


МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК
Кафедра фундаментальной математики и механики

РЕКОМЕНДОВАНО К ЗАЩИТЕ
В ГЭК

Заведующий кафедрой
(к.ф.-м.н.)


_____ А. П. Девятков
19 июня 2023 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
магистра

ПРИБЛИЖЁННЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ
НЕЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА, МОДЕЛИРУЮЩЕГО МЕХАНИЧЕСКУЮ
СИСТЕМУ СО СВЯЗЯМИ

01.04.01 «Математика»

Магистерская программа «Вычислительная механика»

Выполнил(а) работу
студент(ка) 2 курса
очной
формы обучения



Гордиенко
Ирина
Филипповна

Научный руководитель
(к.пед.н, доцент)



Мачулис
Владислав
Владимирович

Рецензент
(к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры
алгебры и математической логики,
ТюмГУ)



Шармин
Валентин
Геннадьевич

Тюмень
2023 год

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
2. ОГРАНИЧЕННАЯ МЕХАНИЧЕСКАЯ СИСТЕМА	18
3. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ.....	20
4.ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ В И Ω	25
4.1. ПЕРВЫЙ СПОСОБ.....	25
4.2 ВТОРОЙ СПОСОБ	28
5. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ.....	31
6. ВЫВОД.....	41
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	42

ВВЕДЕНИЕ

Многие из задач, стоящих перед физиками, инженерами и прикладными математиками, связаны с такими трудностями, как нелинейные определяющие уравнения, переменные коэффициенты и нелинейные граничные условия на сложных известных или неизвестных границах, что исключает их точное решение. Следовательно, решения аппроксимируются с использованием численных методов, аналитических методов и их комбинаций. Среди аналитических методов ведущее место занимают систематические методы возмущений (асимптотических разложений) по малому или большому параметру, или координате.

Точные решения редко встречаются во многих разделах механики жидкости, механики твердого тела, движения и физики из-за нелинейностей, неоднородностей и общих граничных условий. Поэтому инженеры, физики и прикладные математики вынуждены находить приближенные решения стоящих перед ними задач. Эти приближения могут быть чисто числовыми, чисто аналитическими или комбинацией числовых и аналитических методов.

Для получения более точных приближенных решений нелинейных задач в области техники, прикладной математики, физических и социальных наук было разработано множество аналитических или полуаналитических методов. Многие исследователи пытались найти приближенные решения, используя эти аналитические методы. Аналитические методы, которые были разработаны для решения сильно нелинейных осцилляторов, включают итерационные методы. В которых модифицированные решения некоторых нелинейных осцилляторов были получены на основе классической итерационной процедуры. С использованием ряда Фурье и всех его членов

(иногда приблизительно) на каждом итерационном шаге. Третья и четвертая приближительные частоты различных нелинейных задач хорошо согласуются с точными значениями. Был представлен новый метод аналитического решения гармонического осциллятора Дуффинга. Метод получен путем объединения метода Ньютона с методом гармонического баланса. Используя метод, можно получить линейные алгебраические уравнения вместо нелинейных алгебраических уравнений. Сложность метода ГБ значительно упрощается. Повторение процедуры приводит к быстрой сходимости относительно точного решения. Результаты действительны для всего диапазона амплитуд колебаний, включая предельные случаи, когда амплитуда приближается к нулю и бесконечности.

Так же был включен вариационный метод итераций, состоящий из трех стандартных алгоритмов для решения дифференциальных уравнений, интегро-дифференциальных уравнений, дробно-дифференциальных уравнений, фрактальных дифференциальных уравнений, дифференциально-разностных уравнений и дробных / фрактальных дифференциально-разностных уравнений. Приведены физические интерпретации дробного исчисления и фрактальной производной и обсуждается применение к уравнениям с дискретной решеткой. Точные решения многих нелинейных уравнений могут не иметь никакого физического смысла, подчеркивается важность поиска приближенных решений, которые удовлетворяют как уравнениям, так и соответствующим начальным / граничным условиям. Метод вариационной итерации особенно подходит для решения такого рода задач. Также обсуждались приближенные начальные / граничные условия и точечные граничные начальные / условия, причем метод вариационной

итерации способен восстанавливать правильные начальные / граничные условия и находить решения одновременно.

Были рассмотрены: метод гомотопических возмущений (метод связи гомотопической техники и метода возмущений для решения нелинейных задач. В отличие от традиционных методов возмущений, предлагаемый метод не требует малого параметра в уравнении. В этом методе, в соответствии с гомотопической техникой, строится гомотопия с параметром вложения $\rho \in [0,1]$, и параметр вложения рассматривается как “малый параметр”. Таким образом, предлагаемый метод может в полной мере использовать традиционные методы возмущений) и новый вариационный подход для предельных циклов своего рода нелинейных осцилляторов. В последнее время метод гомотопических возмущений был модифицирован как метод оптимальных гомотопических возмущений. С инженерной точки зрения очень важно разработать надежную методику исследования нелинейной динамики вращающихся систем, чтобы делать выводы, позволяющие избежать нежелательного поведения системы. Это полезно для разработки высокопроизводительных продуктов с более высокими скоростями или более длительными периодами между простоями.

Метод гармонического баланса (ГБ) является широко используемым методом решения нелинейных систем, в которых используются усеченные ряды Фурье. Этот метод может быть использован для определения приближенных периодических решений нелинейных дифференциальных уравнений. Если периодическое решение действительно существует, его можно искать в виде ряда Фурье, коэффициенты которого определяются требованием, чтобы ряд удовлетворял уравнению движения. Методы итеративного гомотопического гармонического баланса и баланса энергии

также широко используются для решения сильно нелинейных осцилляторов. Новый алгоритм предлагает многообещающий подход путем построения гамильтониана для нелинейного генератора. Хотя эти аналитические методы были разработаны для работы с нелинейными осцилляторами, они дают почти аналогичные результаты для конкретного приближения.

Ключом к решению современных задач является математическое моделирование. Этот процесс включает в себя сохранение определенных элементов, пренебрежение некоторыми и приближение к другим. Чтобы выполнить этот важный шаг, необходимо определить порядок величины (т. е. малости или величины) различных элементов системы, сравнив их друг с другом, а также с основными элементами системы. Этот процесс называется обезразмериванием переменных. Следовательно, всегда следует вводить безразмерные переменные, прежде чем пытаться делать какие-либо приближения. Например, если элемент имеет длину один сантиметр, будет ли этот элемент большим или маленьким? Нельзя ответить на этот вопрос, не зная рассматриваемой проблемы. Если задача связана с движением спутника по орбите вокруг Земли, то один сантиметр — это очень-очень мало. С другой стороны, если задача касается межмолекулярных расстояний, то один сантиметр — это очень и очень много. В качестве второго примера, один грамм маленький или большой? Опять же, один грамм очень и очень мал по сравнению с массой спутника, но очень и очень велик по сравнению с массой электрона. Таким образом, выражение уравнений в безразмерной форме позволяет выявить важные безразмерные параметры, определяющие поведение системы. Даже если вас не интересуют приближения, рекомендуется выполнить этот важный шаг перед анализом системы или представлением экспериментальных данных.

Обыкновенные дифференциальные уравнения (сокращенно ОДУ) повсеместно используются как в фундаментальной науке, так и в технике. На самом деле они обычно возникают как прямые результаты применения некоторых фундаментальных законов в различных областях науки или техники. Классический пример здесь — второй закон движения Ньютона. Они также часто возникают косвенно, например, на промежуточных этапах решения других типов задач, таких как уравнения в частных производных (УЧП).

Рассмотрим механическую систему, состоящую из точки с массой m , подвешенной на идеальной пружине с постоянной жесткостью k , которая описывается обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) вида

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) на самом деле является стандартной моделью автономных генераторов, поскольку оно также очень хорошо подходит для описания различных задач, когда принимаются во внимание особые обстоятельства. Теория и методология решения линейных дифференциальных уравнений, к которым относится уравнение (1), получили широкое развитие. Однако хорошо известно, что многие наиболее интересные особенности природных явлений или технических систем скрыты в их нелинейном поведении. Поэтому для более точных моделей необходимо учитывать нелинейность. Это все же создает серьезную проблему, поскольку не существует стандартных методов решения нелинейных задач, в отличие от линейного случая.

Таким образом, разработка аналитических методов решения нелинейных задач является предметом интенсивных исследований на протяжении многих десятилетий. Итак, для важного класса ОДУ, связанных с колебательным поведением, были разработаны многочисленные методы,

которые позволяют получить некоторые приближения к желаемым решениям. К наиболее известным методам возмущения относятся метод Линдштедта-Пуанкаре (ЛП), метод множественных масштабов (ММС) и метод Крылова-Боголюбова-Митропольского (КБМ). Известно, что эти ставшие уже классическими методы имеют ряд серьезных ограничений. Например, они бесполезны для уравнений, которые описывают существенно нелинейные осцилляторы, такие как $f(x) = x^3$.

Напротив, методы без возмущений, хорошо известным примером которых является метод гармонического баланса (ГБ), не имеют этих ограничений. Но непосредственное применение этого последнего метода приводит к системам нелинейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов усеченного ряда Фурье, принимаемых за решения; которые еще очень трудно решить. Однако острота этой трудности теперь может быть значительно уменьшена благодаря идее, первоначально предложенной Ву и Ли [1] и доработанной Ву и его сотрудниками [2,3]. Он состоит в линеаризации основных уравнений перед применением самого ГБ, что затем приводит к линейным алгебраическим уравнениям вместо нелинейных. Полученный в результате метод гармонического баланса с линеаризацией был применен к различным типам консервативных симметричных осцилляторов и оказался достаточно эффективным и очень простым.

Изучение нелинейных задач имеет решающее значение во всех областях физики. Некоторые из наиболее интересных особенностей физических систем скрыты в их нелинейном поведении и могут быть изучены только с помощью соответствующих методов, предназначенных для решения нелинейных задач. В общем случае, учитывая характер нелинейных явлений, аппроксимационные методы могут быть применены только в определенных

диапазонах физических параметров или только к определенным классам задач. Разработка нелинейных структур, сочетающих в себе простоту эксплуатации и гибкость в применении, представляет собой сложную задачу.

В результате были достигнуты замечательные успехи благодаря разработке ряда новых методов таких как метод линейного δ -разложения Линдштедта-Пуанкаре [4,5]. Существует несколько методов, которые использовались для нахождения приближенных решений нелинейных задач. Линдштедт давно разработал метод, в котором рассматриваются решения задач с участием консервативных колебательных систем с неизвестным периодом. Основное наблюдение состоит в том, что, вводя перемасштабированное время, можно избежать появления членов, бесконечно растущих со временем («вековых членов»), обычных в стандартной теории возмущений. Этот метод теперь известен как метод Линдштедта-Пуанкаре (ЛП) или как метод искаженного времени.

Другим известным методом является пертурбативное δ -разложение. В этом случае идея состоит в том, чтобы изменить показатель степени нелинейного члена, введя параметр δ в качестве нового показателя степени. δ интерполирует между линейной ($\delta = 0$) и нелинейной ($\delta = 1$) задачами. Если удастся решить линейную задачу, то исходная нелинейная задача после степенного разложения по δ превращается в бесконечную последовательность линейных задач, которые (формально) разрешимы.

Еще одной основой является многомасштабная теория возмущений. В этом случае решаются проблемы, в которых динамическая система имеет физическое поведение в различных масштабах длины или времени. Обычно это проблематично для обычной теории возмущений из-за появления (опять же) вековых членов. Основная идея состоит в том, чтобы ввести более одного

времени и рассматривать их как независимые переменные. Выполняя обычное пертурбативное разложение, затем накладывают условия на решения (которые зависят от разных «времен»), чтобы избавиться от вековых членов, и остается решить линейное дифференциальное уравнение.

Наконец, линейное дельта-расширение. Это метод, при котором в задачу вводится произвольный (или несколько) параметр λ , а расчеты ведутся с помощью обычной теории возмущений по параметру разложения $\delta = 1$. При каждом порядке по δ сходимость аппроксимации может быть улучшена применяя принцип минимальной чувствительности, который состоит в минимизации наблюдаемой по параметру λ .

Так же был представлен новый точный итерационный и асимптотический метод для построения аналитических приближенных решений для сильно нелинейных консервативных симметричных осцилляторов. Метод основан на применении разложения второго порядка с помощью метода гармонического баланса и исключает требование решения набора связанных нелинейных алгебраических уравнений. Итерация Ньютона или линеаризованная модель могут быть легко выведены путем рассмотрения только членов первого порядка в модели. В соответствии с этим итерационным подходом требуются только разложения в ряд Фурье функции восстанавливающей силы, ее производных первого и второго порядка для каждой итерации. Здесь делается вывод, что всего за одну итерацию могут быть получены очень краткие и в то же время точные аналитические приближенные решения.

Методы возмущений, такие как метод Линдстедта–Пуанкаре (Л–П), метод Крылова–Боголюбова (КБ), метод Крылова–Боголюбова–Митропольского (КБМ) и метод множественных масштабов (ММС), широко

используется при нахождении приближенных аналитических решений нелинейных колебательных систем. Эти методы не только позволяют определять установившиеся периодические движения, но также (кроме метода Л-П) позволяют определять переходный характер движения к установившемуся решению. Однако применение теории возмущений во многих важных практических задачах не правомерно, либо она просто не работает для параметров, выходящих за определенный заданный диапазон. Для улучшения этих методов приводятся различные методы теории возмущений, в том числе модифицированные методы Л-П, усовершенствованный метод КБ, методы КБМ на основе эллиптических функций Якоби, проекция Галеркина на основе ММС, методы усреднения на основе гармонического баланса, линейризованный метод КБ на основе гармонического баланса и метод КБМ на основе постоянного расширения.

Метод гармонического баланса — хорошо зарекомендовавшая себя процедура определения аналитических приближений к решениям дифференциальных уравнений, отклик которых во временной области может быть выражен в виде ряда Фурье. В обычных методах гармонического баланса (ГБ) предполагается, что решение нелинейной системы имеет вид усеченного ряда Фурье. Этот метод может быть применен к нелинейным колебательным системам, где нелинейные члены не малы и не требуется параметр возмущения. В отличие от других нелинейных аналитических методов, таких как методы возмущений, ГБ не зависит от малых параметров, поэтому он может найти широкое применение в нелинейных задачах без линейризации или малых возмущений. Были сделаны различные обобщения ГБ, и одним из них является рациональное представление, предложенное Миккенсом и его сотрудниками [20]. В данной работе предлагается модифицированный

обобщенный рациональный ГБ для построения приближенных аналитических решений консервативных нелинейных колебаний, в которых нелинейная восстанавливающая сила $f(x)$ является нечетной функцией x (т. е. $f(-x) = -f(x)$); здесь x представляет смещение, измеренное от устойчивого положения равновесия. В этом методе полученное приближенное решение аппроксимирует все гармоники в точном решении, тогда как обычные методы гармонического баланса обеспечивают аппроксимацию только самых низких гармонических составляющих. В большинстве случаев применение рационального ГБ приводит к очень сложным системам алгебраических уравнений с очень сложной нелинейностью, которые приходится решать даже во втором приближении. В попытке обеспечить лучшую методологию решения предлагается модификация этой техники для построения аналитического приближенного решения второго порядка для консервативных нелинейных осцилляторов, управляемых дифференциальными уравнениями с нечетной нелинейностью. Наиболее интересными особенностями предлагаемого метода являются его простота и отличная точность в широком диапазоне значений амплитуды колебаний [20].

Общим для всех перечисленных методов является то, что они основаны на разложении по некоторому малому параметру задачи. Поэтому они дают приближенные решения в виде многочлена от такого параметра. Со временем стало ясно, что требование существования малого параметра не может быть выполнено для всех актуальных задач. В науке и технике существует множество нелинейных колебательных систем, в которых параметры не малы. Эти колебательные системы часто описываются нелинейными дифференциальными уравнениями. Чтобы решить эти проблемы, можно заменить нелинейное дифференциальное уравнение родственным линейным

уравнением, которое достаточно точно аппроксимирует исходное нелинейное уравнение, чтобы обеспечить полезные результаты. Часто такая линеаризация невозможна, и поэтому необходимо рассматривать само исходное нелинейное дифференциальное уравнение.

Кроме того, когда существует малый параметр, опыт применения методов возмущений показал, что полученные решения справедливы только в некотором ограниченном диапазоне как параметров, так и амплитуд колебаний. Прямые, непосредственные разложения по степеням параметра имеют, как правило, ограниченные области пригодности и нарушаются в некоторых областях, называемых областями неравномерности. Для приведения этих разложений к равномерно пригодному виду исследователи, работающие в различных областях физики, техники и прикладной математики, разработали ряд методов. Некоторые из этих методов между собой совершенно не похожи, другие являются разными интерпретациями одной и той же основной цели.

Как упоминалось ранее, желательно иметь метод, работающий в большом диапазоне параметров, что не всегда имеет место в вышеупомянутых методах, и хотелось бы, чтобы новый метод давал меньшую погрешность в аппроксимациях, чем его конкуренты. Также желательно разработать структуру, обладающую эксплуатационной гибкостью и легко адаптируемую ко многим разным проблемам.

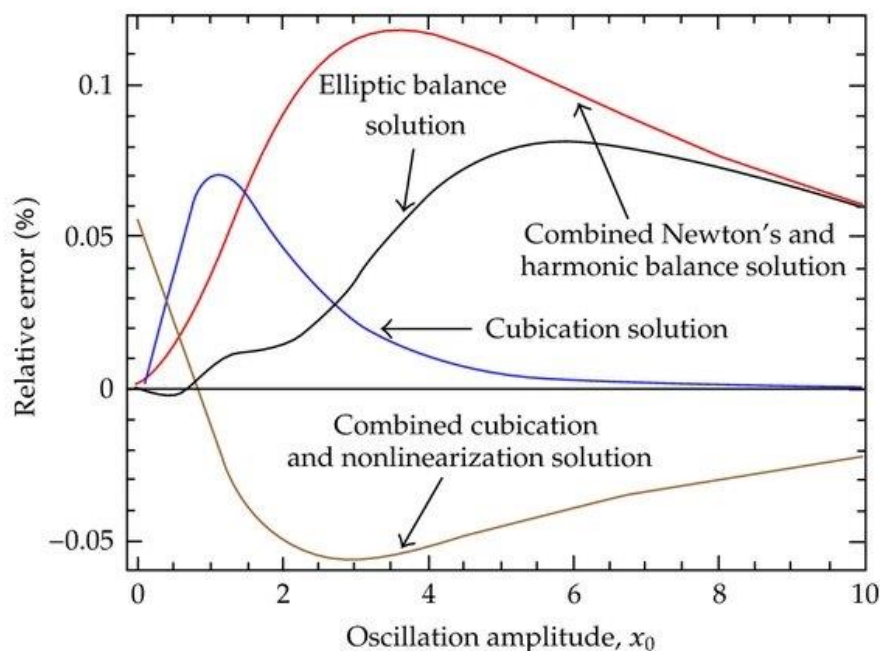
В большинстве исследований, в которых разрабатываются перечисленные методы, использовались уравнения семейства осцилляторов Дуффинга, чтобы продемонстрировать, что они работают значительно лучше, чем методы возмущений. Их превосходство также было подтверждено решениями, полученными этими методами для многих уравнений

осциллятора, отличных от уравнения Дуффинга. Метод гармонического баланса Ньютона был использован для получения высокоточных приближенных решений уравнений осциллятора с нерациональной возвращающей силой [8]. Он также применялся к гармоническому уравнению Дуффинга [9]. Ямгуэ и соавт. использовали рациональный гармонический баланс для определения высокоточных решений нескольких уравнений осциллятора [7]. Тот же метод был использован А. Белендесом для решения уравнения обратного гармонического осциллятора [6].

Модифицированный метод рационального гармонического баланса второго порядка используется для приближенного решения нелинейного дифференциального уравнения, описывающего колебания консервативной автономной системы с одной степенью свободы. Осциллятор Дуффинга анализируется, чтобы проиллюстрировать полезность и эффективность предложенной техники. Было доказано, что этот метод очень хорошо работает для этого генератора, и было продемонстрировано и обсуждено превосходное совпадение приближенных частот с точными. Для приближения второго порядка показали, что относительная ошибка в аналитической приближенной частоте составляет всего 0,0055%, когда A стремится к бесконечности. Также сравнили разложения в ряды Фурье аналитического приближенного решения и точного. Это позволило сравнить коэффициенты при различных гармонических членах в этих решениях.

Белендез использовал метод кубизации для аппроксимации решений уравнения гармонического осциллятора Дуффинга [10]. Методы кубирования и эквивалентной нелинейности используются для замены исходного генератора гармоник Дуффинга приближенным уравнением, в котором коэффициенты для линейного и кубического членов зависят от начальной

амплитуды колебаний. Показано, что эта процедура приводит к значениям угловой частоты с максимальной относительной погрешностью 0,055%. Это значение на 21% ниже относительных ошибок, достигнутых ранее разработанными приближенными решениями.



Другие соответствующие работы, которые развивают метод обобщенного гармонического баланса для получения приближенных аналитических решений нелинейных систем, были недавно представлены Луо [11] и Луо и Хуангом [12–15].

В статье [12] представлен обобщенный метод гармонического баланса для приближенных аналитических решений периодических движений в нелинейных динамических системах. В качестве примера задачи исследуется нелинейный демпфирующий периодически вынужденный осциллятор Дуффинга. Приближенное аналитическое решение периодического движения такого осциллятора с периодом 1 получено методом обобщенного гармонического баланса (ГБ). Проведен анализ устойчивости и бифуркаций приближенного решения ГБ для движений с периодом 1 в вынужденном

осцилляторе Дуффинга и получена карта параметров для таких решений ГБ. Представлены численные иллюстрации движений периода 1. Точно так же те же идеи могут быть распространены на движения с периодом k в таком осцилляторе. Методология, представленная в этой статье, может быть применена к другим нелинейным вибрационным системам, которые не зависят от малых параметров.

Стоит отметить, что, за исключением простого уравнения типа маятника и Дуффинга, различные уравнения модели осциллятора, приведенные выше, и многие другие, найденные в специальной литературе, редко связаны очевидным образом с реальными физическими системами. В любом случае, несмотря на разнообразие уравнений, встречающихся в литературе, они далеко не охватывают все случаи интересующих задач. Следовательно, результаты для уравнений с более интуитивным значением гарантированы. Именно в этом контексте мы намерены искать приближения к периодическим решениям определенного класса уравнений осцилляторов. Это уравнение, которое расширяет уравнение Дуффинга с помощью члена, который является квадратичным мономом от скорости и коэффициент которого является рациональной функцией положения. Такой коэффициент может быть связан с массой, зависящей от положения, или может быть следствием геометрических/кинематических ограничений. Данное уравнение представлено в следующем разделе вместе с механизмом с ограничениями, который его моделирует. В разделе 3 мы кратко рассматриваем и используем гармонический баланс Ньютона для получения его приближенных решений. Метод используется двумя различными способами:

1. прямое применение к уравнению в его естественной рациональной форме,

2. применение к числителю после приведения уравнения к одному знаменателю.

Полученные результаты сравниваются и обсуждаются.

2. ОГРАНИЧЕННАЯ МЕХАНИЧЕСКАЯ СИСТЕМА

Рассмотрим механизм, показанный на рис. 1.

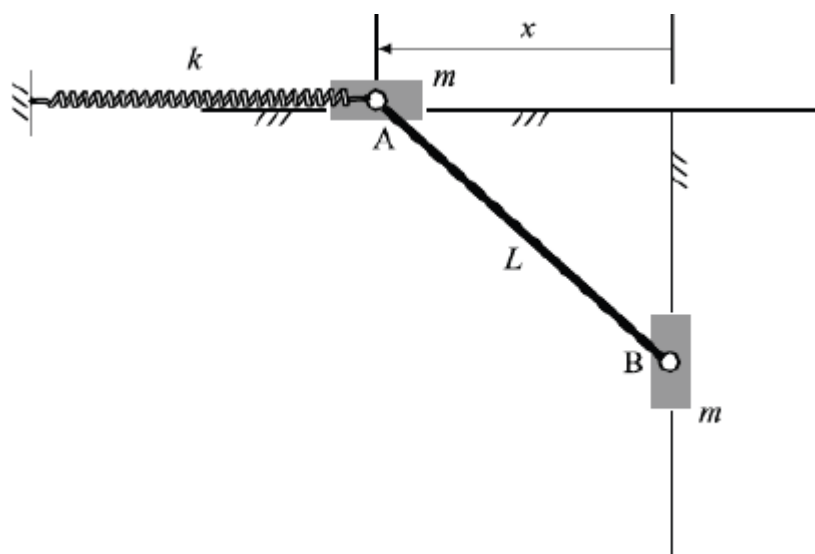


Рис. 1 Пример механической системы, описываемой уравнением (4).

Он состоит из двух ползунков А и В одинаковой массы m , соединенных легким жестким стержнем длиной L . Ползунки движутся с пренебрежимо малым трением в двух щелях, направления которых перпендикулярны друг другу и находятся в горизонтальной плоскости. Ползун А, приводимый в движение вдоль оси абсцисс, также связан с пружиной. Ввиду ограничения $x^2 + y^2 = L^2$ легко видеть, что полная кинетическая энергия этой системы определяется выражением

$$\mathfrak{T}(x) = \frac{mL}{2(L^2 - x^2)} x^2. \quad (2)$$

Предполагая, что пружина имеет постоянную жесткость k , из лагранжиана системы следует

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \mathfrak{T}(x) - \frac{kx^2}{2} \quad (3)$$

и вариационный принцип Эйлера-Лагранжа, согласно которому механизм на рис. 1 управляется ОДУ вида

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \alpha x^3 + \beta \frac{x}{1 + \sigma x^2} \dot{x}^2 = 0; \quad (4)$$

с участием

$$\omega = \sqrt{\frac{kL}{m}}, \beta = -\sigma = \frac{1}{L^2}, \alpha = -\frac{k}{mL}. \quad (5)$$

Уравнение (4) — это то, для которого мы будем искать решения. Очевидно, что количество параметров можно было бы уменьшить, не вводя ни одного из β или σ . Кроме того, введением безразмерных переменных $\bar{x} = \frac{x}{L}$ и $\bar{t} = t \sqrt{\frac{kL}{m}}$ все коэффициенты в уравнении (5) можно было сделать равными ± 1 . Мы сохранили фактическую форму, потому что она допускает возможность того, что для другого набора значений этих параметров она может применяться к другим проблемам, а не только к механизму, используемому при ее получении.

3. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ

Приступим к задаче аналитической аппроксимации периодических решений уравнения (4). Хорошо известно, что решение ОДУ для скалярной переменной содержит столько произвольных констант, каков порядок этого ОДУ. Они определяются либо начальными условиями для начальных задач, либо граничными условиями для краевых задач. Принято принимать следующие начальные условия

$$x(0) = A, \dot{x}(0) = 0, \quad (6)$$

где $A > 0$. Теперь заметим, что уравнение (4) обладает свойством нечетности, т. е. имеет вид $H(\ddot{x}, \dot{x}, x) = 0$, где функция H удовлетворяет условию $H(-u, -v, -w) = -H(u, v, w)$. Рассмотрим доказательство, приведенное Миккенсом [17].

Утверждение

Разложения в ряды Фурье точных решений таких ОДУ содержат, с одной стороны, только гармоники нечетного порядка; и что, с другой стороны, их можно заставить содержать только члены косинуса.

Доказательство

Многие важные колебательные динамические системы моделируются дифференциальными уравнениями, которые принимают вид

$$H(x, \dot{x}, \ddot{x}) = \ddot{x} + x + \varepsilon f(x, \dot{x}) = 0, \quad (7)$$

Где ε — положительный параметр, а $f(x, y)$ — рациональная функция двух своих аргументов. Система с нечетной четностью определяется как система, для которой выполняется следующее свойство:

$$x \rightarrow -x \Rightarrow H(-x, -\dot{x}, -\ddot{x}) = -H(x, \dot{x}, \ddot{x}). \quad (8)$$

Рассмотрим теперь следующие две системы с нечетной четностью вместе с соответствующими им решениями, производными от возмущения (для случая, когда $0 < \varepsilon \leq 1$):

$$\ddot{x} + x + \varepsilon x^3 = 0; \quad x(0) = A, \dot{x}(0) = 0, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} x(\theta, \varepsilon) = & A \cos \theta + \varepsilon \left(\frac{A^3}{32} \right) (-\cos \theta + \cos 3\theta) \\ & + \varepsilon^2 \left(\frac{A^5}{1024} \right) (23 \cos \theta - 24 \cos 3\theta + \cos 5\theta) \\ & + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (10a)$$

$$\theta(\varepsilon, t) \equiv \omega(\varepsilon)t = \left[1 + \varepsilon \left(\frac{3A^2}{8} \right) - \varepsilon^2 \left(\frac{21A^4}{256} \right) + O(\varepsilon^3) \right] t \quad (10b)$$

и

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} x(\theta, \varepsilon) = & 2 \cos \theta + \left(\frac{\varepsilon}{4} \right) (3 \sin \theta - \sin 3\theta) \\ & + \left(\frac{\varepsilon^2}{96} \right) (-13 \cos \theta + 18 \cos 3\theta - 5 \cos 5\theta) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (12a)$$

$$\theta(\varepsilon, t) \equiv \omega(\varepsilon)t = \left[1 - \frac{\varepsilon^2}{16} + O(\varepsilon^3) \right] t. \quad (12b)$$

Обратите внимание, что для обеих этих систем с нечетной четностью решения возмущений имеют тригонометрические разложения, в которых появляются только нечетные кратные угловых частот (ω)!

Основная цель состоит в том, чтобы продемонстрировать правильность следующего утверждения: для систем с нечетной четностью представления Фурье включают только вклады членов, имеющих нечетные кратные угловой частоты. Другими словами, такие системы имеют периодические решения, которые принимают вид

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos(2k - 1) \omega t + B_k \sin(2k - 1) \omega t]. \quad (13)$$

Для продолжения необходимы следующие предположения:

- 1) Уравнение (7) имеет нечетную четность.
- 2) Периодические решения уравнения (7) возникают около неподвижной точки $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$ в двумерном фазовом пространстве $(x; y)$, где $y = \dot{x}$.

3) Периодические решения уравнения (7) по существу единственны. В этом контексте, если $x = \phi(t)$ — нетривиальное периодическое решение, то при $t_0 > 0$; $z = \phi(t - t_0)$ также является периодическим решением. С точки зрения фазового пространства движущаяся точка

$$(x(t), y(t)) = (\phi(t), \dot{\phi}(t)) \quad (14)$$

прокладывает замкнутый путь. Аналогично, подвижная точка

$$(z(t), \dot{z}(t)) = (\phi(t - t_0), \dot{\phi}(t - t_0)) \quad (15)$$

следует по тому же замкнутому пути, за исключением того, что она сдвинута по фазе.

Предположим, что уравнение (7) имеет периодическое решение с периодом T ; соответствующая угловая частота

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (16)$$

и $x(t)$ имеет комплексное представление Фурье

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} [a_k e^{ik\omega t} + a_k^* e^{-ik\omega t}], \quad (17)$$

где a_k — комплексные коэффициенты. Теперь, если $x(t)$ — периодическое решение, то и $z(t)$ определяется как

$$z(t) \equiv -x\left(t + \frac{T}{2}\right). \quad (18)$$

Это следует из того, что и $x(t)$, и $-x(t)$ являются решениями, а следовательно, $x(t - t_0)$ и $-x(t - t_0)$ также являются периодическими решениями. В уравнении (18) t_0 принимается равным $t_0 = -T/2$. Поскольку $z(t)$ является решением уравнения (7), из единственности следует, что

$$z(t) = x(t) \quad (19)$$

или же

$$x\left(t + \frac{T}{2}\right) = -x(t). \quad (20)$$

Подстановка уравнения (17) в уравнение (20) и сравнение коэффициентов двух экспоненциальных членов дает соотношение

$$(-1)^k a_k = -a_k, \quad (21)$$

что допускает нетривиальные значения для a_k только когда $k =$ нечетное целое число. Пишу

$$b_m = a_{2m-1}, \quad m = 1, 2, 3 \dots \quad (22)$$

и определение

$$A_m \equiv b_m + b_m^*, \quad B_m \equiv i(b_m - b_m^*), \quad (23)$$

отсюда следует, что для систем с нечетной четностью периодические решения имеют представление Фурье

$$x(t) = \sum_{m=1}^{\infty} [A_m \cos(2m - 1)\omega t + B_m \sin(2m - 1)\omega t]. \quad (24)$$

Другими словами, появляются только нечетные кратные угловой частоты.

Следует указать, что частный случай вынужденного уравнения Дуффинга изучал Корнер. Был сделан вывод, что периодическое решение, имеющее основную угловую частоту ω , принимает форму, заданную уравнением (24). Однако приведенное выше рассуждение является общим и

справедливо для любой системы нечетной четности, имеющей периодические решения.

Представленные здесь результаты также могут быть применены к нестандартным уравнениям с нечетной четностью, таким как

$$\ddot{x} + x + \varepsilon x^{\frac{1}{3}} = 0, \quad \ddot{x} + x^{\frac{1}{3}} = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x}. \quad (25,26)$$

Кроме того, для консервативных систем, т.е.

$$\ddot{x} + x + \varepsilon f(x) = 0, \quad f(-x) = -f(x) \quad (27)$$

начальные условия также могут быть выбраны так, что $B_m = 0$; следовательно, в представлении Фурье не появляются синусоидальные члены.

Соответственно, предельное приближение к периодическому решению уравнения (4) выражается как

$$x(t) = A[\cos(\Omega t) + b(\cos(3\Omega t) - \cos(\Omega t))]. \quad (28)$$

где Ω и b должны быть определены. Обратите внимание, что оно проверяет начальные условия в уравнении (6) на выходе.

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ b И Ω

4.1. ПЕРВЫЙ СПОСОБ

Чтобы определить выражения b и Ω через A и параметры в ОДУ, мы применяем метод гармонического баланса, который состоит в следующем. Подставим уравнение (28) в уравнение (4). Полученное уравнение разлагается в ряды Фурье по переменной t . Затем коэффициенты $\cos(\Omega t)$ и $\cos(3\Omega t)$ приравниваются нулю, образуя квадратную систему алгебраических уравнений. Последняя, как правило, не линейна и поэтому может быть решена точно только численно. Чтобы получить приближенное решение аналитически, заметим сначала, что каждое уравнение алгебраической системы точно линейно относительно Ω^2 . Это основано на том, что зависимость уравнения (4) от скорости четная и квадратичная. Следовательно, Ω^2 можно исключить из алгебраической системы уравнений. Далее мы замечаем, что подстановка в уравнении (28) задумана как $\frac{2\pi}{\Omega}$ -периодическая функция от t ; следовательно, должно выполняться $b = 1$. Более того, мы ожидаем, что коэффициенты Фурье точного решения будут экспоненциально уменьшаться в зависимости от порядка гармоник. Другими словами, если ряд Фурье точного решения можно записать в виде

$$x_e(t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_{2k-1}(A) \cos[(2k-1)\Omega t] \quad (29a)$$

то существуют константы

$$M > 0, \quad 0 < \theta < 1, \quad (29b)$$

такие, что

$$|C_{2k-1}(A)| \leq M\theta^{2k-1}. \quad (29c)$$

По сути, для нашего уравнения (28) это означает, что $|b| \ll |1-b|$. Будем считать для простоты, что $|b| \rightarrow 0$; так что алгебраические уравнения могут быть линеаризованы относительно b .

Для ОДУ второго порядка, полиномиальных как по зависимой переменной, так и по всем ее производным, применение только что описанной процедуры не вызывает затруднений. Однако для некоторых рациональных уравнений, как в нашем случае, его можно применить двумя разными способами.

Сначала можно привести уравнение (4) к одному знаменателю и приравнять числитель к нулю, представив его в виде

$$(1 + \sigma x^2)(\ddot{x} + \omega^2 x + \alpha x^3) + \beta x \dot{x}^2 = 0 \quad (30)$$

до осуществления подстановки. Следуя подходу, описанному выше, мы легко составим систему алгебраических уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} -45\sigma\alpha A^5 b_p^5 + 100\sigma\alpha A^5 b_p^4 - 100\sigma\alpha A^5 b_p^3 + 60\sigma\alpha A^5 b_p^2 - 56\beta A^3 b_p^3 \Omega^2 \\ + 120\sigma A^3 b_p^3 \Omega^2 - 24\sigma\omega^2 A^3 b_p^3 - 25\sigma\alpha A^5 b_p + 44\beta A^3 b_p^2 \Omega^2 - 100\sigma A^3 b_p^2 \Omega^2 \\ + 36\sigma\omega^2 A^3 b_p^2 + 10\alpha\sigma A^5 + 8\beta A^3 b_p \Omega^2 - 8\sigma A^3 b_p \Omega^2 - 24\alpha A^3 b_p^3 \\ - 24\sigma\omega^2 A^3 b_p + 4\beta A^3 \Omega^2 - 12\sigma A^3 \Omega^2 + 36\alpha A^3 b_p^2 + 12\sigma\omega^2 A^3 - 24\alpha A^3 b_p \\ + 12\alpha A^3 + 16Ab_p \Omega^2 - 16\omega^2 Ab_p - 16A\Omega^2 + 16\omega^2 A = 0 \\ 65\sigma\alpha A^5 b_p^5 - 125\sigma\alpha A^5 b_p^4 + 100\sigma\alpha A^5 b_p^3 - 40\sigma\alpha A^5 b_p^2 + 48\beta A^3 b_p^3 \Omega^2 \\ + 32\sigma\omega^2 A^3 b_p^3 + 5\sigma\alpha A^5 b_p - 28\beta A^3 b_p^2 \Omega^2 + 164\sigma A^3 b_p^2 \Omega^2 - 192\sigma A^3 b_p^3 \Omega^2 \\ - 36\sigma\omega^2 A^3 b_p^2 + 5\alpha\sigma A^5 + 20\beta A^3 b_p \Omega^2 - 76\sigma A^3 b_p \Omega^2 + 32\alpha A^3 b_p^3 + 12\sigma\omega^2 A^3 b_p \\ - 4\beta A^3 \Omega^2 - 4\sigma A^3 \Omega^2 - 36\alpha A^3 b_p^2 + 4\sigma\omega^2 A^3 + 12\alpha A^3 b_p + 4\alpha A^3 - 144Ab_p \Omega^2 \\ + 16\omega^2 Ab_p = 0 \end{array} \right.$$

Из полученной системы легко находим, что угловая частота Ω и коэффициент b выражаются соответственно как

$$\Omega_p^{(2)} = \sqrt{\frac{\lambda_{00} - \lambda_{01}b_p + \lambda_{02}b_p^2 - 55\sigma\alpha A^4 b_p^3 + 45\sigma\alpha A^4 b_p^4}{4((4 - (\beta - 3\sigma)A^2) - (3\beta - 5\sigma)A^2 b_p - 2(7\beta - 15\sigma)A^2 b_p^2)'}} \quad (31a)$$

$$b_p = \frac{(\lambda_{10} - \lambda_{12}A^2 + \lambda_{14})A^2}{512\omega^2 + \lambda_{22}A^2 - \lambda_{24}A^4 + \lambda_{26}A^6}, \quad (31b)$$

с участием

$$\lambda_{00} = 2(8\omega^2 + 6(\alpha + \omega^2\sigma)A^2 + 5\sigma\alpha A^4), \quad (32a)$$

$$\lambda_{01} = 3(4(\alpha\omega^2 + \sigma)A^2 + 5\sigma\alpha A^4), \quad (32b)$$

$$\lambda_{02} = 3(8(\alpha\omega^2 + \sigma)A^2 + 15\sigma\alpha A^4), \quad (32c)$$

$$\lambda_{10} = 16(\alpha - \beta\omega^2), \quad (32d)$$

$$\lambda_{12} = 4(4\beta\alpha - 5\sigma\alpha + 4\beta\omega^2\sigma), \quad (32e)$$

$$\lambda_{14} = 5(\sigma^2\alpha - 3\beta\alpha\sigma), \quad (32f)$$

$$\lambda_{22} = 64(6\alpha - \beta\omega^2 + 10\omega^2\sigma), \quad (32g)$$

$$\lambda_{24} = 4(12\beta\alpha - 125\sigma\alpha - 40\omega^2\sigma^2 + 12\beta\omega^2\sigma), \quad (32h)$$

$$\lambda_{26} = 45(3\sigma^2\alpha - \beta\alpha\sigma). \quad (32i)$$

Нижний индекс p на Ω и b используется в уравнениях (31), чтобы напомнить, что эти результаты получены, когда исходное ОДУ представлено в полиномиальной форме; а верхний индекс (2) напоминает о количестве гармоник, используемых в аппроксимации. Частота приближенного решения с одной гармоникой выводится из приведенных выше выражений путем принятия предела $b_p \rightarrow 0$. Его выражение читается как

$$\Omega_p^{(1)} = \sqrt{\frac{8\omega^2 + 6(\alpha + \omega^2\sigma)A^2 + 5\sigma\alpha A^4}{2(4 - (\beta - 3\sigma)A^4)}}. \quad (33)$$

4.2 ВТОРОЙ СПОСОБ

В качестве альтернативы баланс гармоник может быть выполнен без приведения уравнения (4) к одному знаменателю. Точное вычисление ряда Фурье рационального члена в этом уравнении для подстановки в уравнении (7) аналитически трудновыполнимо. Основываясь на том факте, что величина b мала, как объяснялось выше, мы сначала разложим все уравнение в степенной ряд b . В настоящей работе для простоты сохранены только первые два члена, т. е. члены порядка меньше второго в этом степенном ряду. В этом случае оказывается, что первые два коэффициента каждого из следующих формальных разложений в ряд Фурье

$$\frac{\sin^2(\Omega t) \cos(\Omega t)}{1 + \sigma A^2 \cos^2(\Omega t)} = \sum_{k=0}^{\infty} \eta_{0k} \cos((2k + 1)\Omega t), \quad (34)$$

и

$$\frac{\sin^2(\Omega t) (5\sigma A^2 \cos^4(\Omega t) + (7 - \sigma A^2) \cos^2(\Omega t) - 3)}{(1 + \sigma A^2 \cos^2(\Omega t))^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \eta_{1k} \cos((2k + 1)\Omega t), \quad (35)$$

необходимы для нашего вывода. Эти коэффициенты определяются определенными интегралами рациональных функций от $\cos(\Omega t)$ и $\sin(\Omega t)$. Следовательно, их всегда можно вычислить в терминах элементарных функций путем замены $\tan\left(\frac{\Omega t}{2}\right) = \xi$ с последующим разложением на частичные дроби [18, стр. 84-85]. Более того, их вычисление может быть еще более эффективно достигнуто с помощью теоремы о вычетах [18, с. 349]. Мы получаем

$$\eta_{01} = \frac{2 + \sigma A^2 - 2\sqrt{1 + \sigma A^2}}{\sigma^2 A^4} \quad (36a)$$

$$\eta_{03} = -\frac{2(4 + 5\sigma A^2 + \sigma^2 A^4 - (4 + 3\sigma A^4)\sqrt{1 + \sigma A^2})}{\sigma^3 A^6} \quad (36b)$$

$$\eta_{11} = -\frac{8 + 4\sigma A^2 - \sigma^2 A^4 - 8\sqrt{1 + \sigma A^2}}{4\sigma^3 A^6} \quad (36c)$$

$$\begin{aligned} \eta_{13} \\ = -\frac{32 + 56\sigma A^2 + 16\sigma^2 A^4 - 3\sigma^3 A^6 - 8(4 + 5\sigma A^2)\sqrt{1 + \sigma A^2}}{4\sigma^4 A^8} \end{aligned} \quad (36d)$$

Имея под рукой эти коэффициенты, легко составить алгебраические уравнения для Ω и b . Мы будем использовать индекс r для обозначения результатов, полученных из уравнения в рациональной форме. Исключение Ω^2 , как объяснялось выше, дает

$$\Omega_r^{(2)} = \sqrt{\frac{4\omega^2 + 3\alpha A^2 - 2(2\omega^2 + 3\alpha A^2)b_r}{4(1 - \eta_{01}\beta A^2 - (1 + 4\eta_{11}\beta A^2)b_r)}} \quad (37)$$

и

$$c_2 b_r^2 + c_1 b_r + c_0 = 0 \quad (38)$$

с участием

$$c_0 = -A^3((\alpha + 4\eta_{03}\beta\omega^2) - (\alpha\eta_{01}\beta - 3\eta_{03}\beta\alpha)A^2), \quad (39a)$$

$$\begin{aligned} c_1 = A(32\omega^2 \\ + (25\alpha + 4\omega^2\omega\eta_{01}\beta + 4\eta_{03}\beta\omega^2 - 16\eta_{13}\beta\omega^{2\omega})A^2 \end{aligned} \quad (39b)$$

$$\begin{aligned} + (3\alpha\eta_{01}\beta + 6\eta_{03}\beta\alpha + 4\alpha\eta_{11}\beta - 12\eta_{13}\beta\alpha)A^4), \\ c_2 = -A(32\omega^2 + (51\alpha - 16\omega^2\eta_{11}\beta - 16\beta\eta_{13}\omega^2)A^2 \\ - 12(\alpha\beta\eta_{11} + 2\eta_{13}\beta\alpha)A^4). \end{aligned} \quad (39c)$$

Тот факт, что при малых амплитудах колебаний уравнение (4) сводится к линейному осциллятору, решение которого не содержит высших гармоник, должно быть восстановлено в наших результатах путем принятия предела при

$A \rightarrow 0$. Таким образом, из двух решений уравнения (38) выбираем то, которое быстрее убывает до нуля по мере уменьшения амплитуды колебаний A . Это значит:

$$b_r = -\frac{c_1 - \sqrt{c_1^2 - 4c_2c_0}}{2c_2}. \quad (40)$$

Полагая $b_r = 0$ в уравнении (37) и используя уравнение (36а), мы получаем одногармоническое приближение для частоты

$$\Omega_r^{(1)} = \sqrt{\frac{(4\omega^2 + 3\alpha A^2)(\sigma A^2 + 2 + 2\sqrt{1 + \sigma A^2})}{4(\sigma A^2 + 2 + 2\sqrt{1 + \sigma A^2} - \beta A^2)}}. \quad (41)$$

5. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Очень часто полученные результаты анализируются в пределах исчезающе малых амплитуд или, когда это применимо, бесконечно больших амплитуд. Следуя этой тенденции, мы сосредоточимся на конкретных значениях параметров уравнения (4), которые относятся к механической системе на рис. 1. Мы будем использовать масштабирование, упомянутое в конце раздела 2. Значения: $\omega = 1$, $\alpha = -1$, $\beta = 1$ и $\sigma = -1$. В этом случае точное аналитическое решение исследуемого уравнения можно получить следующим образом. Прежде всего следует отметить, что колебания механической системы возможны только для масштабированных амплитуд A , которые удовлетворяют условию $0 \leq A < 1$. Далее, как известно, гамильтониан \mathcal{H} системы может быть построен по знанию ее лагранжиана \mathcal{L} согласно

$$\mathcal{H}(q_i, p_i, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t); \quad p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}. \quad (42)$$

В нашем случае существует единственная обобщенная координата $q_1 \equiv x$, и последнее приведенное выше уравнение сводится к $\mathcal{H} = \mathfrak{H} - \mathcal{L}$, где \mathfrak{H} и \mathcal{L} задаются уравнениями (2)–(3). Это первый интеграл движения, постоянное значение которого можно вычислить из начальных условий. Решая уравнение $H(x, \dot{x}) = H(A, 0)$ относительно \dot{x} , мы получаем ОДУ первого порядка, которое легко интегрируется, чтобы дать

$$x(t) = A \operatorname{sn}(At = K(A); A) = A \operatorname{cd}(t, A) \quad (43)$$

где $\operatorname{sn}(u, k)$ и $\operatorname{cd}(u, k)^a$ — эллиптические функции Якоби с модулем k ; $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. Соответствующая точная угловая частота читается как

$$\Omega_a^{(\infty)} = 4K(A). \quad (44)$$

В работе [16] в примере 4 рассматривается механическая система, показанная на рисунке 1.

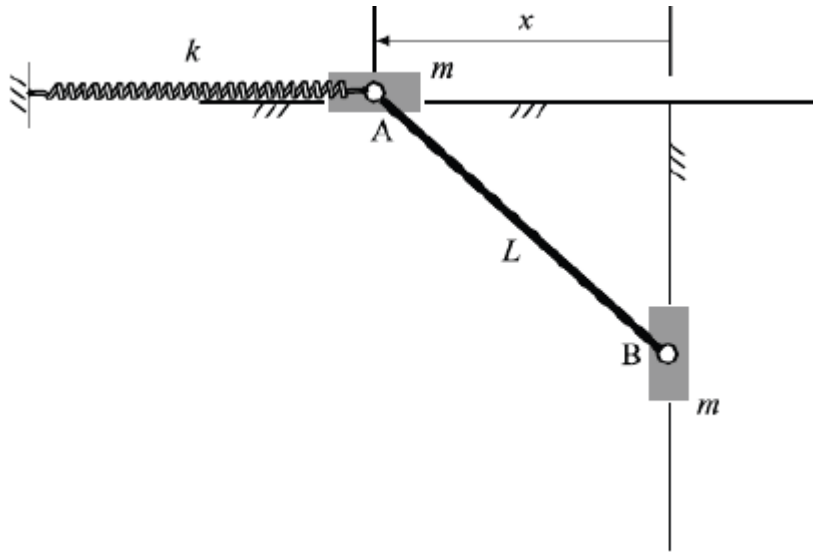


Рис. 1 Пример механической системы, описываемой уравнением (4).

Ползунки А и В одинаковой массы m соединены легким жестким стержнем длиной L и перемещаются с пренебрежимо малым трением в показанных пазах, оба из которых находятся в горизонтальной плоскости; ползунки А также соединены с пружиной. Кинетическая энергия этой системы определяется выражением

$$T(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \bar{T}(x) \dot{x}^2, \quad \bar{T}(x) = \frac{mL^2}{L^2 - x^2}. \quad (45)$$

Предполагая, что пружина линейна и имеет жесткость k , и вводя безразмерные переменные $\bar{x} = \frac{x}{L}$, $\bar{t} = \sqrt{\frac{k}{mt}}$, соответствующее уравнение движения имеет вид

$$\frac{d^2 \bar{x}}{d\bar{t}^2} + \frac{\bar{x}}{1 - \bar{x}^2} \left(\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} \right)^2 + \bar{x} - \bar{x}^3 = 0 \quad (46)$$

Это уравнение можно связать с уравнением (44) из работы [16], рассмотренным в примере 2, но здесь мы имеем дело со смягчающей

нелинейностью Дуффинга. Для $\bar{x} \neq 1$ уравнение (46) удовлетворяет условиям существования изохронных колебаний. Однако возвращающая сила и коэффициент при квадрате обобщенной скорости не согласуются с формой

$$\ddot{x} + \frac{M'}{M} \dot{x}^2 + \frac{1}{M} \left[\int_0^x M(s) ds \right] = 0, \quad (47)$$

где

$$M(x) = \sqrt{m(x)}, \quad M' = \frac{dM}{dx}$$

и решением (23)

$$X = \int_0^x \sqrt{m(s)} ds = A \cos(t + \alpha). \quad (48)$$

Здесь можно поставить вопрос о виде потенциальной энергии и возвращающей силы, при которых уравнение движения будет соответствовать уравнению (47). Таким образом, вычислив $M(\bar{x})$ из $\frac{M'}{M} = \frac{\bar{x}}{1-\bar{x}^2}$, уравнение (47) можно привести к

$$\frac{d^2 \bar{x}}{d\bar{t}^2} + \frac{\bar{x}}{1-\bar{x}^2} \left(\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} \right)^2 + \sqrt{1-\bar{x}^2} \arcsin \bar{x} = 0. \quad (49)$$

Уравнение (48) дает его изохронное решение

$$\arcsin \bar{x} = A \cos(\bar{t} + \alpha). \quad (50)$$

Следует отметить, что восстанавливающую силу в уравнении (49) можно аппроксимировать следующим образом:

$$\sqrt{1-\bar{x}^2} \arcsin \bar{x} \approx \bar{x} - \frac{\bar{x}^3}{3}, \quad (51)$$

так что уравнение (49) становится

$$\frac{d^2 \bar{x}}{d\bar{t}^2} + \frac{\bar{x}}{1-\bar{x}^2} \left(\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} \right)^2 + \bar{x} - \frac{\bar{x}^3}{3} = 0. \quad (52)$$

Сравнивая уравнение (52) с уравнением (46) можно сделать вывод, что в случае малых изохронных колебаний решение первого можно принять за хорошее приближенное решение второго. Чтобы подтвердить это, уравнения (46) и (52) решены численно для $\bar{x}(0) = 0.1$ и $\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}}(0) = 0$ и представлены на рис.6. Кроме того, решение уравнения (50) с $A = \arcsin(0.1)$, $\alpha = 0$ также показано. Видно, что эти решения хорошо согласуются.

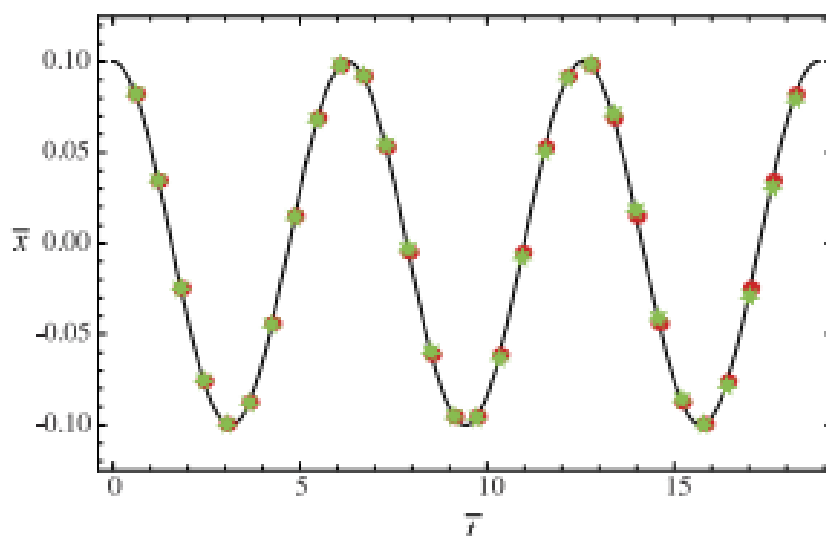


Рис.6. временная характеристика, полученная численно по уравнения (52) для $\bar{x}(0) = 0.1$ и $\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}}(0) = 0$ (красные точки) и из уравнения (46) (зеленые звездочки); аналитическое решение (50) с $A = \arcsin(0.1)$, $\alpha = 0$ (сплошная черная линия)

Мы видим, что уравнение (4) с указанными выше значениями параметров, совпадает с уравнением (46), где система была представлена как удовлетворяющая условиям существования изохронных колебаний, на самом деле изохронных колебаний не допускает.

Точность различных выражений, аппроксимирующих угловую частоту осциллятора, приведенных в уравнениях (31а) - (33) и уравнениях (37) - (41),

теперь можно оценить, сравнив их с уравнением (44). Сравнение проводится с помощью рис. 2, где эти выражения изображены в зависимости от A .

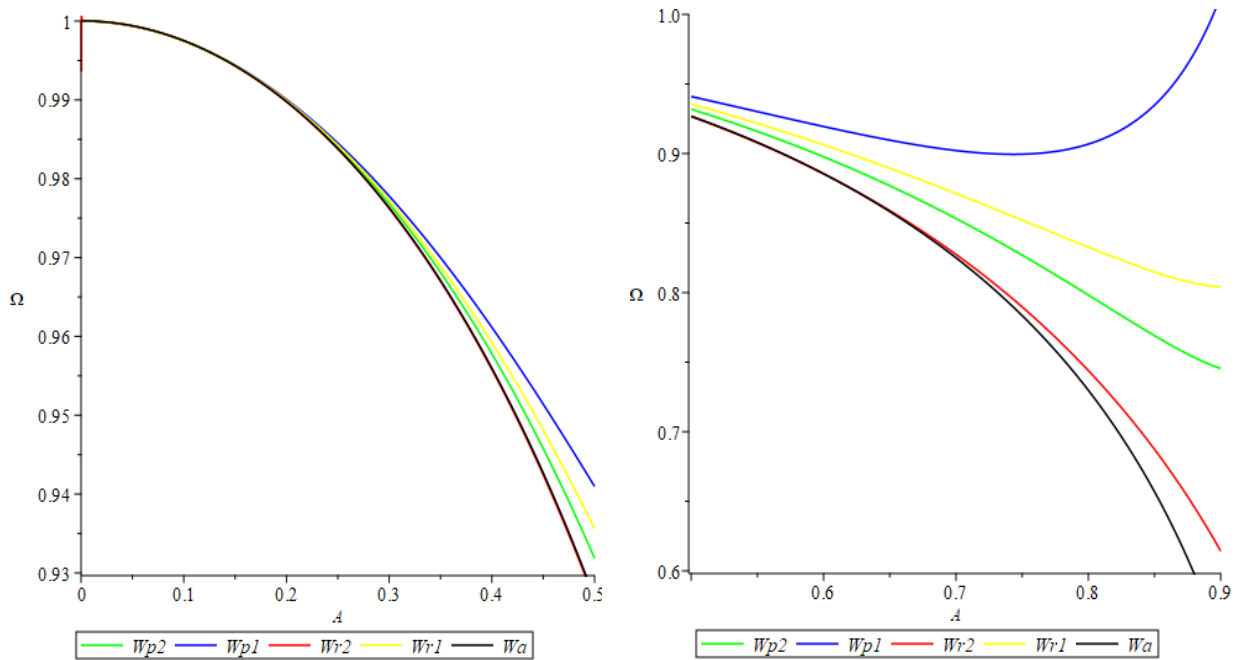


Рис. 2 Сравнение приближенных частот с точной частотой.

Значения параметров: $\omega = 1$, $\alpha = -1$, $\beta = 1$ и $\sigma = -1$.

Оказывается, что, как и следовало ожидать, все они хороши при малых значениях A (см. рис. 2(а)). Однако на рис. 2(б) видно, что по мере приближения амплитуды к максимальному значению $A_{max} = 1$ их точность снижается. Все результаты двухчленной аппроксимации более точны, чем все одночленные результаты. На рисунке дополнительно указано, что одночленный результат, полученный из «полиномиализованной» формы уравнения движения, расходится при увеличении амплитуды и что результаты, полученные с естественной рациональной формой уравнения, являются лучшими.

Поскольку малый b был принят только для линеаризации, мы также анализируем его зависимость от A на рис. 3.

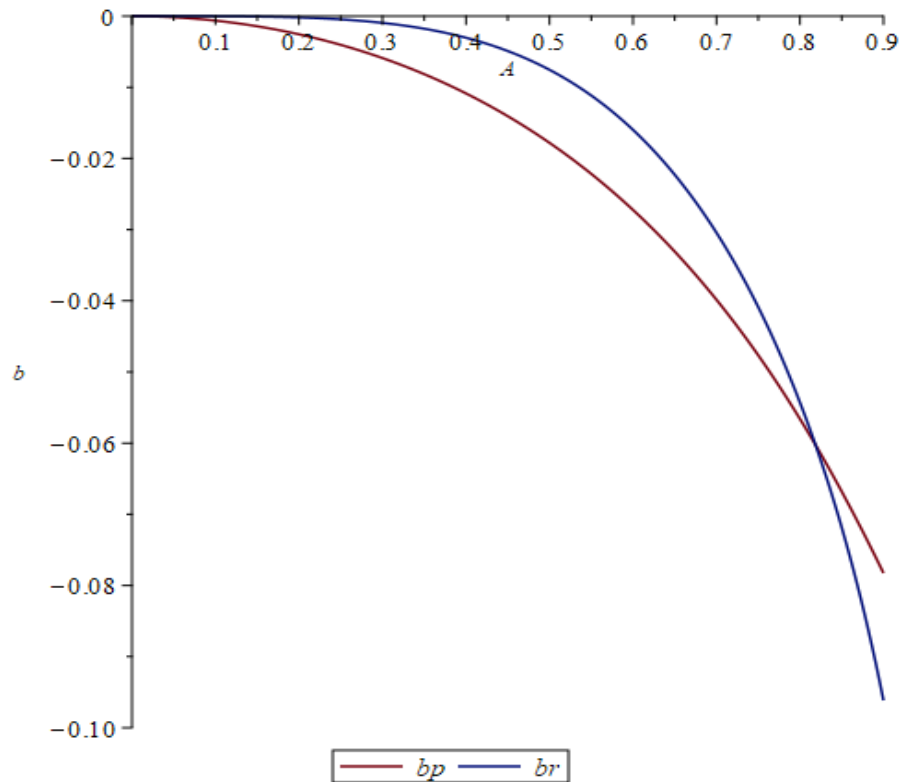


Рис. 3 Зависимость b от A . Значения параметров: $\omega = 1$, $\alpha = -1$, $\beta = 1$ и $\sigma = -1$.

Для этой задачи b сохраняет постоянный знак, т. е. отрицательный. Как и следовало ожидать, его величина увеличивается с увеличением амплитуды колебаний. При $A \gtrsim 0.5$ выражение, полученное с помощью рациональной формы, убывает быстрее, чем выражение, полученное с помощью полинома. Таким образом, правомерность предположения $|b| \rightarrow 0$ перестает быть очевидной при приближении к критической амплитуде $A_{max} = 1$. Однако величина b остается меньше единицы; что указывает на то, что некоторого улучшения можно добиться, сохранив члены более высокого порядка в разложении степенного ряда.

Мы провели исследование, как влияет изменение угловой частоты на интервал, в котором можно приближенно заменять одно решение на другое.

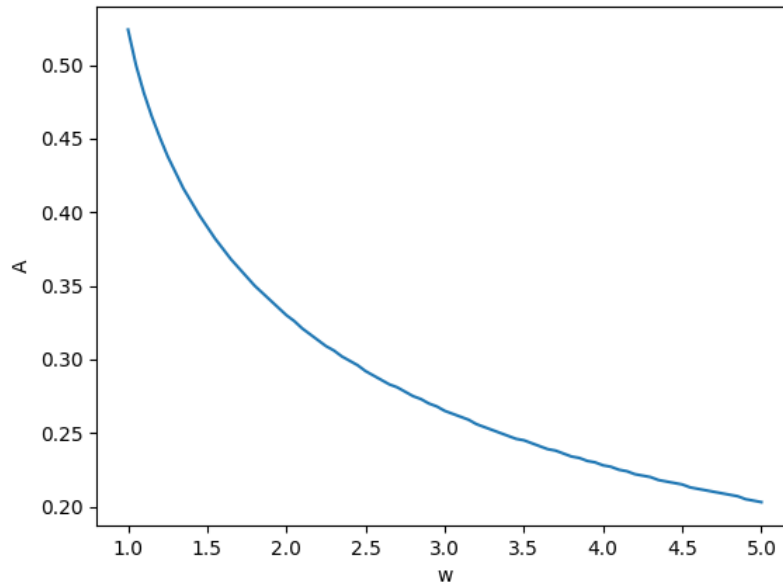


Рис.4. уменьшение точности решения при увеличении ω

При увеличении угловой частоты интервал уменьшается. Что мы наблюдаем на рис.4

Основная польза аналитических аппроксимаций заключается в том, что, будучи аналитическими выражениями, они раскрывают качественное поведение (например, зависимость от параметров) способами, недоступными для численных решений. Например, результаты для совершенно других физических систем, уравнения движения которых имеют тот же вид, что и уравнение (4), легко могут быть получены из полученных выше результатов при соответствующем выборе параметров. Эта возможность помогает нам в дальнейшем сравнить два подхода в применении гармонического баланса Ньютона к рациональным уравнениям. Фактически при $\beta = 0$ уравнение (4) сводится к известному уравнению Дуффинга. Точно так же при $\beta = \alpha = 0$ оно сводится к простому гармоническому осциллятору. Затем можно ожидать восстановления соответствующих приближенных результатов путем подстановки этих конкретных значений в результаты, полученные выше.

Однако это может работать только для результатов, полученных из рациональной формы уравнения. Неудача результатов в полиномиальной форме связана с дополнительным множителем $(1 + \sigma x^2)$ в уравнении (30), который аннулируется, когда $\beta = 0$.

Мы заканчиваем этот раздел следующим замечанием, которое мы считаем достойным отметить по поводу типа анализа предыдущего абзаца. Уравнение (4) сводится к уравнению (44) работы [18], представленному ниже, при $\omega = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = -3$ и $\sigma = 1$.

$$\ddot{x} - \frac{3x}{1+x^2} \dot{x}^2 + x + x^3 = 0, \quad (53)$$

с изохронными колебаниями, определяемыми

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = A \cos(t + \alpha). \quad (54)$$

Для данного набора значений параметров оно имеет точное аналитическое решение

$$x(t) = \frac{A \cos(t)}{\sqrt{1 - A^2 \sin^2(t)}}. \quad (55)$$

Тогда колебания изохронны, так как имеют общую, не зависящую от амплитуды, частоту $\Omega(A) = 1$.

Численно полученный временной отклик из уравнения (53) показан на рис.5а красными точками для $x(0) = 1$ и $\dot{x}(0) = 0$, в то время как аналитическое решение уравнения (54) с $A = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\alpha = 0$ изображено сплошной черной линией. Фазовые траектории, полученные численно из уравнения (53) и основанные на уравнении (25) из работы [18] для $h = 1/4$, представлены на рис.5b. Оба рисунка 5а и 5b подтверждают полученные аналитические результаты. На рис.5а также представлены аналитические и численные решения, показанные для двух дополнительных пар начальных условий

$x(0) = 0.1; 0.5$ и $\dot{x}(0) = 0$. Все эти временные характеристики имеют один и тот же постоянный период. Это подтверждает, что период/частота не зависят от амплитуды.

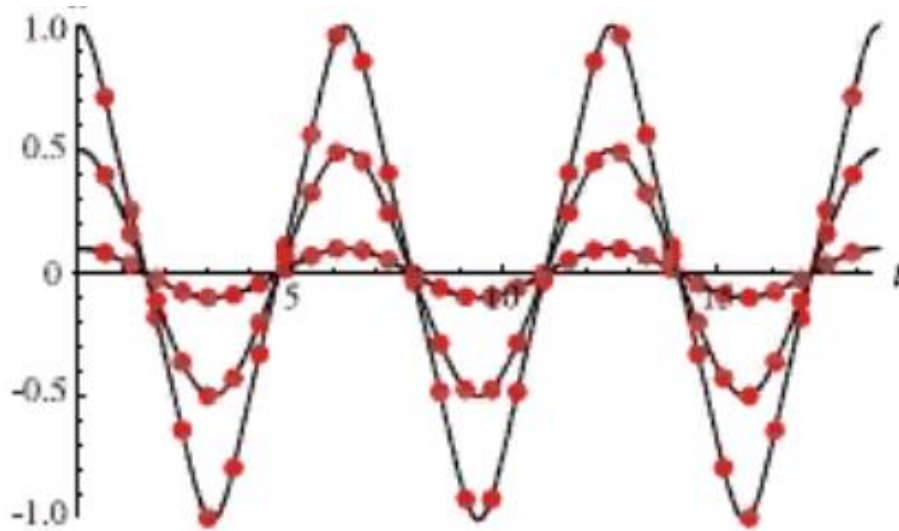


Рис.5а. Численно полученный временной отклик из уравнения (53) для $x(0) = 0.1; 0.5; 1$ и $\dot{x}(0) = 0$ (красные точки) и аналитическое решение уравнения (54) с $A = 0,0995037; 0,447214; \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\alpha = 0$ (черная сплошная линия).

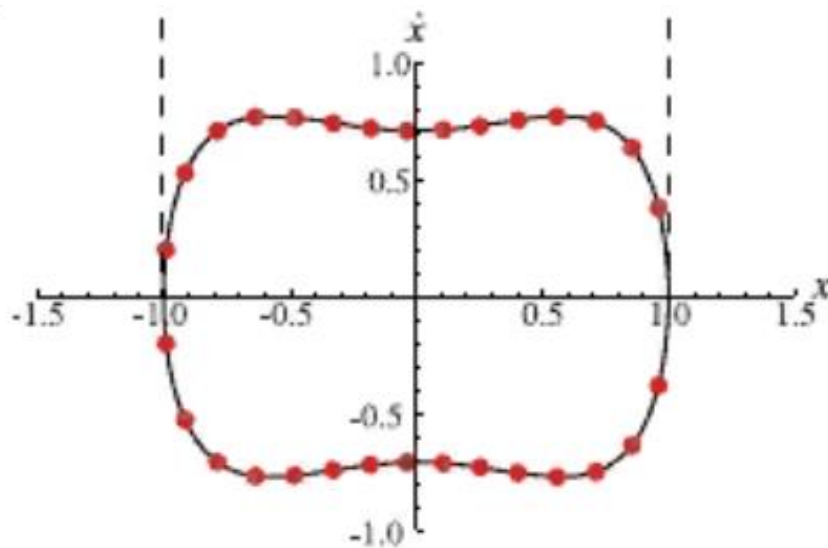


Рис.5б. Фазовые траектории, полученные численно из уравнения (53) и на основе уравнения (25) из работы [16] для $h = 1/4$.

Результаты, полученные применением метода гармонического баланса при любом практическом порядке аппроксимации, а именно двучленной аппроксимации, не может восстановить эту независимость от амплитуды

частоты. Можно догадаться, что тоже самое будет и для любого другого приближенного метода. Поэтому, даже если ожидается, что точность результатов возрастет с порядком аппроксимации, как это продемонстрировали Ковачич и Рэнд [19], безусловно, было бы выгодно проводить аппроксимацию после установления того, изохронны колебания или нет.

6. ВЫВОД

В данной работе мы рассмотрели класс нелинейных уравнений для осцилляторов, которые расширяют уравнение для осцилляторов Дуффинга с помощью члена, являющегося квадратичным мономом по скорости; с коэффициентом, рационально зависящим от позиции. Представив простую механическую систему как типичную систему, описываемую этим уравнением, мы занялись аналитическим приближением ее периодических решений. Мы выполнили эту задачу, используя комбинацию линеаризации Ньютона и гармонического баланса. Анализ результатов, полученных нами при двух различных применениях метода, показывает, что лучше решать уравнение в его рациональной форме, чем манипулировать им перед применением гармонического баланса. Наконец, поскольку класс уравнений охватывает как изохронные, так и неизохронные осцилляторы, из наших результатов следует, что применение приближенных методов к решению уравнений нелинейных осцилляторов не может восстановить амплитудно-частотную независимость изохронных осцилляторов. Это предполагает, что изохронность осцилляторов следует исследовать, когда это возможно, прежде чем приступить к аппроксимации их периодических действий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wu B.S. and Li P.S. A Method for Obtaining Approximate Analytical Periods for a Class of Nonlinear Oscillators // *Mechanica*, 36 – 2001. – P. 167-176.
2. Wu B.S. and Lim C.W. Large Amplitude Non-Linear Oscillations of a General Conservative System // *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 39. – 2004. – P. 859-870.
3. Wu B.S., Sun W.P. and Lim C.W. An Analytical Technique for a Class of Strongly Non-Linear Oscillators // *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 41. – 2006. – P. 766-774
4. Amore P. and Aranda A. Presenting a new method for the solution of nonlinear problems // *Physics Letters A*, 316. – 2003. – P. 218-225.
5. Amore P. and Aranda A. Improved Lindstedt-Poincaré method for the solution of nonlinear problems // *Journal of Sound and Vibration*, 283. – 2005. – P. 1115-1136.
6. Beléndez A., Gimeno E., Alvarez M.L., M'éndez D.I. and Hernández, A. (2008), Application of a modified rational harmonic balance method for a class of strongly nonlinear oscillators // *Physics Letters A*, 372. – 2008. – P. 6047- 6052.
7. Yamgoué S. B., Bogning J. R., Kenfack Jiotsa A. and Kofané T.C. Rational harmonic balance based approximate solutions to nonlinear single-degree-of-freedom oscillator equations // *Physica Scripta*, 81(3). – 2010. – Vol.035003.
8. Lai S.K., Lim C.W. and Wu B.S. Accurate higher-order analytical approximate solutions to large amplitude oscillating systems with a general non-rational restoring force // *Nonlinear Dynamics*. – 2005. – Vol.42, p. 267-281.
9. Lim C.W., Wu B.S., and Sun W.P. Higher accuracy analytical approximations to the duffing harmonic oscillator // *Journal of Sound and Vibration*. – 2006. – Vol.296, p. 1039-1045.

10. Bel'endez A., M'endez D.I., Fern'andez E., Marini S. and Pascual I. An explicit approximate solution to the duffing-harmonic oscillator by a cubication method // *Physics Letters A.* – 2009. – Vol.373, p. 2805-2809.
11. Luo A.C.J. *Continuous Dynamical Systems* // HEP/L&H Scientific: Beijing/Glen Carbon. – 2012.
12. Luo A.C.J. and Huang J.Z. Approximate solutions of periodic motions in nonlinear systems via a generalized harmonic balance // *Journal of Vibration and Control.* – 2012. – Vol.18, p. 1661-1871.
13. Luo A.C.J. and Huang J.Z. Analytical dynamics of period-m flows and chaos in nonlinear systems // *International Journal of Bifurcation and Chaos.* – 2012. – Vol. 22, Article No. 1250093 (29 pages).
14. Luo A.C.J. and Huang J.Z. Analytical routines of period-1 motions to chaos in a periodically forced Duffing oscillator with twin-well potential // *Journal of Applied Nonlinear Dynamics.* – 2012. – Vol. 1, p. 73-108.
15. Luo A.C.J. and Huang J.Z. Unstable and stable period-m motions in a twin-well potential Duffing oscillator // *Discontinuity, Nonlinearity and Complexity.* – 2012. – Vol. 1, p. 113-145.
16. Kovacic I. and Rand R. About a class of nonlinear oscillators with amplitude-independent frequency // *Nonlinear Dynamics.* – 2013. – Vol. 74, p. 455-465.
17. Mickens R.E. Fourier representations for periodic solutions of odd-parity systems // *Journal of Sound and Vibration.* – 2002. – Vol. 258(2), p. 398-401.
18. Spiegel M.R. *Theory and problems of advanced calculus SI(metric)edition* // McGraw-Hill: New York. – 1963.
19. Kovacic I. and Rand R. Straight-line Backbone Curve // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* – 2013. – Vol. 18, p. 2281-2288

20. Mickens R.E. and Semwogerere D. (1996), Fourier analysis of a rational harmonic balance approximation for periodic solutions // Journal of Sound and Vibration. – 1996. – Vol. 195(3), p. 528-530.