

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК
Кафедра фундаментальной математики и механики

РЕКОМЕНДОВАНО К ЗАЩИТЕ
В ГЭК

Заведующий кафедрой
(к.ф.-м.н.)

 А. П. Девятков
19 июня 2023 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
магистра

Гибридная математическая модель гидроразрыва пласта

01.04.01 «Математика»

Магистерская программа «Вычислительная механика»

Выполнил работу
студент 2 курса
очной
формы обучения



Коростелев
Александр
Игоревич

Научный руководитель
канд. физ.-мат. наук, профессор



Шевелев
Александр
Павлович

Консультант
канд. физ.-мат. наук, старший
преподаватель



Гильманов
Александр
Янович

Рецензент
канд. техн. наук,
ген. директор ООО «ИЦ-Проект»



Киселев
Данила
Алексеевич

Тюмень
2023 год

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1 КЛАССИЧЕСКИЕ ОДНОМЕРНЫЕ МОДЕЛИ.....	8
1.1. Модель Христиановича Гиртсма де Клерка	15
1.2. Модель Перкинса Керна Нордгрена	20
1.3. Радиальная модель	24
1.4. Сравнение классических моделей	27
1.5. Влияние трещиностойкости и напряжений горных пород в классических моделях.....	30
2 МОДЕЛЬ СТАЦИОНАРНОГО РОСТА ТРЕЩИНЫ ГРП.....	38
2.1. Физическая поставка задачи.....	38
2.2. Математическая поставка задачи	41
2.3. Численное решение методом простых итераций	43
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	46
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	47

ВВЕДЕНИЕ

Анализируя тенденции развития нефтяного рынка, со снижением традиционных запасов нефти на месторождениях и переоценке ранее разведанных запасов, в настоящее время всё большую роль в удовлетворении мировых потребностей на энергоресурсы играют методы разработки месторождений с трудноизвлекаемыми запасами нефти. Гидравлический разрыв пласта является широко распространенным и применяемым методом интенсификации притока в нетрадиционной нефтегазовой отрасли. В связи с растущим вниманием к нетрадиционным коллекторам технологии гидроразрыва пласта за последние несколько лет получили дальнейшее развитие и усовершенствование. Как метод увеличения нефтеотдачи ГРП используется для повышения коэффициента охвата, который в свою очередь повышает коэффициент извлечения нефти путем создания дополнительных высокопроницаемых каналов (трещин), вводя в эксплуатацию новые зоны, которые до проведения операции ГРП не могли быть задействованы при эксплуатации (трудноизвлекаемые запасы нефти).

Исследование процесса ГРП предоставляет основные параметры и детальный анализ методов, применяемых для успешной интенсификации притока в конкретных условиях, а также предоставляет полный спектр информации, необходимой для разработки трудноизвлекаемых месторождений. Все результаты оцениваются и детализируются для каждого случая месторождения с предоставлением принципов применения технологий ГРП.

Есть и минусы данного метода, при неправильном моделировании трещины гидроразрыва пласта может произойти загрязнение призабойной зоны пласта, что приводит к закупориванию каналов, по которым может фильтроваться флюид, что будет негативно сказываться на дебите скважины, на которой проводили ГРП. В дополнение к этому трещина может быть

неправильно спроектирована и вследствие этого может попасть в водонефтяную зону, из-за чего в скважине будет наблюдаться резкий рост добычи воды (обводненность).

Данная технология основана на том, что жидкость ГРП нагнетается под огромным давлением в скважину с перфорацией. Из-за влияния перепада давления жидкости в районе перфорационных отверстий около скважины инициируется зарождающаяся трещина. Гель-жидкость давит на берега зарождающейся трещины, заставляя ее распространяться в неповрежденный массив породы, как видно на рисунке 1.



Рис. 1. Процесс гидроразрыва пласта

Для достижения эффективного раскрытия трещины при использовании жидкости ГРП в нее добавляют пропант - расклинивающий агент, гранулы размером 0.5 до 1.5 мм, через определенное время после начала ее подачи, также с течением времени увеличивается фракция этого пропанта, чтобы закрепить трещины всех размеров.

По завершении закачки, гель с твердыми частицами пропанта фильтруется в нефтеносный пласт, что приводит к раскрытию трещины в соответствии с распределением пропанта в ней. Однако, пропускная способность закрепленной трещины зависит от ее формы и распределения пропанта. Чтобы прогнозировать геометрию трещины и оптимизировать этот процесс, моделируют процесс ГРП, учитывая потери жидкости на фильтрацию в пористую среду и влияние твердых частиц на динамику раскрытия трещины и ее окончательную форму.

В данной работе рассматривается основная физика развития трещины, рост и окончательная геометрия трещины. Анализ основного физического процесса ведет не только к пониманию роста трещины, но также акцентирует внимание на переменных, критических для дизайна ГРП. Как и во всех процессах реального мира, поведение гидравлических трещин является сложной функцией многих переменных. Однако большинство процессов управляется лишь незначительным числом доминирующих переменных, влияющих на результат. Они являются критически параметрами или переменными, хорошая информация по которым необходима для понимания и проектирования процесса (в данном случае для дизайна ГРП). Для гидроразрыва критическими параметрами являются высота (или горные напряжения, определяющие высоту), модуль Юнга, коэффициент фильтрации. Другие переменные, которые, как правило, в меньшей степени влияют на геометрию трещины, включают расход закачки, и вязкость жидкости гидроразрыва.

Сложность модели процесса ГРП заключается в том, что она описывает множество процессов, таких как течение смеси неньютоновской жидкости и твердых частиц внутри трещины, перенос и осаждение твердых частиц, фильтрацию жидкости в породу через поверхность трещины, деформацию породы в окрестности трещины, а также распространение самой трещины. Уравнения, описывающие эти процессы, не линейны и сильно взаимосвязаны, имеют различные особенности и плохо сходятся численные алгоритмы при их

совместном решении в двумерных и особенно в трехмерных задачах. Это остается актуальной проблемой.

При создании модели процессов необходимо найти баланс между детализацией описания каждого процесса и вычислительной сложностью алгоритмов. С развитием вычислительной техники модели могут совершенствоваться, но пока еще нельзя полностью отказаться от приближенного описания процессов или их пренебрежения. Основным способом уменьшения вычислительной сложности является упрощение описания процессов деформирования и разрушения породы, особенно в двухмерном и трехмерном случае.

Чтобы уменьшить размерность задачи, используются упрощения. Все модели, описывающие деформирование горных пород под действием давления жидкости ГРП, могут быть разделены на группы в зависимости от размерности уравнений. В одномерных моделях уравнения сводятся либо к алгебраической зависимости между избыточным давлением в трещине и ее шириной, либо к интегральной связи между этими величинами. В двумерных моделях деформации горных пород рассматривается приближение плоско деформированного состояния, что увеличивает размерность подмодели упругости на единицу.

Невозможно значительно упростить подмодель упругости в случае двухмерных, трехмерных и псевдотрехмерных моделей. Тем не менее, псевдотрехмерные модели выделяются в отдельную группу из-за представления трещины в виде плоского сечения.

Существует множество классических моделей: KGD (Khristianovich, Geertsma, de Klerk), модель PKN (Perkins, Kern, Nordgren) и радиальная модель.

Также существуют двумерные и трехмерные модели, которые на данный момент не получили широкого применения из-за высокой вычислительной сложности.

Важно помнить, что в 3D модели ГРП должна быть включена подзадача инициирования зарождающихся трещин из-за сложности исходной геометрической конфигурации «полностью» перфорированной скважины, что также представляет практический интерес.

За последнее десятилетие появилось несколько работ, но в основном они сосредоточены на классических моделях. Однако благодаря развитию вычислительной техники и численных методов, в настоящее время стали доступны новые подходы к моделированию процесса ГРП. Целью данной работы является создание и решение своей численной модели стационарного образования и распространение трещин гидроразрыва пласта.

Для достижения поставленной цели были поставлены следующие основные задачи:

1. Предложить одномерную стационарную постановку задачи моделирования образования трещин.
2. Реализовать численный метод решения уравнения.
3. Разработать программный код численного решения для моделирования стационарного образования и распространения трещин гидроразрыва пласта.
4. Рассчитать распределение давления по координате.

1. КЛАССИЧЕСКИЕ ОДНОМЕРНЫЕ МОДЕЛИ

Существуют одномерные модели, которые имеют симметричное изображение плоской трещины гидроразрыва. Однако, в зависимости от выбранной геометрической концепции, эти модели могут быть разделены. Первая часть состоит из моделей, описывающих прямолинейное распространение трещины от линейного источника, как изображено на рисунке 2.

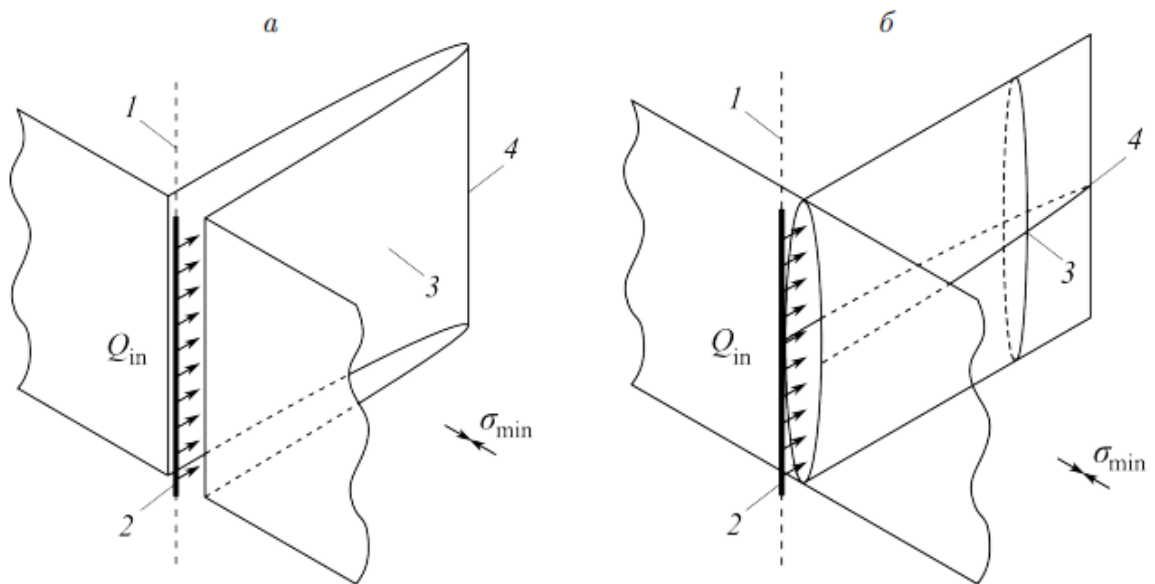


Рис. 2. Геометрия KGD-модели (а) и PKN-модели (б) 1 — ось скважины, 2 — источник жидкости, 3 — крыло трещины, 4 — кончик трещины

Такой тип гидроразрыва может быть достигнут, прокачивая жидкость через большой перфорированный канал в интервале скважин, где сформировался линейный источник нагнетания. Следовательно, плоские трещины должны быть локализованы в вертикальной плоскости, проходящей через ось скважины. Вторая часть моделей описывает радиально-симметричное развитие трещины от точечного источника, как показано на рисунке 3.

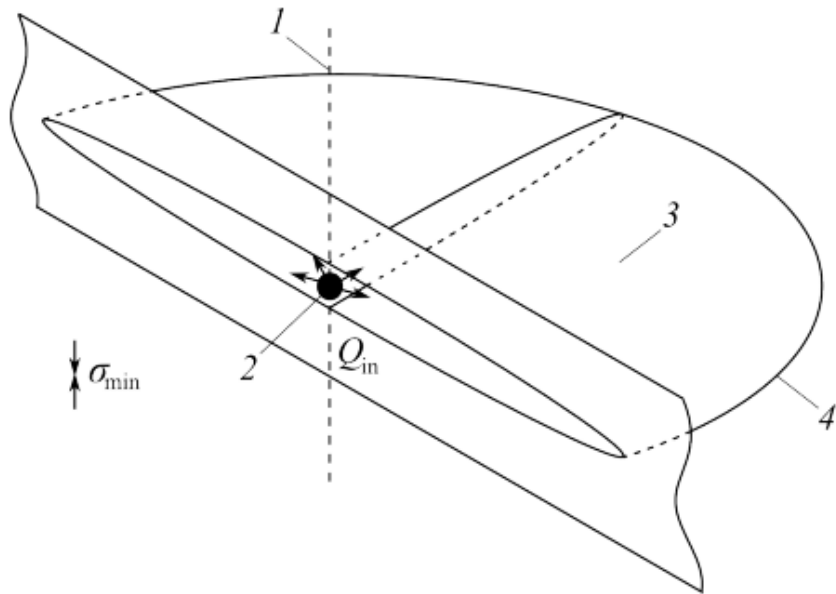


Рис. 3. Радиально-симметричная модель развития трещины: 1 — ось скважины, 2 — источник жидкости, 3 — плоскость распространения трещины, 4 — конец трещины

Определение (или проектирование) длины создаваемой трещины можно разделить на две категории: геометрия трещины и поглощение жидкости (фильтрации). С точки зрения объема это можно выразить следующим образом:

$$V_{\text{закачки}} = V_{\text{трещины}} + V_{\text{поглощения}} \quad (1)$$

Из чего следует, что конечный продукт объема трещины равен объему закачки минус объем жидкости, поглощенный пластом во время закачки. Это есть уравнение баланса объема или уравнения материального баланса, либо уравнение непрерывности, компоненты которого можно представить следующим уравнением:

$$V_{\text{закачки}} = Qt, \quad (2)$$

где Q — расход жидкости,

t — время закачки.

Объем трещины можно найти так:

$$V_{\text{трещины}} = \bar{w}HL, \quad (3)$$

где \bar{w} – средняя ширина трещины,

H – общая высота трещины,

L – длина трещины.

Объем поглощения жидкости пластом можно представить следующим уравнением:

$$V_{\text{поглощения}} = 3CH_pL\sqrt{t} + 2S_pH_pL, \quad (4)$$

Связывая эти значения, получаем примерное отношение для одной из главных переменных дизайна – длина трещины:

$$L = \frac{Qt}{3CH_p\sqrt{t} + 2S_pH_p + \bar{w}H}, \quad (5)$$

где C – коэффициент фильтрации,

H_p – проницаемая (или поглощенная) высота трещины.

Это простое соотношение лежит в основе всего дизайна ГРП и само по себе является мощным инструментом. Допуская номинальную ширину трещины (0.5 см.) с помощью этого простого отношения, можно получить удивительно точные расчеты зависимости длины трещины от изменения исходных данных.

Уравнение, так же иллюстрирует принципиальные переменные дизайна ГРП: w – ширину, как обсуждается ниже, CH_p – объем утечек, коэффициент фильтрации, умноженный на высоту фильтрации, H – общая высота трещины.

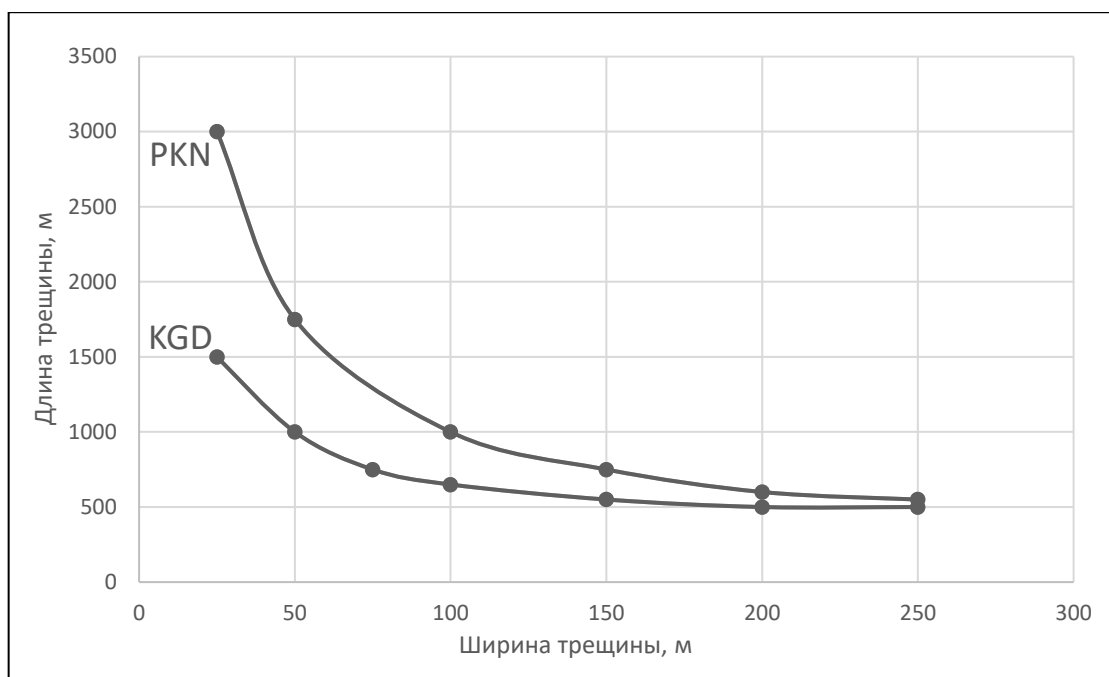


Рис. 4. Зависимость длины трещины от ширины PKN и KGD модели

Если $H = H_p$, что часто случается, когда высота становится доминирующей переменной, управляющей длиной трещины, как видно на рисунке 4. Нужно отметить, что графики зависимости длины трещины построены на основе геометрических моделей, которые подробно описаны ниже.

Для конкретного случая с фиксированной высотой трещины и без учета моментальных потерь, площадь трещины можно найти так:

$$S = HL. \quad (6)$$

Площадь фильтрации, по аналогии, можно записать в виде уравнения:

$$S_p = H_p L = r_p HL = r_p S, \quad (7)$$

где r_p — отношение площади фильтрации трещины к общей площади поперечного сечения ($r_p = \frac{H_p}{H}$ или чаще $r_p = \frac{S_p}{S}$).

Первое уравнение поперечного сечения (или роста трещины) предложено Картером.

$$S = \frac{Q\bar{w}}{4\pi C^2} \left(e^X \operatorname{erfc}(X) + \frac{2X}{\sqrt{\pi}} - 1 \right), \quad (8)$$

$$X = 2C \frac{\sqrt{\pi t}}{\bar{w}}.$$

В связи с утечками в породе или потерей коэффициента фильтрации, Харрингтон разработал следующее соотношение для фильтрации жидкости:

$$V_{\text{поглощения}} = \sqrt{8}CA\sqrt{t}, \quad (9)$$

а Нолти показал, что при различных ограничениях коэффициент уравнения, $\sqrt{8}$ в данном случае, может варьироваться в пределах от $\frac{8}{3}$ до $\sqrt{8}$. Поэтому, при $r_p = 1$, и без учета моментальных потерь,

$$V_{\text{поглощения}} = 3CA\sqrt{t}. \quad (10)$$

С учетом моментальных потерь уравнение приобретает вид:

$$V_{\text{поглощения}} = 3CA\sqrt{t} + 2S_p S, \quad (11)$$

а с применением уравнения материального баланса получаем:

$$S = \frac{Qt}{3C\sqrt{t} + 2S_p + \bar{w}}, \quad (12)$$

что является отличной аппроксимацией к уравнению поперечного сечения Картера.

Изложенное выше уравнение поперечного сечения ведут к чрезвычайно важному понятию гидроразрыва пласта – эффективности жидкости ГРП. Она вычисляется путем деления объема трещины на общий объем закачки.

Применяя вышеуказанные уравнения, это можно выразить следующим образом.

$$Qte_f = S\bar{w} = Qt \frac{\bar{w}}{3C\sqrt{t} + 2S_p + \bar{w}}. \quad (13)$$

Эффективность жидкости является мощным показателем для разработки графика закачки (то есть определения объема жидкости разрыва и стадий

пропанта). Также интересно отметить, что эффективность жидкости меняется со временем, и как моментальные утечки влияют на эффективность жидкости. Также нужно заметить, что, когда приводится единственное значение эффективности жидкости, (поскольку со временем эффективность меняется во время закачки), оно дается на конец закачки, то есть перед установкой насосов.

Предположим, номинальную ширину трещины (увеличивающуюся со временем) и среднее значение для коэффициента фильтрации 20 мм/минуту. Используя эти значения, эффективность жидкости будет варьироваться в зависимости от времени, как показано в таблице 1.1 ниже для двух значений моментальных потерь жидкости.

Таблица 1.1

Время, минуты	Средняя ширина, мм/мм	Эффективность (момент потери = 0)	Эффективность (момент потери = 20)
1	3.2/3.05	0.63	0.15
10	5.1/5.18	0.47	0.19
20	6.35/6.4	0.44	0.21
30	6.35/6.4	0.39	0.19

Пример эффективности жидкости

Рассматривая вышеприведенные уравнения, становится ясно, что при моментальных потерях равных 0, для малых значений времени эффективность жидкости всегда будет достаточно высокой (то есть для времени 0, эффективность равна 100%) и что эффективность монотонно убывает со временем. Однако для ненулевого значения утечек эффективность раннего времени будет меньше (возможно, намного меньше), и на каждом этапе роста трещины эффективность жидкости возрастает с увеличением ширины. С увеличением времени коэффициент фильтрации становится доминирующим (даже с моментальными потерями) эффективность жидкости начнет

уменьшаться. Как и многие аспекты ГРП, поведение может меняться от скважины к скважине в зависимости от точных переменных конкретного пласта.

Если внутри эластичной породы образуется узкая щель за счет внутреннего давления, тогда она превращается в трещину с поперечным сечением в форме эллипса и максимальной шириной:

$$W_{max} = \frac{2P_{эфф}d}{E} = \frac{2(P - \sigma)d}{E}.$$

Данное фундаментальное решение эластичности применялось для ГРП, причем двумя различными способами. Это привело к созданию двух моделей ширины трещины, и до сих пор продолжаются дискуссии, какая из них верна. Важно сделать правильный выбор модели, поскольку разные модели дают различные прогнозы по жидкости, буферной жидкости и объемам пропанта, необходимые для достижения определенного эффекта, при следующих параметрах: $Q = 1.5 \frac{м^3}{мин}$, $H = 30$ м., $V = 300$, $м^3$, как показано в таблице 1.2.

Таблица 1.2

Модель	KGD	PKN
Ширина, мм	5.6	4.3
Длина, м	212	245
$V_{буфер}$, $м^3$	119	214

Сравнение расчетов моделей

1.1 Модель Христиановича Гиртсма де Клерка

Эта модель, предложенная Христиановичем и Желтовым в 1956 году и разработанная Гиртсом и де Клерком, имеет следующие основные выводы, связанные с геометрической концепцией. Базовые математические выводы для модели были предложены российский учёным Христиановичем. Если предположить, что высота трещины очень велика, то можно пренебречь верхними и нижними границами, что позволяет рассматривать горизонтальные разрезы как трещины пласта.

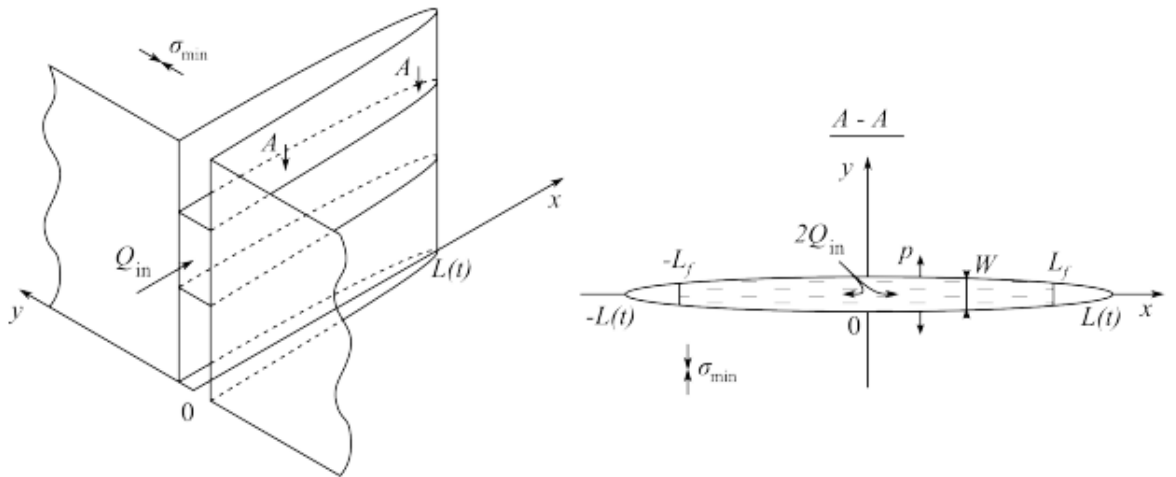


Рис. 5. Геометрия трещины KGD модели

Трещина подчиняется интегральной зависимости между ее раскрытием W и избыточным давлением жидкости:

$$p_{net} = p - \sigma_{min}, \quad (14)$$

$$W(x) = \frac{4}{\pi E'} \int_0^L p_{net}(\xi) \ln \left| \frac{\sqrt{(L^2 - x^2)} + \sqrt{(L^2 - \xi^2)}}{\sqrt{(L^2 - x^2)} - \sqrt{(L^2 - \xi^2)}} \right| d\xi, \quad (15)$$

Упругие свойства породы описывает следующие уравнение:

$$E' = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad (16)$$

где E' – модуль плоской деформации,

E – модуль Юнга,

ν – коэффициент Пуассона,

$L = L(t)$ – координата кончика крыла трещины.

При типичных значениях коэффициента Пуассона (для пород) от 0.15 до 0.25, модуль плоской деформации, по существу, равен модулю Юнга для всех практических задач.

Коэффициент интенсивности напряжений вычисляется следующим уравнением:

$$K_I = 2 \sqrt{\frac{L}{\pi}} \int_0^L \frac{p_{net}(\xi)}{\sqrt{(L^2 - \xi^2)}} d\xi = K_{Ic}, \quad (17)$$

где K_{Ic} – трещиностойкость породы.

Ширина раскрытия трещины около кончика задается формулой (17):

$$W(x) = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{K_{Ic}}{E'} \sqrt{L-x} + O\left((L-x)^{\frac{3}{2}}\right), \quad x \rightarrow L \quad (18)$$

В данной модели предполагается, что трещиностойкость породы отсутствует, тогда критерий распространения трещины задаёт плавное смыкание берегов трещины в кончике, т. е.:

$$\frac{\partial W(x)}{\partial x} = 0, \quad x = L. \quad (19)$$

Движение жидкости гидроразрыва в трещине описывается в одномерном приближении при пренебрежении инерцией, сжимаемостью жидкости и потерей импульса при её оттоке в породу. Областью течения жидкости считается интервал от нуля до фронта жидкости $L_f(t)$, положение которого в зависимости от варианта модели может как совпадать, так и не совпадать с положением кончика трещины $L(t)$. В последнем случае говорят об отставании фронта жидкости.

Уравнение количества движения следует из решения задачи о течении ньютоновской жидкости между двумя параллельными плоскостями, разнесёнными на расстояние W :

$$\frac{\partial p_{net}}{\partial x} = -\frac{12\mu}{W^2}u, \quad (20)$$

где μ – коэффициент динамической вязкости жидкости гидроразрыва, $u(x, t)$ – средняя скорость жидкости вдоль крыла трещины.

Определяя локальный расход жидкости через сечение x единичной высоты трещины $Q = Q(x, t)$, то уравнение (20) можно переписать как:

$$\frac{\partial p_{net}}{\partial x} = -\frac{12\mu}{W^3}Q. \quad (21)$$

Уравнение баланса записывается так:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} + Q_L = 0, \quad (22)$$

где Q_L – утечки жидкости гидроразрыва через трещину в породу.

Утечка жидкости Q_L подчиняется закону Картера:

$$Q_L(x, t) = \frac{2C_L}{\sqrt{t - t_{exp}(x)}}, \quad (23)$$

где C_L – коэффициент утечки (зависит от проницаемости нефтеносной породы), $t_{exp}(x)$ – момент времени, в который фронт жидкости L_f , прошёл точку x .

К системе уравнений (21) и (22) нужно добавить граничные условия. На скважине задаётся расход жидкости гидроразрыва в крыло трещины:

$$Q(0, t) = Q_{in}(t). \quad (24)$$

Жидкость, считается, занимает весь объём крыла трещины вплоть до её кончика. Тогда краевое условие в кончике крыла имеет вид:

$$Q(L, t) = 0. \quad (25)$$

Из (25) и (26), используя уравнение (22) при предположении о постоянстве расхода Q_{in} закачиваемой в скважину жидкости, может быть получено известное уравнение баланса жидкости:

$$Q_{in}(t) = \int_0^{L_f(t)} W(x, t) dx + \int_0^t \int_0^{L_f(\tau)} Q_L(x, \tau) dx d\tau. \quad (26)$$

Однако при такой постановке, учитывая $W(L) = 0$, следует, что давление жидкости гидроразрыва в кончике крыла трещины обращается в бесконечность. Чтобы избежать этого, в ряде работ, посвящённых вычислительной реализации модели, предполагается наличие отставания фронта жидкости L_f от кончика трещины:

$$L - L_f > 0. \quad (27)$$

Тогда положение фронта жидкости в крыле трещины L_f определяется из соотношения:

$$Q(L_f, t) = 0, \quad (28)$$

поэтому граничное условие на фронте жидкости выглядит так:

$$p_{net}(L_f, t) = -\sigma_{min}. \quad (29)$$

Условие (30) задаёт нулевое полное давление на фронте жидкости. Заметим, что давление p_{net} на участке от L_f до L также полагается равным $-\sigma_{min}$. Из (24) и (28), используя уравнение (22), получим уравнение баланса жидкости (26) с учётом замены L_f на L .

Для замыкания поставленной задачи задаются начальные данные:

$$L(0) = L_0,$$

$$L_f(0) = L_0,$$

$$W(x, 0) = W_0,$$

$$0 \leq x \leq L_0, \quad (30)$$

где L_0 , и W_0 — раскрытие и длина некоторой зародышевой трещины, необходимой для начала развития трещины. Влияние конкретных значений этих параметров на распространение одномерных и двумерных трещин незначительно.

Обобщенная KGD модель без отставания фронта жидкости от кончика трещины описывается интегральным соотношением (16), условием (17) или (18), уравнениями (21) и (22), двумя из трёх граничными условиями (25), (26) и (27) и начальными данными (31). Заметим, что при этом считается $K_{Ic} > 0$. Обобщенная KGD-модель с отставанием фронта жидкости от кончика трещины описывается интегральным соотношением (15), условием (17) или (18), уравнениями (21) и (22), тремя краевыми условиями (25), (29) и (30) и начальными данными (30). В отсутствие трещиностойкости породы условие (17) или (18) в модели заменяется на более простое условие (19).

При значительных упрощениях впервые были получены кривые раскрытия трещины вдоль её длины. Установлено, что давление в скважине с течением времени резко уменьшается (рис. 6, а). На рисунке 6, б приведено обезразмеренное раскрытие трещины Ω при отсутствии утечек:

$$\Omega(\xi) = \frac{W(\xi)}{W(0)}, \quad \xi = \frac{x}{L}. \quad (31)$$

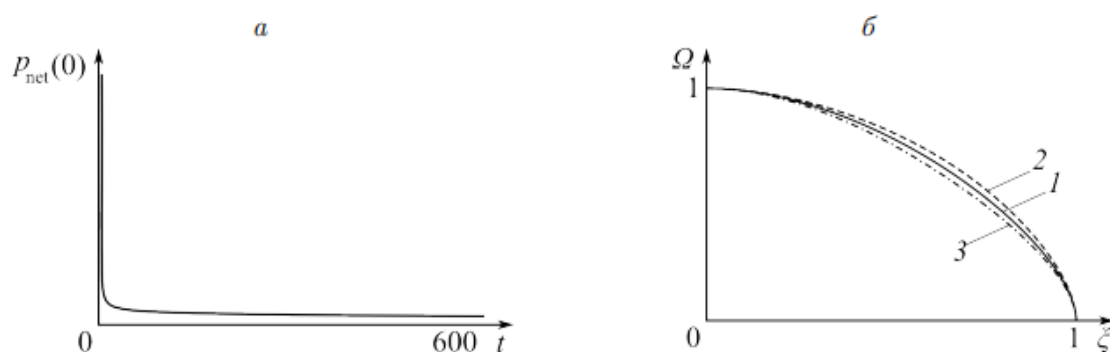


Рис. 6. Поведение избыточного давления $p_{net}(0)$ (а) и обезразмеренное раскрытие трещины Ω (б) в зависимости от расхода: $Q_{in} = 1$ (1), 10 (2), 100 (3)

1.2 Модель Перкинса Керна Нордгрена

Эта модель гидроразрыва была предложена Перкинсом и Керном, которая отличается от KGD модели. Авторы этой модели предполагают, что высота трещины гидроразрыва постоянна и равна H , и значительно меньше общей длины трещины $2L$, как показано на рисунке 7.

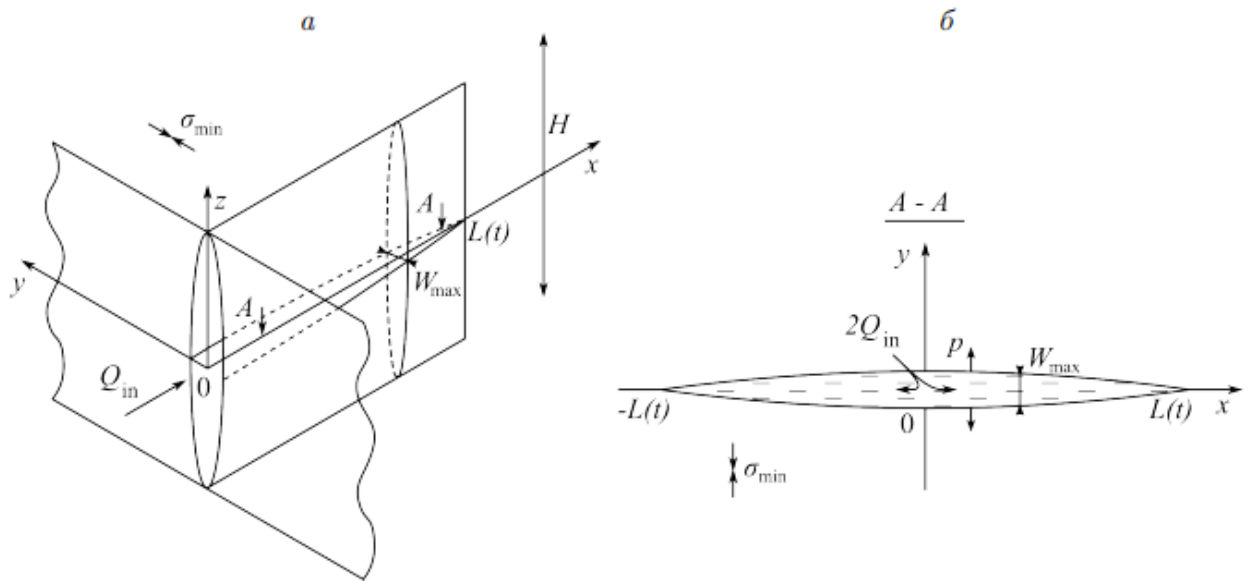


Рис. 7. Геометрия PKN модели

Предполагая постоянство избыточного давления p_{net} внутри каждого вертикального сечения $x = const$ трещины, мы получаем эллиптический профиль раскрытия трещины:

$$W(z) = \frac{4}{E'} p_{net} \sqrt{\frac{H^2}{4} - z^2}. \quad (33)$$

В силу этого предположения для каждого сечения выполняется соотношение (33), из которого следует следующая связь между максимальным раскрытием трещины W_{max} и избыточным давлением p_{net} в сечении $x = const$:

$$W_{max}(x) = \frac{2H}{E'} p_{net}(x). \quad (34)$$

Кроме того, решение задачи о стационарном течении ньютоновской жидкости в цилиндрической трубе с эллиптическим сечением, имеющим оси H и W_{max} , дает соотношение:

$$\frac{\partial p_{net}}{\partial x} = -\frac{64}{\pi} \left(\frac{1}{W_{max} H^3} + \frac{1}{W_{max}^3 H} \right) Q_{in}, \quad (35)$$

где Q_{in} — не зависящий от времени расход жидкости через поперечное сечение трубы.

В силу малости ширины W_{max} по сравнению с H первое слагаемое в скобках (35) отбрасывается:

$$\frac{\partial p_{net}}{\partial x} = -\frac{64\mu}{\pi W_{max}^3 H} Q_{in}, \quad (36)$$

и полученное уравнение (36) вместе с (34) образуют модель Перкинса — Керна.

Замена W_{max} из (34) в (36) даёт в случае отсутствия зависимости от времени обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$p_{net}^3 \frac{\partial p_{net}}{\partial x} = -\frac{8\mu Q_{in} (E')^3}{\pi H^4} Q_{in}. \quad (37)$$

К (37) добавляется граничное условие на кончике крыла трещины L :

$$p_{net}(L) = 0, \quad (38)$$

которое согласно (34) определяет смыкание берегов трещины в кончике.

Интегрированием (37) от кончика трещины к скважине получим зависимость избыточного давления от координаты x :

$$p_{net}(x) = \frac{2}{H} \left(\frac{2\mu Q_{in} (E')^3}{\pi} (L - x) \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (39)$$

Из (34) с учётом (39) следует зависимость максимальной ширины эллиптического сечения трещины от расстояния до скважины:

$$W_{max}(x) = 4 \left(\frac{2\mu Q_{in}}{\pi E'} (L - x) \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (40)$$

Таким образом, в модели Перкинса Керна форма профиля раскрытия трещины не зависит от времени и весь процесс гидроразрыва является равновесным.

Минусом модели Перкинса Керна является отсутствие в ней учёта утечек жидкости в породу через стенки трещины и невозможность описывать изменение объёма трещины и определять её длину. Они были исключены Нордгреном добавлением к уравнениям Перкинса Керна нестационарного уравнения неразрывности течения несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} + \widetilde{Q}_L = 0, \quad (41)$$

$$A = \frac{1}{4} \pi H W_{max}, \quad (42)$$

где A — площадь поперечного сечения трещины $x = const$,

Q — объёмный расход жидкости через это сечение,

\widetilde{Q}_L — объёмный расход жидкости в породу на единицу длины трещины.

Последний подчиняется закону Картера (22):

$$\widetilde{Q}_L = H Q_L. \quad (43)$$

Заметим, что при рассмотрении случая с нулевыми утечками модель РКН не переходит в модель Перкинса Керна, так как расход жидкости вдоль длины трещины варьируется из-за присутствия в уравнении (41) слагаемого $\frac{\partial A}{\partial t}$. Уравнение количества движения в модели РКН следует из (36) заменой в нём постоянного расхода Q_{in} на локальный $Q(x, t)$:

$$\frac{\partial p_{net}}{\partial x} = \frac{64\mu}{\pi W_{max}^3 H} Q. \quad (44)$$

Подстановка уравнения для p_{net} из (34) в (44) определяет связь между локальным расходом Q и максимальной шириной трещины W_{max} :

$$Q = -\frac{\pi E'}{512\mu} \frac{\partial W_{max}^4}{\partial x}, \quad (45)$$

Заменяя A и Q в (41), получим уравнение для W_{max} :

$$\frac{\partial W_{max}}{\partial x} = -\frac{E'}{128\mu H} \frac{\partial^2 W_{max}^4}{\partial x^2} + \frac{4}{\pi} Q_L = 0. \quad (46)$$

Для замыкания уравнения (46) для трещины задаются начальные условия:

$$W_{max}(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq L', \quad (47)$$

и граничные условия:

$$-\frac{\pi E'}{512\mu} \frac{\partial W_{max}^4}{\partial x} = Q_{in}, \quad \text{при } x = 0,$$

$$W_{max} = 0, \quad \text{при } x = L. \quad (48)$$

Длина трещины $L(t)$ в ней заменена правой границей области моделирования $L'(t)$ и уравнение для её определения отсутствует. Определение (или проектирование) длины создаваемой трещины можно разделить на две категории – геометрия трещины и поглощение жидкости(фильтрация).

Считается, что между кончиком трещины $L(t)$ и точкой L' трещина остается закрытой:

$$W(x, t) = 0, \quad L(t) \leq x \leq L'. \quad (49)$$

1.3 Радиальная модель

Задача радиальной модели трещины гидроразрыва, заполняемой впрыскиванием вязкой жидкости из «точечного источника». В точке постоянный объемный расход Q_0 , схематично показан на рисунке 8.

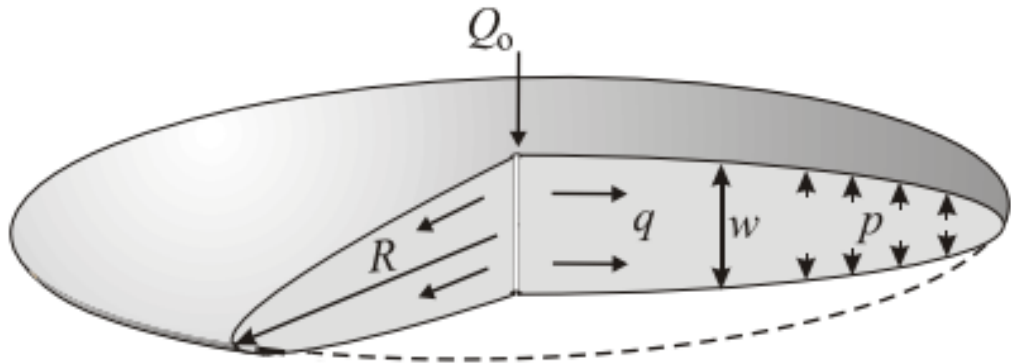


Рис. 8. Геометрический вид радиальной модели

В условиях, когда запаздывание незначительно $\frac{\lambda}{R} \ll 1$, определение решения этой задачи состоит в нахождении раскрытия w трещины и давления p (разность между давлением жидкости p_f и напряжением в дальней зоне σ_0) как от радиальной координаты r , так и от времени t , а также расширение радиуса трещины $R(t)$.

Функции $R(t)$, $w(r, t)$ и $p(r, t)$ зависят от скорости нагнетания Q_0 и от четырех параметров жидкости ГРП: E' , μ' , K' и C' , они соответственно определены так:

$$E' = \frac{E}{1 - \nu^2},$$

$$\mu' = 12\mu,$$

$$K' = \left(\frac{32}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} K_{1c},$$

$$C' = 2C_l. \quad (50)$$

Три функции $R(t)$, $w(r, t)$ и $p(r, t)$ определяются путем решения системы уравнений, которую можно описать следующим образом:

Уравнение упругости:

$$w(r, t) = \int_0^1 G\left(\frac{r}{R}, s\right) p(sR, t) s ds, \quad (51)$$

где G — ядро упругости Снеддона.

Это сингулярное интегральное уравнение выражает нелокальная зависимость ширины трещины от давления:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + g = \frac{1}{\mu'} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r w^3 \frac{\partial p}{\partial r} \right). \quad (52)$$

Это нелинейное уравнение в частных производных описывает течение вязкой несжимаемой жидкости внутри трещины. Функция $g(r, t)$ определяет скорость истечения жидкости, которая вычисляется так:

$$g = \frac{C'}{\sqrt{t - t_0(r)}}, \quad (53)$$

где $t_0(r)$ – время экспозиции точки r (т. е. время, в которое фронт трещины находился на расстоянии r от точки закачки). Утечка, уравнение (48) является приближением с константой C объединяя различные мелкомасштабные процессы. В общем случае (48) можно использовать при условиях, когда диффузионная длина утечки мала по сравнению с длиной трещины.

Уравнение баланса объема:

$$Q_0 t = 2\pi \int_0^R w r dr + 2\pi \int_0^t r \int_0^{R(r)} g(r, t) dr dt, \quad (54)$$

Это уравнение выражает тот факт, что общий объем закачиваемой жидкости равен сумме объема трещины и объема жидкости, утекшая в породу вокруг трещины.

Критерий распространения трещины:

$$w \sim \frac{K'}{E'} \sqrt{R - r},$$

$$1 - \frac{r}{R} \ll 1. \quad (55)$$

В рамках линейно-упругого разрушения механики это уравнение воплощает тот факт, что трещина всегда распространяется, и эта энергия постоянно рассеивается при создании новых трещин в пласте. Очевидно, что из (50) следует, что на кончике трещины выполняется условие $w = 0$:

$$w^3 \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad r = R. \quad (56)$$

Это условие нулевого расхода жидкости ($q = 0$) у вершины трещины применимо если жидкость полностью заполняет трещину (включая область вершины).

1.4 Сравнение классических моделей

Модель KGD главным образом допускает свободу трещины ускользнуть сверху и снизу. Как правило, это допущение нереально для трещин с отношением $\frac{L}{H} > 1$. Модель PKN, с другой стороны, игнорирует ряд важных принципов развития трещин и механики разрыва на фронте ее распространения. И все же, несмотря на это, имеющиеся данные свидетельствуют о том, что модель PKN более приемлема при $L > H$. При $L = H$ подходит модель радиальной трещины. При $L < H$, правильной будет модель KGD. Однако, при обычных интервалах перфорации (15–35 м.), гидроразрыв нефтеносного пласта, советуемый критерию $L < H$, встречается редко.

Вопрос о корректности геометрии трещины по модели PKN, без учета условий фронта распространения, во многих ситуациях возникает в связи с тем, что эффективное давление внутри трещины (а вместе с ним и ширина трещины) есть результат взаимодействия потока жидкости с упругостью породы. На самом деле, вязкие свойства жидкости, распространяющиеся по всей длине трещины, как правило, доминируют над условиями механики породы в области фронта развития трещины. По модели PKN, отношение между потоком жидкости и ширины трещины для всех моделей приводится в таблице 2.

Для ньютоновской вязкой жидкости, движущейся в ламинарном потоке по узкой щели, падение давления представлено следующим образом:

$$\frac{\Delta(P - \sigma)}{\Delta L} = \frac{\Delta P_{\text{эфф}}}{\Delta L} = \frac{12\mu Q}{H\bar{w}^3}. \quad (57)$$

Модель PKN предполагает эллиптическое поперечное сечение как вертикальное поперечное сечение трещины (т. е. трещина закрывается сверху и снизу) так, что:

$$\bar{w} = \frac{\pi 2P_{\text{эфф}}H}{4E}. \quad (58)$$

Параметры потока жидкости и ширины могут быть выражены следующим образом:

$$\bar{w}^3 P_{\text{эфф}} = \frac{12\mu QL}{H},$$

$$P_{\text{эфф}} = \frac{P_{\text{эфф}} \bar{w}}{H}, \quad (59)$$

а скомбинировав эти параметры, получаем:

$$\bar{w} = \left(\frac{\mu QL}{E} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (60)$$

Для неньютоновской жидкости, подчиняющейся степенному закону, справедливо следующее уравнение:

$$w = \left(\frac{K\mu Q^n L}{EH^{(n-1)}} \right)^{\frac{1}{(2n+2)}}, \quad (61)$$

где K – показатель консистенции,

n – показатель текучести для неньютоновской жидкости, подчиняющейся степенному закону. Для неньютоновской жидкости $n = 1$, $K = \mu$, что сокращает это его предыдущего уравнения.

Таблица 1.3

Модель	Ширина трещины w	Эффективное давление p
РКН	$\left(\frac{\mu QL}{E} \right)^{\frac{1}{4}}$	$\frac{E}{H} \left(\frac{\mu QL}{E} \right)$
Радиальная	$\left(\frac{\mu QR}{E} \right)^{\frac{1}{4}}$	$\frac{E}{R} \left(\frac{\mu QR}{E} \right)$
КГД	$\left(\frac{\mu QL^2}{EH} \right)^{\frac{1}{4}}$	$\frac{E}{L} \left(\frac{\mu QL^2}{EH} \right)$

Отношение между потоком жидкости и ширины трещины для классических одномерных моделей

Уравнение по РКН модели из таблицы 1.3 демонстрирует чувствительность ширины трещины к другим параметрам (вязкость и скорость

закачки). При чувствительности параметра только на $\frac{1}{4}$ степени, ошибка на 50% ведет к изменению лишь на 10% ($1.5^{0.25} = 1.1$) в расчетном значении, поэтому мы видим, что расчеты ширины относительно не реагирую на допустимые погрешности в указанных переменных. Данное ограниченное влияние на вязкость жидкости очень важно, поскольку реологические свойства типичных жидкостей ГРП (в особенности “загеленной” нефти и сшитого геля на водной основе) трудно охарактеризовать и измерить, а точные реологические свойства чувствительны к условиям замешивания раствора в полевых условиях. Таким образом, практически всегда присутствует неопределенность вязкости жидкости ГРП.

1.5 Влияние трещиностойкости и напряжений горных пород в классических моделях

Несмотря на то, что не акцентировалось при выведении отношения между эффективным давлением, высотой, расходом закачки и пр. в таблице 3 неявно допускалось, что эффективное давление на фронте распространения трещины равно нулю. Совершенно очевидно, что на самом деле это не так, поскольку для образования и развития трещины в породе, нужно давление на фронте ее распространения равное не нулю. В простом виде (и математически не совсем правильно, как будет рассмотрено ниже), уравнение эффективного давления (для конкретного случая с ограниченной высотой трещины, уравнения можно модифицировать с учетом концевое давления, как приводиться ниже:

$$P_{\text{эфф}} \approx \frac{E^{\frac{3}{4}}}{H} (\mu QL)^{\frac{1}{4}} + p_{\text{конец}} \cdot \quad (62)$$

Не являть точной математической зависимостью, данное уравнение является полезным инструментом для сравнения относительной зависимости давления от концевое эффекта и влияния потока жидкости и реологии. При очень большой высоте трещины (т. е. при радиальной трещине), или при очень малой длине трещины (т. е. трещина с геометрией KGD при $L < H$) влияние реологии на давление относительно незначительно, и возрастает значение концевое эффекта. При изучении уравнения наблюдаем следующие: при малом значении модуля Юнга в таких мягких породах, как мел, и в песчанике с высокой пористостью (более 30%) влияние реологии незначительно (поскольку оно пропорционально $\frac{1}{E}$), и более важным (и даже доминирующим) становится концевой эффект. При гидравлических разрывах с определенным ограничением высоты в обычной породе влияние реологии на эффективное давление (а вместе с ним и на ширину трещины) более существенно, чем влияние давления на фронте распространения трещины, в концевой эффект незначителен.

Эмпирически, измеряя давления на ГРП обычно показывают давления на фронте развития трещины, или концевое давление, в пределах 5–15 атмосфер.

Как отмечалось ранее, вышеприведённое уравнение не является точным с математической точки зрения, т. е. задача намного сложнее, чем простое сложение эффективного давления (и ширины трещины) в связи с потоком вязкой жидкости к эффективному давлению (и ширине) в результате давления на фронте распространения трещины. Сложности возникают в связи с тем, что концевое давление вызывает расширение трещины по всей ее длине, тем самым уменьшая до некоторой степени падения давления вязкого потока. Этот процесс детально рассматривает Нолти, который также дает аналитическое выражение давления в призабойной зоне (и ширине) как функцию давления фронта распространения и падения вязкостного давления.

Значение давления роста трещины (т. е. давления на фронте распространения трещины, необходимое для поддержания ее развития), обычно определяется трещиностойкостью, или прочностью пласта. По сути, как кратко рассматривается ниже, фактические процессы, протекающие на фронте развития трещины, более сложны. Кажущаяся трещиностойкость ГРП, как правило, намного больше, чем трещиностойкость породы, которая может быть определена лабораторными методами.

Трещиностойкость материалов, как правило, определяется одним или двумя свойствами материалов: критическим коэффициентом интенсивности и поверхностной энергией или скоростью выделения энергии деформации. Для эластичного материала данные значения однозначно связаны друг с другом следующим образом:

$$G = \frac{1 - \nu^2}{E} K_{Ic}^2 = \frac{K_{Ic}^2}{E'} , \quad (63)$$

где E' –модуль деформации поверхности, описанный ранее (нужно отметить, что, E' главным образом равен модулю Юнга с типичными значениями от 1 до 70 ГПа).

Для осадочных пород, K_{Ic} может варьироваться от $0.1 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}$, до умеренно высоких значений порядка $20 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}$ без видимой зависимости от типа породы. Песчаник может обладать более высокой или низкой трещиностойкостью, чем прилегающий глинистый слой.

Однако, как уже отмечалось выше, растущая гидравлическая трещины зачастую имеет дело с кажущейся трещиностойкостью, которая может намного превышать значение трещиностойкости. Для примера рассмотрим монетообразную или радиальную трещину. Для такой трещины критическое давления в момент начало роста трещины определяется из уравнения:

$$P_{crit} = K_{Ic} \sqrt{\frac{\pi}{24H}}. \quad (64)$$

При трещиностойкости $14 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}$ по этой формуле эффективное давление роста сравнительно малой трещины (по стандартам нефтяной индустрии) составляет 5 атмосфер (при том, что влияние вязкости, потока жидкости не учитывается) радиусом 15 метров и при высоте 30 метров.

Однако как отмечалось выше, давление продвижения фронта трещины измеряется в пределах от 5–15 атмосфер и даже выше. Разница является предметом споров, но, вероятно, это прежде всего объясняется зоной присутствия смачивания по фронту распространения трещины, как показано на рисунке 9. На заре истории развития ГРП возникла теория, что жидкость гидроразрыва не может достичь концевой зоны растущей трещины. Поэтому области жидкости разрыва под давлением будет предшествовать зона с давлением внутри трещины(максимально) равным пластовому давлению. Для пластов с низкой проницаемостью давление в этой области может быть разряженным. Напряжение смыкания породы будет стремиться закрыть трещину

в этой области, замедляя ее развитие и увеличивая давление, необходимое для вынужденного продолжения роста трещины (т. е. для принудительного роста концевой давлении распространения трещины). Это явление было теоретически обосновано и отчетливо наблюдалось в обоих лабораторных экспериментах и полу полевых горных опытах, где рост гидравлической трещины тщательно отслеживался. Это явление также объясняет почему забойное давление при основной обработке ГРП, как правило, точно соответствует давлению, измеренному во время предшествующего мини-ГРП. Во время мини-ГРП в породе уже образовалась трещины, поэтому фактическая трещиностойкость породы равна нулю. Несмотря на то, что порода уже разрушена, уменьшение давления последующей закачки наблюдается крайне редко (не принимая в расчет единственное и часто весьма сильное совпадение при разрыве призабойной зоны).

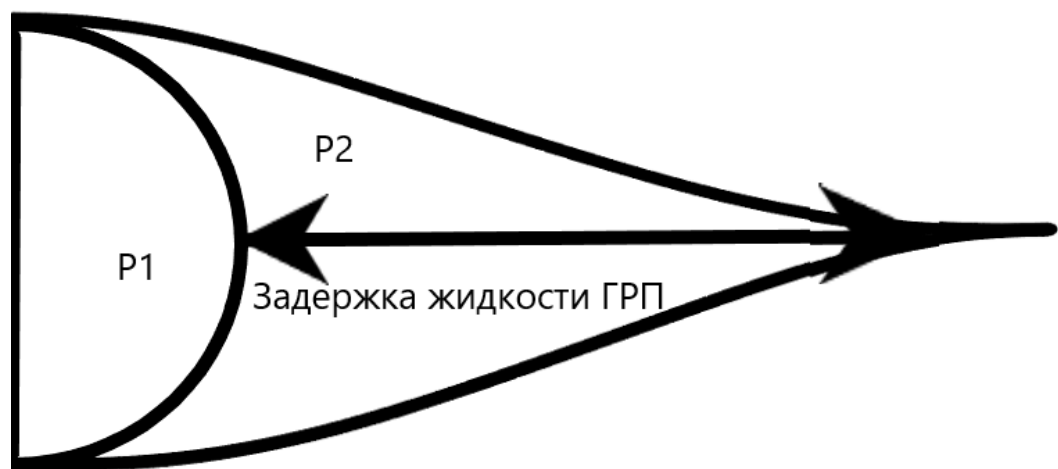


Рис. 9. Концевая зона трещины с отсутствием смачивания

Поскольку отставание жидкости является реальным явлением, предпринимались попытки вычислить и смоделировать количество запаздывающей жидкости (варьирующееся в пределах от 1% до 5% от длины трещины в экспериментах). Фактическое запаздывание является функцией вязкости жидкости, расхода закачки, (т. е. скорости развития трещины), модуля

Юнга, давления смыкания и давления внутри концевой области отсутствия смачивания. Приведённый широкий ряд переменных делает расчет кажущейся сложными, а на практике приводит к необходимости количественного измерения данных в полевых условиях (т. е. путем прямого измерения давления фронта распространения трещины). А также, поскольку фактическая трещиностойкость пород играет незначительную роль (если вообще играет) в данном поведении, лабораторные исследования трещиностойкости представляют мало ценности с точки зрения проектирования гидроразрыва.

Роль трещиностойкости по-прежнему является предметом изучения. В целом, все три исследователя пришли к выводу, что роль трещиностойкости наиболее важна в развитии радиальных трещин, и что трещиностойкость играет незначительную роль (если вообще играет) в геометрии трещины с ограниченной высотой. Выводы их работ кратко предоставлены в таблице 1.4.

Таблица 1.4

Трещиностойкость может быть важной (доминировать)	1) Пласт с очень низким модулем Юнга (менее 10 ГПа); 2) Чисто радиальная, с неограниченной высотой; 3) Закачка маловязких жидкостей (таких как вода).
Трещиностойкость менее важна (или пренебрежимо мала)	1) “Нормальные” пласты (модуль Юнга более 10 ГПа); 2) Закачка высоковязких жидкостей; 3) Трещины с некоторой ограниченностью высоты.

Значение трещиностойкости K_{IC} для дизайна ГРП

Как ширина трещины является результатом взаимодействия вязкого потока и эластичности породы, так окончательная геометрия трещины и высота определяются взаимодействием давления ГРП (то есть эффективным давлением) со свойствами и горными напряжениями прилегающих пластов. Поскольку

механические свойства, такие как прочность, модуль Юнга, и т. д. могут играть незначительную роль, в целом именно разница горных напряжений (напряжение смыкания трещины между пластами оказывают доминирующее влияние на рост трещины и геометрию трещины.

Это доминирование наглядно прослеживается в случае с доломитовыми пластами. Доломиты относятся к самым твердым, жестким породам, традиционно обрабатываемым методом ГРП. И все же, несмотря на прочность и высокий модуль Юнга, доломитовые пласты легко поддаются гидроразрывам. Это противоречие объясняется химическими изменениями, которые превращают известняк в доломит. Данные изменения вызывают уменьшение объема пород, и для пластов, которые залегают и окружены контролируемыми твердыми породами, такое уменьшение объема вызывает уменьшение горных ограничивающих напряжений. Поэтому, поскольку химические изменения способствуют созданию прочной плотной связи, уменьшение напряжения создает условия для легкой обработки пласта гидроразрывом.

Взаимодействие горных напряжений и геометрии трещины (или высоты трещины) и иллюстрируется на рисунке 10.

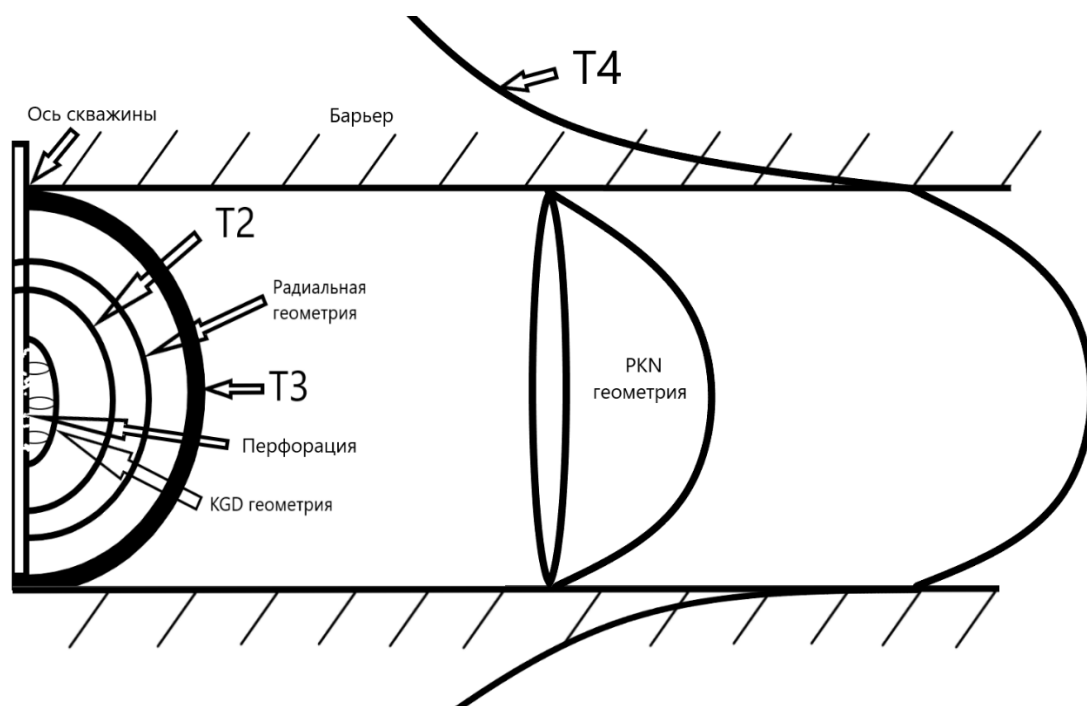


Рис. 10. Взаимодействие с горными напряжениями и динамика роста высоты трещины

При инициировании трещины из перфорированного (или открытого ствола) гидравлическая трещины принимает эллиптическую форму. Как показано на рисунке 10. Ширина такой трещины, управляется моделью KGD поскольку выполняется условие $H > L$, а по мере увеличения длины трещины, давление обработки будет уменьшаться, как видно на рисунке 10. По мере продолжения закачки, развивающаяся трещины примет круглую геометрическую форму, поскольку такая радиальная геометрия является естественной формой для любого гидравлического явления (то есть будто лужа воды на плоской поверхности, или гидроразрыв). На рисунке 10 указанная форма отмечена кривой T2. Радиальная трещины будет продолжать развиваться, пока не достигнет препятствия для роста, как показано T3 на рисунке 10, а на протяжении роста трещины давление обработки непрерывно падает.

Как только возникает препятствие для роста трещины, начинает увеличиваться ее длина, как показано на схеме. При таком росте ширина управляется моделью РКН (поскольку $L > H$), а давление обработки начинает увеличиваться. Главным образом, на данном этапе роста трещины она

становится “трубопроводом”, длина которого увеличивается, давление должно возрасти, для того, что обеспечить продолжение закачки при постоянной скорости.

В конце концов давление достигнет уровня, достаточно высокого для прорыва в первоначальную зону. Ведь, по существу, пласты пород обладают критическим давлением, как и любой сосуд высокого давления, и в случае превышение этого давления пласт рвется, и ограниченность трещины по высоте теряется. Для иллюстрации этот момент наступает при T4 на рисунке 10. В этой точке рост трещины возобновляется, однако, и длина трещины также продолжается развиваться, хотя и с уменьшенной скоростью, а эффективное давление начинает выравниваться при значении, равном критическому давлению первоначальной зоны, подвергаемой гидроразрыву. В этом случает рост высоты трещины приводит к пересечению с другой зоной низкого напряжения или легкодоступной гидроразрыву, то давление обработки начнет падать, поскольку трещина начнет предпочтительное развитие в этом новом пласте.

2. МОДЕЛЬ СТАЦИОНАРНОГО РОСТА ТРЕЩИНЫ ГРП

2.1. Физическая постановка задачи

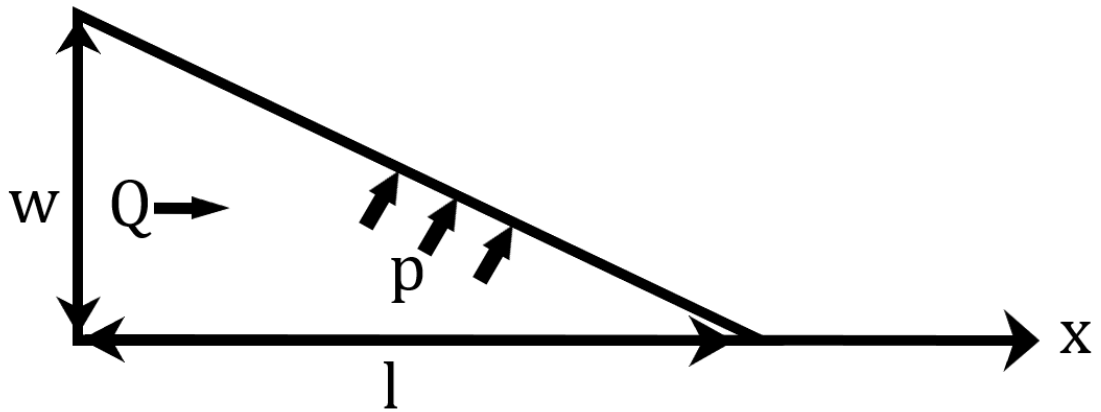


Рис. 11 Геометрия крыла трещины ГРП

В модели сделаны следующие допущения:

1. Жидкостью гидроразрыва пласта является вода.
2. Жидкость гидроразрыва пласта несжимаема.
3. Пропант или иной расклинивающий агент в скважину не нагнетается.
4. Модель стационарна.
5. Трещиностойкость не учитывается.

Запишем уравнение неразрывности или закон сохранения массы:

$$\frac{\partial(hwv)}{\partial x} = -q, \quad (65)$$

где h – мощность пласта,

w – ширина трещины,

v – скорость течения жидкости по трещине ГРП,

q – отток воды из трещины.

Уравнение количества движения из формулы Пуазейля для течения жидкости по трещине запишется так:

$$v = -\frac{w^2}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (66)$$

где μ – динамическая вязкости жидкости-смеси,

P – давление.

Отток воды из трещины определяется следующим уравнением:

$$q = \frac{kh_e K_r(S_{or})}{\mu L} (P(x) - P_r), \quad (67)$$

где P_r – пластовое давление,

L – расстояние до контура питания,

h_e – эффективная мощность пласта за вычетом глинистых пропластков,

$K_r(S_{or})$ – относительная фазовая проницаемость воды при остаточной нефтенасыщенности S_{or} .

Ширина трещины и давление описывается следующим уравнением:

$$w(x) = \frac{1 - \nu_\sigma}{\mu_\sigma} (P(x) - P_{грп})h, \quad (68)$$

где ν_σ – коэффициент Пуассона,

μ_σ – модуль Юнга,

$P_{грп}$ – давление гидроразрыва пласта.

Для замыкания системы уравнений ее необходимо дополнить граничными условиями на входе и на кончике трещины, их можно записать так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= f(Q_{in}), & \text{при } x = 0, \\ Q &= Q_{in}, & \text{при } x = 0, \end{aligned}$$

$$v = \frac{Q_{in}}{S}, \quad \text{при } x = 0. \quad (69)$$

Площадь трещины можно найти по формуле:

$$S = \frac{\pi w h}{4}. \quad (70)$$

Тогда граничное условие запишется так:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{12\mu v}{w^2} = -\frac{48\mu Q_{in}}{\pi h w^3}, \quad \text{при } x = 0. \quad (71)$$

Также требуется граничное условие на кончике трещины. Скорость течения жидкости ГРП на кончике трещины отсутствует, поэтому:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad \text{при } x = l. \quad (72)$$

Уравнение баланс расходов запишем так, из этого условия найдем l :

$$Q_{in} = \int_0^l q(x) dx. \quad (73)$$

2.2. Математическая постановка задачи

В результате, в стационарную модель роста трещины входят уравнение сохранения массы, уравнение количества движения жидкости гидроразрыва и связь ширины трещины от давления. Преобразуем вышеописанную систему уравнений.

Уравнение оттока воды из трещины (67) подставим в уравнение неразрывности (65):

$$\frac{\partial(h * w(x) * v)}{\partial x} = -\frac{k * h * K(S_o)}{\mu * l} * (P(x) - P_r). \quad (74)$$

Уравнение количества движения из формулы Пуазейля для течения жидкости по трещине (66) подставим в уравнение закона сохранения массы (74):

$$\frac{\partial\left(h * w(x) * \left(-\frac{w(x)^2}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x}\right)\right)}{\partial x} = -\frac{k * h * K(S_o)}{\mu * l} * (P(x) - P_r). \quad (75)$$

Уравнение связи ширины трещины и давления (68) также подставим в закон сохранения массы (75). Получим уравнение (76).

$$\frac{\partial\left(\left(\left(\frac{1 - \nu^2}{\mu}\right)(P - P_{грп})h\right)^3 \frac{\partial P}{\partial x}\right)}{\partial x} = -\frac{k * h * K(S_o)}{\mu * l} * (P(x) - P_r). \quad (76)$$

В левой части уравнения все постоянные параметры вынесем из-под знака дифференциала и введем замену (77):

$$a = \left(\frac{1 - \nu^2}{\mu}\right)^3 h^3. \quad (77)$$

Тогда левая часть уравнения неразрывности получит вид (78):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{1 - \nu^2}{\mu} \right) (P - P_{\text{грп}}) h \right)^3 \frac{\partial P}{\partial x} = a \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{4} \frac{\partial (P - P_{\text{грп}})^4}{\partial x} \right) = \frac{a}{4} \frac{\partial^2 P^4}{\partial x^2}. \quad (78)$$

Введем замену:

$$P^4 = y. \quad (79)$$

Правую часть уравнения запишем в таком виде:

$$f(\sqrt[4]{y}) = -\frac{4k * h * K(S_0)}{a * \mu * l} * (P(x) - P_r). \quad (80)$$

Итоговый вид уравнения после всех введённых замен и преобразований примет вид:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f(\sqrt[4]{y}). \quad (81)$$

2.3. Численное решение методом простых итераций

Решать уравнение будем итерационно методом простых итераций.

Все значения используемых параметров для проведения расчетов будут применены из таблицы 2.1.

Таблица 2.1

№	Параметр	Размерность	Значение
1	Мощность пласта, м	м	30
2	Расстояние до контура питания, L	м	20
3	Эффективная мощность пласта, h_e	м	25
4	Вязкость жидкости разрыва(воды), μ	мПа·с	1.1
5	Закачиваемый расход воды ГРП, Q_{in}	м ³ /мин	2
6	Проницаемость породы, k	м ²	$2.3 \cdot 10^{-12}$
7	Начальное пластовое давление, P	МПа	3.4
8	Давление ГРП, $P_{грп}$	МПа	5.1
9	Модуль Юнга, μ_σ	ГПа	20.5
10	Коэффициент Пуассона, ν_σ	безразмерная	0.26
11	ОФП воды при остаточной водонасыщенности $S_{or}, K_r(S_{or})$	безразмерная	0.5

Параметры модели, используемые для основных расчетов

Блок схема численного метода решения этого уравнения (81) отображена на рисунке 12.

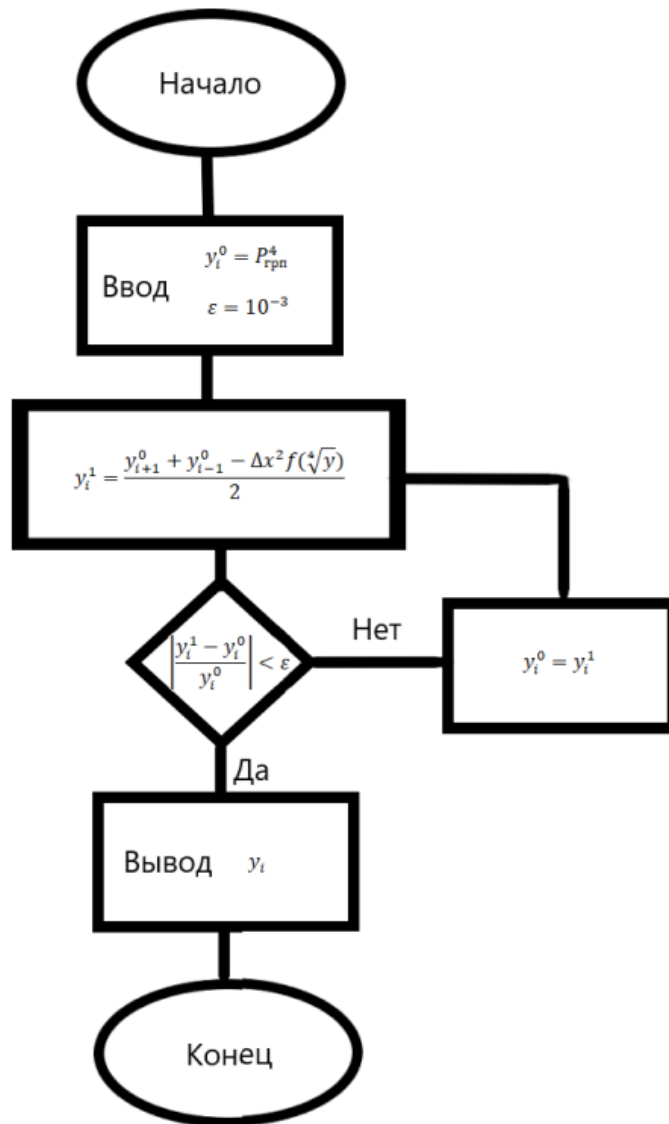


Рис. 12. Блок схема численного метода простых итераций

Алгоритм метода простых итераций:

1. Задаем точность вычислений:

$$\varepsilon = 10^{-3}$$

2. Записываем формулу итерационного процесса в виде:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta x^2} = f(\sqrt[4]{y})$$

3. Вычисляем i -ое приближение:

$$y_i^1 = \frac{y_{i+1}^0 + y_{i-1}^0 - \Delta x^2 f(\sqrt[4]{y})}{2}$$

4. Сравниваем полученное приближение с предыдущим:

$$\left| \frac{y_i^1 - y_i^0}{y_i^0} \right| < \varepsilon.$$

При подсчёте вручную, например, с точностью до $\varepsilon = 10^{-3}$, это условие сводится к проверке совпадения всех приближений с точностью до единицы в третьем разряде. Если условие выполнено, то решение считается найденным на i -ом шаге и итеративный процесс закончен, в противном случае полагаем $i = i + 1$ и переходим к вычислению следующего приближения.

В результате получаем следующую зависимость, показанную на рисунке 13.

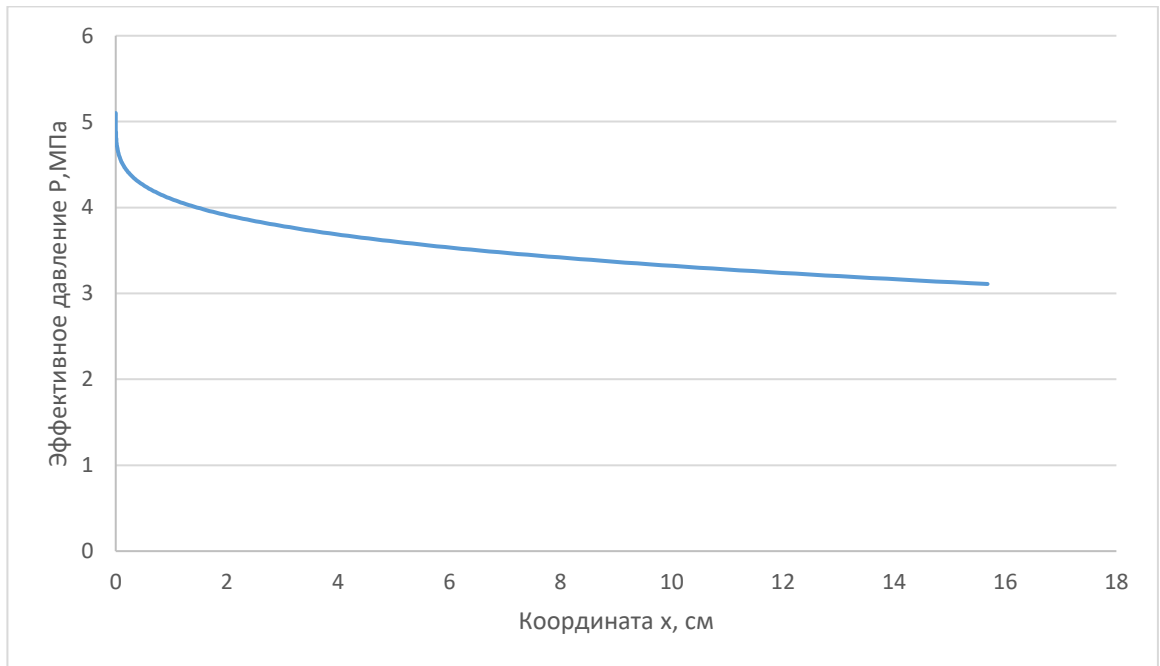


Рис. 13. Зависимость эффективного давления от координаты

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Цель работы достигнута, создана и численно решена стационарная модель образования и распространения трещин гидроразрыва пласта.

Исходя из решения, ширина трещины ГРП составила 16 см, что по стандартам нефтяной индустрии является сравнительно малой трещиной.

Написан программный код на языке C++ позволивший реализовать численное решение конечно-разностной схемы итерационного метода простых итераций.

Численное решение данной стационарной модели роста трещины дает понимание дальнейшего развития этой модели под практические реалии использования технологии гидроразрыва.

Получено распределение давления по координате, при котором давление на забое скважины соответствует значению $P_{\text{заб}} = \frac{P_{\text{грп}}}{1.5}$.

Классические одномерные модели не предусматривают кластерный вид гидроразрыва, в котором пропант заменяется кварцевым песком, который дешевле больше чем в 3 раза.

В дальнейшем данный подход будет использоваться в гидродинамическом симуляторе “ТехСхема” в организации СургутНефтеГаз, в которой я явлюсь одним из разработчиков данного ПО.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Reservoir stimulation. Third edition / Eds. M.J. Economides, K.G. Nolte. N. Y.: John Wiley & Sons, 2000. 856 p.
2. Behrmann L.A., Elbel J.L. Effect of perforations on fracture initiation // J. Petrol. Tech. 1991. P. 608–615.
3. Geertsma J., Haafkens R. A Comparison of the theories for predicting width and extent of vertical hydraulically induced fractures // J. Energy Res. Tech. 1979. Vol. 101, iss. 1. P. 8–19.
4. Mendelsohn D.A. A review of hydraulic fracture modeling. Pt I: General concepts, 2D models, motivation for 3D modeling // Ibid. 1984. Vol. 106, iss. 3. P. 369–376.
5. Mendelsohn D.A. A review of hydraulic fracture modeling. Pt II: 3D Modeling and vertical growth in layered rock // Ibid. 1984. Vol. 106, iss. 4. P. 543–553.
6. Geertsma J. Chapter 4. Two-dimensional fracture propagation models // Recent advances in hydraulic fracturing. Monograph Ser. Vol. 12. / Eds. J.L. Gidley, S.A. Holditch, R.W. Veatch. Richardson: SPE, 1989. P. 81–94.
7. Adachi J., Siebrits E., Peirce A., Desroches J. Computer simulation of hydraulic fractures // Intern. J. Rock Mech. Mining Sci. 2007. Vol. 44. P. 739–757.
8. Rahman M.M., Rahman M.K. A review of hydraulic fracture models and development of an improved pseudo-3D model for stimulating tight oil/gas sand // Energy Sources. Pt A. 2010. Vol. 32. P. 1416–1436.
9. Ching H.Y. Mechanics of Hydraulic Fracturing. Houston: Gulf Publ. Company, 1997. 182 p.
10. Carter R.D. Appendix I. Derivation of the general equation for estimating the extent of the fractured area // Drilling and Production Practice / Eds. G.C. Howard, C.R. Fast. N. Y.: Amer. Petrol. Inst., 1957. P. 261–270.
11. Ивашнев О.Е., Смирнов Н.Н. Формирование трещины гидроразрыва в пористой среде // Вестник Московского ун-та. Математика. Механика. 2003. № 6. С. 28–36.
12. Смирнов Н.Н., Тагирова В.Р. Автомодельные решения задачи о формировании трещины гидроразрыва в пористой среде // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2007. № 1. С. 70–82.
13. Тагирова В.Р. Распространение трещины гидроразрыва под напором неньютоновской жидкости // Вестник Московского ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2009. № 6. С. 33–41.

14. Татосов А.В. Модель закачки пропанта в трещину гидроразрыва // Вычисл. технологии. 2005. Т. 10, № 6. С. 91–101.
15. Татосов А.В. Движение вязкой жидкости с примесью частиц в пористом канале // Вестник ТюмГУ. 2007. № 5. С. 56–60.
16. Ентов В.М., Зазовский А.Ф., Стелин И.Б., Хараидзе Д.М. Одномерная модель распространения трещины гидроразрыва // Материалы IX Всесоюз. семинара “Численные методы решения задач фильтрации. Динамика многофазных сред”. Новосибирск, ИТПМ СО АН СССР, 1989. С. 91–95.
17. Gordeev Y.N., Entov V.M. The pressure distribution around a growing crack // J. Appl. Math. Mech. 1997. Vol. 51(6). P. 1025–1029.
18. Mathias S.A., Reeuwijk M. Hydraulic fracture propagation with 3-D leak-off // Transp. Porous Med. 2009. Vol. 80. P. 499–518.
19. Желтов Ю.П., Христианович С.А. О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта // Изв. АН СССР. Техн. науки. 1955. № 5. С. 3–41.
20. Geertsma J., de Klerk F. A rapid method of predicting width and extent of hydraulically induced fractures // J. Petrol. Tech. 1969. No. 12. P. 1571–1581.
21. Sneddon I., Lowengrub M. Crack Problems in the Classical Theory of Elasticity. N. Y.: John Wiley & Sons, 1969. 221 p.
22. Spence D.A., Sharp P. Self-similar solutions for elastohydrodynamic cavity flow // Proc. Royal Soc. A. 1985. Vol. 400. P. 289–313.
23. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
24. Daneshy A.A. On the design of vertical hydraulic fractures // J. Petrol. Tech. 1973. Vol. 1. P. 83–97.
25. Adachi J.I., Detournay E. Self-similar solution of a plane-strain fracture driven by a powerlaw fluid // Intern. J. Numer. Anal. Meth. Geomech. 2002. Vol. 26. P. 579–604.
26. Баренблатт Г.И. О некоторых задачах теории упругости, возникающих при исследовании механизма гидравлического разрыва нефтеносного пласта // Прикл. математика и механика. 1956. Т. 20, вып. 4. С. 475–486.
27. Papanastasiou P. The influence of plasticity in hydraulic fracturing // Intern. J. Fracture. 1997. Vol. 84. P. 61–97.
28. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970. 904 с.
29. Бабе Г.Д., Бондарев Э.А., Воеводин А.Ф., Каниболотский М.А. Идентификация моделей гидравлики. Новосибирск: Наука, 1980. 161 с.

30. Алексеенко О.П., Вайсман А.М. Прямолинейный гидроразрыв в упругой плоскости // Изв. АН СССР. Механика твёрдого тела. 1988. № 6. С. 145–149.
31. Акулич А.В., Звягин А.В. Численное моделирование распространения трещины гидроразрыва // Вестник Московского ун-та. Математика. Механика. 2008. № 1. С. 43–49.
32. Заковский А.Ф., Одишария М.Г., Песляк Ю.А. Автомодельные решения задачи о распространении трещины гидроразрыва в непроницаемой горной породе // Изв. АН СССР. Механика твёрдого тела. 1986. № 5. С. 92–100.
33. Алексеенко О.П., Вайсман А.М. Некоторые особенности плоской задачи гидроразрыва упругой среды // ФТПРПИ. 1999. № 3. С. 64–70.
34. Desroches J., Detournay E., Lenoach B. et al. The crack tip region in hydraulic fracturing // Proc. Royal Soc. A. 1994. Vol. 447. P. 39–48.
35. Алексеенко О.П., Вайсман А.М. Рост почти заполненной осесимметричной трещины гидроразрыва при малых и больших утечках // ФТПРПИ. 2004. № 3. С. 1–11.
36. Алексеенко О.П., Есипов Д.В., Куранakov Д.С. и др. Двумерная пошаговая модель распространения трещины гидроразрыва // Вестник НГУ. Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11, вып. 3. С. 36–59.
37. Garagash D., Detournay E. The tip region of a fluid-driven fracture in an elastic medium // J. Appl. Mech. 2000. Vol. 67. P. 183–192.
38. Lecampion B., Detournay E. An implicit algorithm for the propagation of a hydraulic fracture with a fluid lag // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 2007. Vol. 196, iss. 49–52. P. 4863–4880.
39. Астафьев В.И. Асимптотический анализ процесса развития трещины гидравлического разрыва пласта // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Физ.-мат. науки. 2010. № 5(21). С. 105–116.
40. Perkins T.K., Kern L.R. Widths of hydraulic fractures // J. Petrol. Tech. 1961. No. 9. P. 937–949.
41. Sheddon I.N., Elliott A.A. The opening of a Griffith crack under internal pressure // Quarterly Appl. Math. 1946. No. 4. P. 262–267.
42. Nordgren R.P. Propagation of a vertical hydraulic fracture // SPE J. 1972. Vol. 12, No. 4. P. 306–314.
43. Nolte K.G. Fracturing-pressure analysis for nonideal behavior // J. Petrol. Tech. 1991. No. 2. P. 210–218.

44. Abe H., Mura T., Keer L.M. Growth rate of a penny-shaped crack in hydraulic fracturing of rocks // *J. Geop. Res.* 1976. Vol. 81. P. 5335–5340.
45. Abe H., Keer L.M., Mura T. Theoretical study of hydraulically fractured penny-shaped cracks in hot, dry rocks // *Intern. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.* 1979. Vol. 3. P. 79–96.
46. Зазовский А.Ф. Распространение плоской круговой трещины гидроразрыва в непроницаемой горной породе // *Изв. АН СССР. Механика твёрдого тела.* 1979. № 2. С. 103–109.
47. Слепян Л.И. Механика трещин. Л.: Судостроение, 1990. 296 с.
48. Atkinson C., Eftaxiopoulos D.A. Numerical and analytical solution for the problem of hydraulic fracturing from cased and cemented wellbore // *Intern. J. Solids and Structures.* 2002. Vol. 39, No. 6. P. 1621–1650.
49. Зубков В.В., Кошелев В.Ф., Линьков А.М. Численное моделирование инициирования и роста трещин гидроразрыва // *ФТПРПИ.* 2007. № 1. С. 45–63.
50. Мартынюк П.А. Особенности развития трещин гидроразрыва в поле сжатия // *Там же.* 2008. № 6. С. 19–29.
51. Cherny S., Chirkov D., Lapin V. et al. Two-dimensional modeling of the near-wellbore fracture tortuosity effect // *Intern. J. Rock Mech. Mining Sci.* 2009. Vol. 36, No. 6. P. 992–1000.
52. Settari A., Cleary M.P. Three-dimensional simulation of hydraulic fracturing // *J. Petrol. Tech.* 1984. Vol. 36, No. 7. P. 1177–1190.
53. Vandamme L., Curran J.H. A three-dimensional hydraulic fracturing simulator // *Intern. J. Numer. Meth. Eng.* 1989. Vol. 28, iss. 4. P. 909–927.
54. Ouyang S., Carey G.F., Yew C.H. An adaptive finite element scheme for hydraulic fracturing with proppant transport // *Intern. J. Numer. Methods in Fluids.* 1997. Vol. 24. P. 645–670.
55. Гордеев Ю.Н. Автомодельное решение задачи о распространении псевдотрёхмерной вертикальной трещины гидроразрыва в непроницаемом пласте // *Изв. РАН. МЖГ.* 1995. № 6. С. 79–86.
56. Adachi J.I., Detournay E., Peirce A.P. Analysis of the classical pseudo-3D model for hydraulic fracture with equilibrium height growth across stress barriers // *Intern. J. Rock Mech. Mining Sci.* 2010. Vol. 47, iss. 4. P. 625–639.
57. Papanastasiou P., Zervos A. Three-dimensional stress analysis of a wellbore with perforations and a fracture // *Paper SPE.* 1998. No. 47378.

58. Hossain M.M., Rahman M.K., Rahman S.S. Hydraulic fracture initiation and propagation: roles of wellbore trajectory, perforation and stress regimes // *J. Petrol. Sci. Eng.* 2000. Vol. 27, iss. 3-4 P. 129–149.
59. Yuan Y., Abousleiman Y., Weng X., Roegiers J.-C. Three-dimensional elastic analysis on fracture initiation from a perforated borehole. Paper SPE. 1995. No. 29601.
60. Есипов Д.В., Куранakov Д.С., Лапин В.Н., Чёрный С.Г. Многозонный метод граничных элементов и его применение к задаче инициации трещины гидроразрыва из перфорированной обсаженной скважины // *Вычисл. технологии.* 2011. Т. 16, № 6. С. 13–26.
61. Alekseenko O.P., Potapenko D.I., Cherny S.G. et al. 3D Modeling of fracture initiation from perforated non-cemented wellbore // *SPE J.* 2013. Vol. 18, No. 3. P. 589–600.
62. Sousa J.L., Carter B.J., Ingraffea A.R. Numerical simulation of 3D hydraulic fracture using newtonian and power-law fluids // *Intern. J. Rock Mech. and Mining Sci. & Geomech. Abstr.* 1993. Vol. 30, iss. 7. P. 1265–1271.
63. Rungamornrat J., Wheeler M.F., Mear M.E. A numerical technique for simulating non-planar evolution of hydraulic fractures. Paper SPE. 2005. No. 96968.
64. Татосов А. В. TSH FRAC Программный комплекс для моделирования геометрических параметров трещины гидроразрыва пласта, определения стоимости мероприятий и оценке рисков / А. В. Татосов, А. С. Шляпкин // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020619401 от 17.08.2020.
65. Шляпкин А. С. О проведении экспресс-оценки геометрических параметров закрепленной на пропанте трещины гидроразрыва пласта методами математического моделирования / А.С. Шляпкин, А.В. Татосов // *Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика.* 2020. Том 6. № 3. С. 79-92. DOI: 10.21684/2411-7978-2020-6-3-79-92
66. Шляпкин А. С. О решении задачи гидроразрыва пласта в одномерной математической постановке / А. С. Шляпкин, А. В. Татосов // *Нефтяное хозяйство.* 2020. Вып. 12. С. 118-121.