкой диссипации на естественную конвекцию в квадратной области / П. Т. Зубков, Э. И. Нарьгин // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2019. Том 5. № 3. С. 118-130.

DOI: 10.21684/2411-7978-2019-5-3-118-130

вязкая диссипация существенно влияет на перенос тепла через полость. Для решения поставленной задачи использовался метод контрольного объема и алгоритм SIMPLER. Расчеты проводились при $Pr = 1$, $Gr = 10^4$, $10^{-5} \leq Ec \leq 10^{-3}$.

Ключевые слова

Естественная конвекция, численные методы, число Грасгофа, число Эккерта, приближение Буссинеска, вязкая диссипация, уравнения Навье — Стокса.

DOI: 10.21684/2411-7978-2019-5-3-118-130

Введение

Ламинарное течение жидкости, находящейся в поле действия силы тяжести, изучается в течение долгого времени в приближении Буссинеска. Это классический пример задач естественной конвекции. Если в уравнение энергии добавить члены, отвечающие за вязкую диссипацию, то можно найти новое решение этой классической задачи. В представленной работе рассмотрены граничные условия, когда температура на вертикальных стенках квадрата поддерживается постоянной и температура левой стенки выше температуры правой стенки. Остальные стенки считаются теплоизолированными. Существует ряд задач естественной конвекции, в которых мы не можем пренебрегать вязкой диссипацией, например: гидродинамика в сильных гравитационных полях или в геологических процессах, в которых имеет место высокая скорость вращения [4]. Следовательно, существуют некоторые физические модели, которые требуют учета вязкой диссипации, такие как течение термовязких жидкостей или течение с естественной конвекцией в пограничном слое. Одной из первых работ, посвященных влиянию вязкой диссипации на задачи естественной конвекции, является статья Б. Гебхарта [4]. Он исследовал влияние вязкой диссипации на двумерное ламинарное течение в пограничном слое около полубесконечной пластины, а также использовал метод возмущений. Эту работу Б. Гебхарт продолжил с Дж. Моллендорфом [5]. В работах [6, 10] авторы исследовали естественную конвекцию около вертикальной пластины при наличии вязкой диссипации. В работах [3, 8, 9] исследовано влияние вязкой диссипации на естественно-конвективное течение вдоль различных вертикальных поверхностей в магнитной гидродинамике. То, как вязкая диссипация влияет на естественную конвекцию потока несжимаемой жидкости с выделением тепла, было изучено С. Актаром и др. [2]. На данный момент результатов, затрагивающих внутренние гидродинамические задачи, где теплофизические свойства жидкости постоянные и присутствует вязкая диссипация, не так много. Например, Б. К. Джха с соавторами была опубликована работа [7], в которой было исследовано влияние вязкой диссипации на развитое ламинарное течение между двумя параллельными вертикальными пластинами. На пластинах задавались периодические граничные условия.

Физическая постановка задачи

Рассмотрим задачу о естественной конвекции вязкой несжимаемой жидкости, полностью заполняющей квадратную полость, находящуюся в поле действия силы тяжести (рис. 1). На правой и левой стенках квадрата поддерживается постоянная температура, причем температура левой стенки выше температуры правой стенки, остальные стенки считаются теплоизолированными. В начальный момент времени температура жидкости считается постоянной и равной температуре правой стенки, а сама жидкость внутри области покоится. Рассмотрим только те случаи, где полученное течение в области будет ламинарным. Все теплофизические характеристики считаются постоянными, за исключением плотности при учете силы тяжести в уравнении движения.

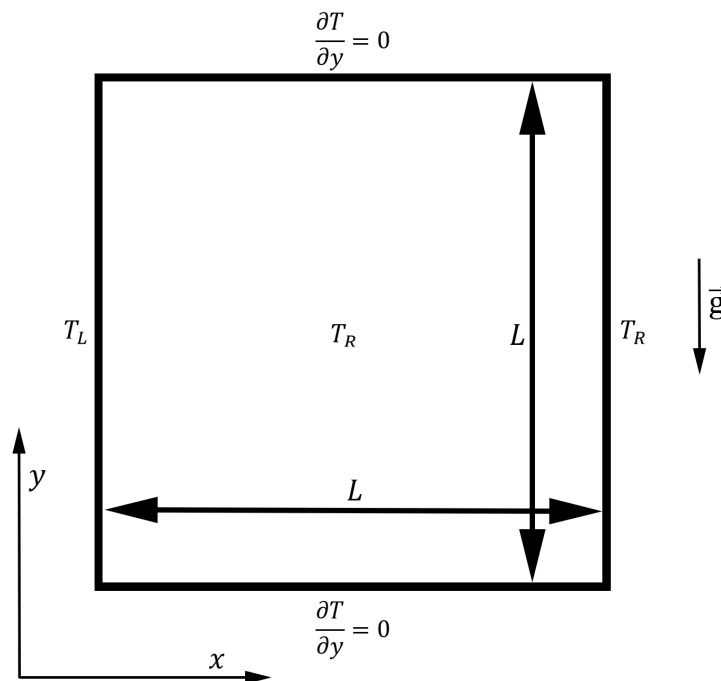


Рис. 1. Геометрия рассматриваемой области с начальными и граничными условиями

Fig. 1. Geometry of the area under consideration with initial and boundary conditions

Математическая постановка задачи

Задача естественной конвекции будет рассматриваться в приближении Буссинеска, но в уравнении энергии присутствуют члены, отвечающие за вязкую диссипацию. В безразмерных переменных уравнения запишутся в следующем виде:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial X} + \Delta U; \quad (1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial Y} + \Delta V + \text{Gr} \cdot \theta; \quad (2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0; \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \\ & = \frac{1}{\text{Pr}} \Delta \theta + \text{Ec} \left[2 \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial V}{\partial Y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial Y} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Граничные условия для системы уравнений (1)-(4) запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} X = 0: U = V = 0, \theta = 0,5; \\ X = 1: U = V = 0, \theta = -0,5; \\ Y = 0: U = V = 0, \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0; \\ Y = 1: U = V = 0, \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

В качестве начальных условий возьмем

$$\begin{aligned} \tau = 0, 0 < X < 1, 0 < Y < 1: U = V = 0, T = -0,5; \\ \tilde{P} = \text{Gr} \theta Y + \text{const}, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} U = \frac{u}{u^*}, V = \frac{v}{u^*}, \tau = \frac{t}{t^*}, \tilde{P} = \frac{p + \rho_0 g y}{p^*}; \\ X = \frac{x}{x^*}, Y = \frac{y}{x^*}, \theta = \frac{T - T^*}{T_L - T_R}; \\ u^* = \frac{\mu}{\rho_0 L}, t^* = \frac{\rho_0 L^2}{\mu}, p^* = \rho_0 u^{*2}, x^* = L, T^* = \frac{T_R + T_L}{2}. \end{aligned}$$

В системе (1)-(6) присутствуют следующие безразмерные параметры:

— число Эккерта: $\text{Ec} = \frac{\mu^2}{\rho_0^2 L^2 c (T_h - T_c)}$,

$$\text{— число Грасгофа: } Gr = \frac{\rho_0^2 L^3 g \beta (T_L - T_R)}{\mu^2},$$

$$\text{— число Прандтля: } Pr = \frac{c\mu}{\lambda}.$$

Численная реализация

Расчеты проводились с использованием метода контрольного объема алгоритмом SIMPLER [1] на равномерной сетке 152×152 .

Расчеты были выполнены при фиксированных числах $Pr = 1$, $Gr = 10^4$. Число Ec варьировалось в диапазоне от 10^{-5} до 10^{-3} .

Для анализа поведения теплового потока через данную область рассмотрим суммарные безразмерные тепловые потоки на левой и правой стенках, а также локальный тепловой поток на левой стенке:

$$q_l = -\left. \frac{\partial \theta}{\partial X} \right|_{X=0}, \quad Nu_l = -\int_0^1 \left. \frac{\partial \theta}{\partial X} \right|_{X=0} dY, \quad Nu_r = -\int_0^1 \left. \frac{\partial \theta}{\partial X} \right|_{X=1} dY.$$

Результаты расчетов

Данная задача решалась при $Pr = 1$, $Gr = 10^4$, $10^{-5} \leq Ec \leq 10^{-3}$. Рассмотрим подробно случай, когда число Грасгофа равно $Gr = 10^4$, а число Эккерта равно $Ec = 10^{-3}$. В начальный момент времени температура жидкости в области меньше, чем температура левой стенки, поэтому вблизи левой стенки жидкость начнет подниматься вверх. На рис. 2 и 3 показаны эволюции линий тока и поля температур.

Как видно из рис. 3, уже при $\tau = 3,6 \cdot 10^{-2}$ существует область жидкости, где температура выше, чем температура левой стенки. Это объясняется тем, что за счет вязкого трения выделяется тепло, вследствие чего температура в области становится выше в сравнении с температурой горячей стенки. Далее видно, что максимальная температура в области продолжает увеличиваться до достижения своего максимума при $\tau = 5,3 \cdot 10^{-2}$, потом максимальная температура в области постепенно начинает снижаться, пока не выйдет на стационарное решение. При стационарном решении максимальная температура в области равняется $\theta_{\max} = 5,4 \cdot 10^{-1}$, что больше температуры левой стенки.

Теперь рассмотрим разницу между суммарным тепловым потоком, который поступает в область через левую стенку, с суммарным тепловым потоком через правую стенку, который направлен из области.

Из рис. 4 видно, что суммарный тепловой поток, который поступает в область через левую границу, меньше суммарного теплового потока, выходящего из области через правую границу, т. е. при выходе на стационарное решение с правой границы мы будем снимать большее количество тепла, чем «закачиваем» в область через левую границу.

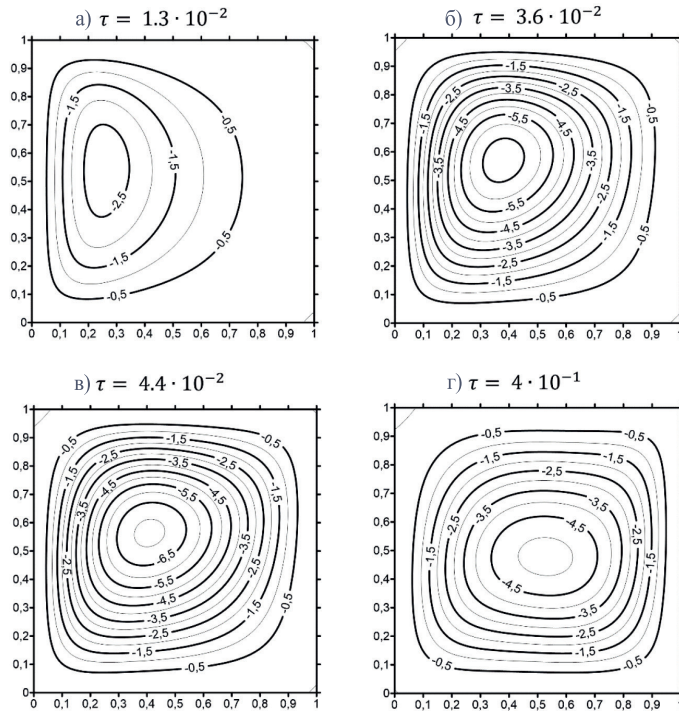


Рис. 2. Линии тока для случая $Ec = 10^{-3}$ при
 а) $\tau = 1,3 \cdot 10^{-2}$;
 б) $\tau = 3,6 \cdot 10^{-2}$;
 в) $\tau = 4,4 \cdot 10^{-2}$;
 г) $\tau = 4 \cdot 10^{-1}$

Fig. 2. Current lines for $Ec = 10^{-3}$ at
 а) $\tau = 1,3 \cdot 10^{-2}$;
 б) $\tau = 3,6 \cdot 10^{-2}$;
 в) $\tau = 4,4 \cdot 10^{-2}$;
 г) $\tau = 4 \cdot 10^{-1}$

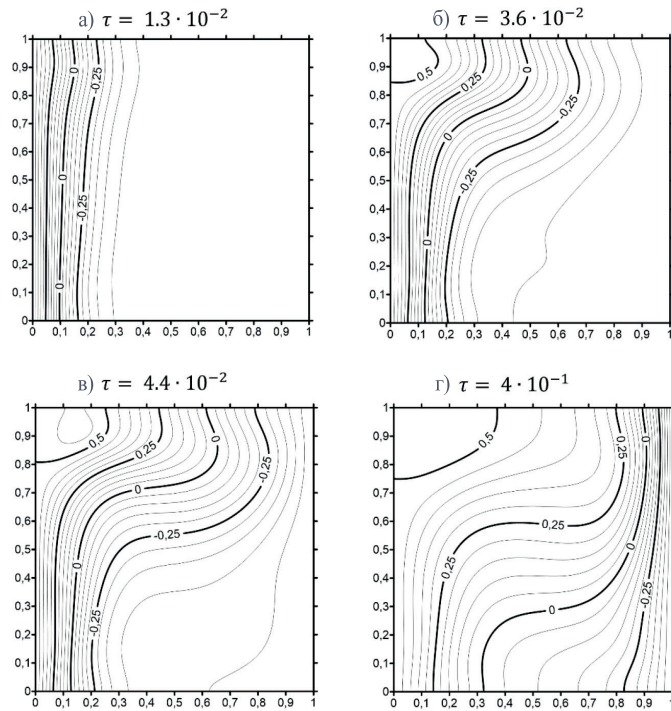


Рис. 3. Поле температур для случая $Ec = 10^{-3}$ при
 а) $\tau = 1,3 \cdot 10^{-2}$;
 б) $\tau = 3,6 \cdot 10^{-2}$;
 в) $\tau = 4,4 \cdot 10^{-2}$;
 г) $\tau = 4 \cdot 10^{-1}$

Fig. 3. Temperature field for $Ec = 10^{-3}$ at
 а) $\tau = 1,3 \cdot 10^{-2}$;
 б) $\tau = 3,6 \cdot 10^{-2}$;
 в) $\tau = 4,4 \cdot 10^{-2}$;
 г) $\tau = 4 \cdot 10^{-1}$

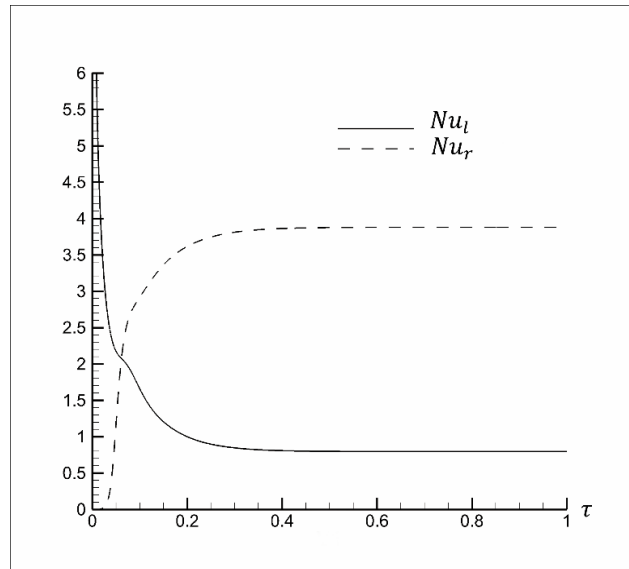


Рис. 4. Зависимость суммарных тепловых потоков на правой и левой стенках в зависимости от времени

Fig. 4. Time dependence of the total heat flows on the right and left walls

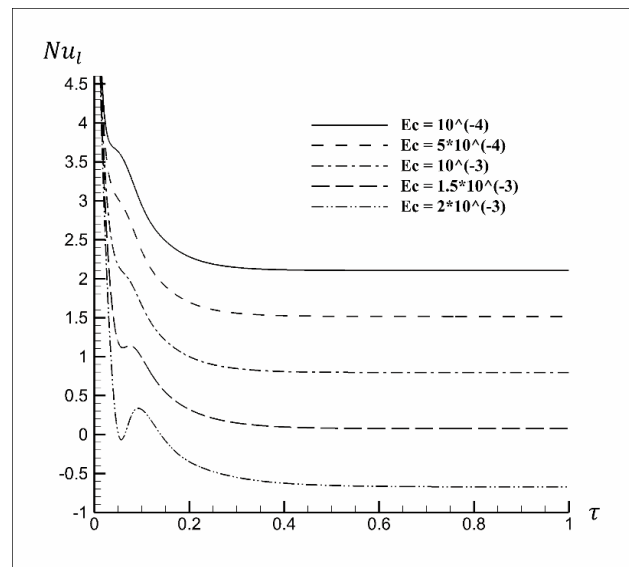


Рис. 5. Зависимость суммарного теплового потока через левую стенку от времени

Fig. 5. Time dependence of the total heat flow through the left wall

Далее проанализируем, как будет меняться наш «выигрыш» в энергии при увеличении числа Эккерта. На рис. 5 и 6 изображена зависимость суммарного теплового потока через левую и правую стенки соответственно.

Как и ожидалось, в стационарном решении с увеличением числа Эккерта суммарный тепловой поток, поступающий в область через левую границу, уменьшается, а суммарный тепловой поток, направленный из области, наоборот, увеличивается. Это явление объясняется тем, что с увеличением числа Эккерта за счет вязкого трения выделяется большее количество тепла, что влечет за собой увеличение температуры внутри области, а следовательно, и уменьшение количества тепла, поступающего в область, и увеличение количества тепла, которое мы снимаем с правой стенки. С увеличением числа Эккерта наш «выигрыш» также увеличивается.

Теперь более подробно рассмотрим зависимость суммарного теплового потока через левую стенку в зависимости от числа Эккерта. Как видно из рис. 5, при $Ec = 2 \cdot 10^{-3}$ суммарный тепловой поток через левую стенку при выходе на стационар направлен из области. В ходе численных экспериментов было установлено критическое значение числа Эккерта Ec^* , для которого при выходе на стационарное решение суммарный тепловой поток меняет свое направление, становясь направленным из области. Для случая, когда $Pr = 1$, $Gr = 10^4$, суммарный тепловой поток при выходе на стационар меняет свое направление при $Ec^* = 1,6 \cdot 10^{-3}$.

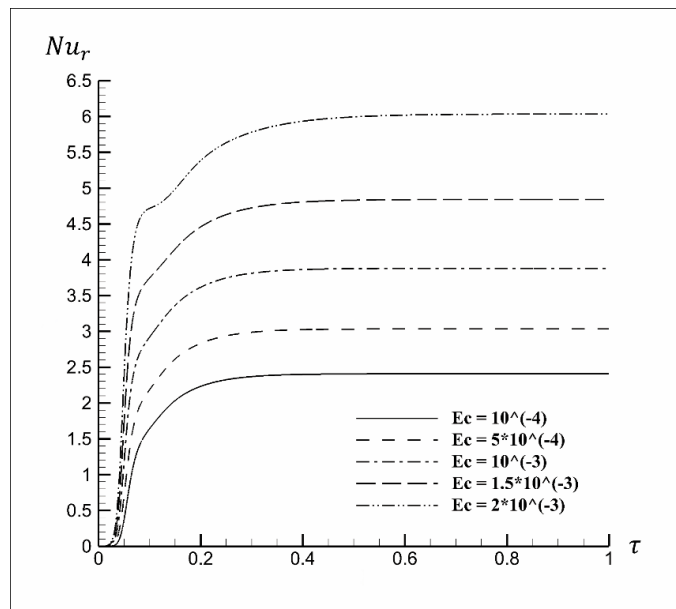


Рис. 6. Зависимость суммарного теплового потока через правую стенку от времени

Fig. 6. Time dependence of the total heat flow through the right wall

Далее рассмотрим значение плотности теплового потока через левую стенку q_l . Нами было установлено, что существует значение числа Эккерта, при котором суммарный тепловой поток через левую стенку все еще направлен в область, однако существует участок на левой границе, на котором локальный тепловой поток направлен из области. Проанализируем, как будет меняться наш «выигрыш» в энергии при увеличении числа Эккерта. Как видно из рис. 7, когда $Ec = 3 \cdot 10^{-4}$, вдоль всей левой границы тепловой поток направлен в область, а когда $Ec = 10^{-3}$, то присутствуют две зоны: в одной тепловой поток направлен в область, в другой — направлен из области.

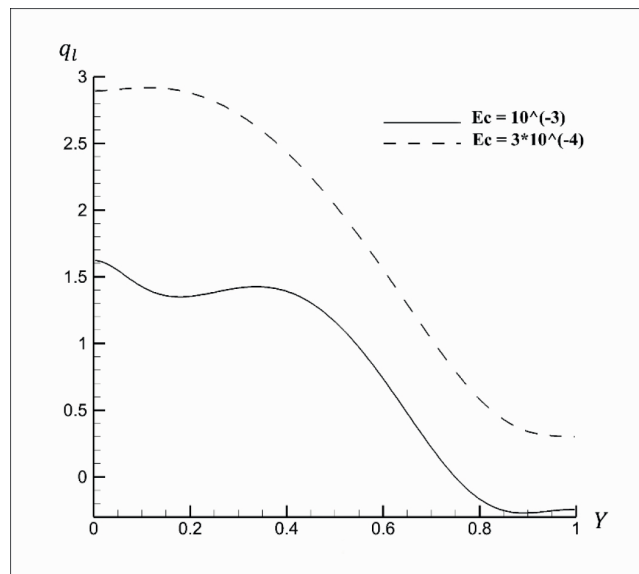


Рис. 7. Зависимость локального теплового потока на левой границе

Fig. 7. Dependence of the local heat flux at the left border

В ходе проведенных численных экспериментов было выявлено критическое значение числа Эккерта Ec^{**} , при котором появляется область на левой границе, где тепловой поток меняет свое направление. Для случая, когда $Pr = 1$, $Gr = 10^4$, критическое значение равняется $Ec^{**} = 7 \cdot 10^{-4}$.

Закключение

В ходе проведенных численных экспериментов для случая, когда $Pr = 1$, $Gr = 10^4$, было выявлено, что:

- существует диапазон значений Ec , при которых в стационарном решении $Nu_l \neq Nu_r$;
- разность суммарных тепловых потоков $Nu_r - Nu_l$ увеличивается с увеличением числа Ec ;

- при значении $Ec^* = 1,6 \cdot 10^{-3}$ суммарный тепловой поток, проходящий через левую стенку, при выходе на стационарное решение меняет свое направление;
- при $Ec^{**} = 7 \cdot 10^{-4}$ появляется область на левой границе, в которой тепловой поток меняет свое направление при выходе на стационар.

Номенклатура

u	[м/с]	Составляющая вектора скорости в направлении x
v	[м/с]	Составляющая вектора скорости в направлении y
T	[К]	Температура
T_R	[К]	Температура правой стенки
T_L	[К]	Температура левой стенки
t	[с]	Время
ρ_0	[кг/м ³]	Плотность при температуре $(T_R + T_L)/2$
c	[Дж/(кг · К)]	Теплоемкость
μ	[Па · с]	Вязкость
λ	[Вт/(м · К)]	Теплопроводность
β	[1/К]	Коэффициент теплового расширения
g	[м/с ²]	Ускорение свободного падения
L	[м]	Длина
U	[—]	Безразмерная составляющая вектора скорости в направлении x
V	[—]	Безразмерная составляющая вектора скорости в направлении y
θ	[—]	Безразмерная температура

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Паганкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости / С. Паганкар. М.: Энергоатомиздат, 1984. 150 с.
2. Aktar S. Viscous dissipation effects on natural convection flow along a sphere with heat generation / S. Aktar, M. B. M. Ruma, N. Parveen // Global Journal of Science Frontier Research. 2010. Vol. 10. № 1. Pp. 7-14.
3. Al-Mamun A. Combined effect of conduction and viscous dissipation on magnetohydrodynamic free convection flow along a vertical flat plate / A. Al-Mamun,

- N. Azim, M. Maleque // *Journal of Naval Architecture and Marine Engineering*. 2007. Vol. 4. № 2. Pp. 87-98. DOI: 10.3329/jname.v4i2.992
4. Gebhart B. Effect of viscous dissipation in natural convection / B. Gebhart // *Journal of Fluid Mechanics*. 1962. Vol. 14. № 2. Pp. 225-232. DOI: 10.1017/S0022112062001196
 5. Gebhart B. Viscous dissipation in external natural convection flows / B. Gebhart, J. Mollendorf // *Journal of Fluid Mechanics*. 1969. Vol. 38. № 1. Pp. 97-107. DOI: 10.1017/S0022112069000061
 6. Hossain M. A. Viscous dissipation effects on natural convection from a vertical plate with uniform surface heat flux placed in a thermally stratified media / M. A. Hossain, C. Saha Suvash, R. S. R. Gorla // *International Journal of Fluid Mechanics Research*. 2005. Vol. 32. № 3. Pp. 269-280. DOI: 10.1615/InterJFluidMechRes.v32.i3.20
 7. Jha B. K. Effect of viscous dissipation on natural convection flow between vertical parallel plates with time-periodic boundary conditions / B. K. Jha, A. O. Abjibade // *Thermophysics and Aeromechanics*. 2011. Vol. 18. № 4. Pp. 561-571. DOI: 10.1134/S0869864311040056
 8. Kabir K. H. Effects of viscous dissipation on MHD natural convection flow along a vertical wavy surface / K. H. Kabir, Md. A. Alim, L. S. Andallah // *Journal of Theoretical and Applied Physics*. 2013. Vol. 7. № 31. DOI: 10.1186/2251-7235-7-31
 9. Kishore P. M. Effects of heat transfer and viscous dissipation on MHD free convection flow past an exponentially accelerated vertical plate with variable temperature / P. M. Kishore, V. Rajesh, V. S. Vijayakumar // *Journal of Naval Architecture and Marine Engineering*. 2010. Vol. 7. № 2. Pp. 101-110. DOI: 10.3329/jname.v7i2.4370
 10. Pantokratoras A. Effect of viscous dissipation in natural convection along a heated vertical plate / A. Pantokratoras // *Applied Mathematical Modelling*. 2005. Vol. 29. № 6. Pp. 553-564. DOI: 10.1016/j.apm.2004.10.007

Pavel T. ZUBKOV¹
Eduard I. NARYGIN²

UDC 532.5.032, 536.2

THE EFFECT OF VISCOUS DISSIPATION ON NATURAL CONVECTION IN A SQUARE CAVITY

¹ Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor,
Department of Fundamental Mathematics and Mechanics, University of Tyumen
pzubkov@utmn.ru

² Postgraduate Student,
Department of Fundamental Mathematics and Mechanics,
University of Tyumen
e.i.narygin@yandex.ru

Abstract

This article studies the natural convection of a viscous, incompressible fluid in a square cavity in a gravitational field. The temperature of vertical walls is constant. The temperature of the left wall is higher than temperature of the right wall; the horizontal walls are considered thermally insulated. The initial condition for the temperature of a fluid in a square cavity is the constant and equals the temperature of the right wall. The initial condition for the velocity is zero. We consider only those cases where the obtained flow in the cavity is laminar. All thermophysical characteristics are assumed constant, except for one when the motion equation accounts for the gravity. Mathematical model is the Boussinesq approximation but the equation of conservation of energy contains Rayleigh dissipation function.

In this article, the authors have researched the effect of viscous dissipation on natural convection heat transfer in square field. The results show that viscous dissipation significantly affects the heat transfer through the cavity. This problem was solved with the finite volume method by algorithm SIMPLER for $Pr = 1$, $Gr = 10^4$, and $10^{-5} \leq Ec \leq 10^{-3}$.

Citation: Zubkov P. T., Narygin E. I. 2019. "The effect of viscous dissipation on natural convection in a square cavity". Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy, vol. 5, no 3, pp. 118-130.
DOI: 10.21684/2411-7978-2019-5-3-118-130

Keywords

Natural convection, numerical methods, Grashof number, Eckert number, Boussinesq approximation, viscous dissipation, Navier — Stokes equations.

DOI: 10.21684/2411-7978-2019-5-3-118-130

REFERENCES

1. Patankar S. 1980. Numerical heat transfer and fluid flow. Moscow: Energoatomizdat. [In Russian]
2. Aktar S., Ruma M. B. M, Parveen N. 2010. “Viscous dissipation effects on natural convection flow along a sphere with heat generation”. *Global Journal of Science Frontier Research*, vol. 10, no 1, pp. 7-14.
3. Al-Mamun A., Azim N., Maleque M. 2007. “Combined effect of conduction and viscous dissipation on magnetohydrodynamic free convection flow along a vertical flat plate”. *Journal of Naval Architecture and Marine Engineering*, vol. 4, no 2, pp. 87-98. DOI: 10.3329/jname.v4i2.992
4. Gebhart B. 1962. “Effect of viscous dissipation in natural convection”. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 14, no 2, pp. 225-232. DOI: 10.1017/S0022112062001196
5. Gebhart B., Mollendorf J. 1969. “Viscous dissipation in external natural convection flows”. *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 38, no 1, pp. 97-107. DOI: 10.1017/S0022112069000061
6. Hossain M. A., Saha Suvash C., Gorla R. S. R. 2005. “Viscous dissipation effects on natural convection from a vertical plate with uniform surface heat flux placed in a thermally stratified media”. *International Journal of Fluid Mechanics Research*, vol. 32, no 3, pp. 269-280. DOI: 10.1615/InterJFluidMechRes.v32.i3.20
7. Jha B. K., Abjibade A. O. 2011. “Effect of viscous dissipation on natural convection flow between vertical parallel plates with time-periodic boundary conditions”. *Thermophysics and Aeromechanics*, vol. 18, no 4, pp. 561-571. DOI: 10.1134/S0869864311040056
8. Kabir K. H., Alim Md. A., Andallah L. S. 2013. “Effects of viscous dissipation on MHD natural convection flow along a vertical wavy surface”. *Journal of Theoretical and Applied Physics*, vol. 7, no 31. DOI: 10.1186/2251-7235-7-31
9. Kishore P. M., Rajesh V., Vijayakumar V. S. 2010. “Effects of heat transfer and viscous dissipation on MHD free convection flow past an exponentially accelerated vertical plate with variable temperature”. *Journal of Naval Architecture and Marine Engineering*, vol. 7, no 2, pp. 101-110. DOI: 10.3329/jname.v7i2.4370
10. Pantokratoras A. 2005. “Effect of viscous dissipation in natural convection along a heated vertical plate”. *Applied Mathematical Modelling*, vol. 29, no 6, pp. 553-564. DOI: 10.1016/j.apm.2004.10.007