В случае $q_j = q_j(z)$ построим решение $V_{j1}(z)$, $V_{j2}(z)$ с учетом начальных условий [1]

$V_{j1}(0) = 1,\ V'_{j1}(0) = 1,\ V_{j2}(0) = 1,\ V'_{j1}(0) = 1,$

Общее решение $V_j(z)$ будет иметь вид

$V_j(z) = F_j V_{j1}(z) + E_j V_{j2}(z).$

Удовлетворяя граничным условиям

$$\sum_{k=1}^{4} b_{nk} y_k = 0, \quad n = \overline{1,4}, \quad (y_1, y_2, y_3, y_4) = (F_1, E_1, F_2, E_2)^T,$$

$$b_{11} = \beta_1 V'_{11}(-H_0) - \beta_2 V_{11}(-H_0), \quad b_{12} = \beta_1 V'_{12}(-H_0) - \beta_2 V_{12}(-H_0),$$

$$b_{21} = 1,\ b_{23} = -\beta_3,\ b_{31} = \beta_5,\ b_{32} = \beta_4,\ b_{33} = -\beta_7,\ b_{34} = -\beta_6,$$

$$b_{43} = V'_{21}(H_2) - \beta_8 V_{21}(H_2), \quad b_{44} = V'_{22}(H_2) - \beta_8 V_{22}(H_2),$$

$$b_{13} = b_{14} = b_{22} = b_{24} = b_{41} = b_{42} = 0,$$

получим уравнение для определения $w = w(k_1, k_2, \kappa_{11}, \kappa_{12}, \kappa_{21}, \kappa_{21}, b_1, b_2)$, согласно которому можно определить все искомые параметры возмущенного движения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алешков Ю. З. Волны на поверхности сыпучих сред, вызванные потоком жидкости // Вестн. С.-Петерб. ун-та. 2002. Сер. 1. Вып. 4 (№ 25). С. 35–43.
2. Великанов М. А. Динамика русловых потоков. М., 1954.
3. Великанов М. А. Движение наносов. М., 1948.
4. Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Точные решения. М.: Физматлит, 1995.
5. Перегудин С. И. Пространственные волновые движения на поверхности сыпучих сред. // Труды Средневолжского математического об-ва. 2003. Том 5. № 1. С. 130–138.
6. Перегудин С. И., Холодова С.Е. Воздействие пространственных волн малой амплитуды на рельеф дна // Тез. докл. «Процессы управления и устойчивость». СПбГУ. СПб., 2003. С. 222–225.
7. Франкль Ф. И. О движении песчаных волн // Докл. АН СССР. 1953. Т. 89. № 1. С. 29–32.

Алексей Викторович ТАТОСОВ —
доцент кафедры математического моделирования,
кандидат физико-математических наук

Взаимодействие детонационной волны с контактной поверхностью

УДК 534.222

АННОТАЦИЯ. Рассматривается начальный этап распада детонационной волны, распространяющейся от закрытого конца трубы по ограниченной в протяженности горючей смеси, а также пример отклонения от точки Чепмена-Жуге детонационной адиабаты. Исследование ведется методом характеристик в переменных Римана.

The author considers within the limits of the method of Ryman's characteristics in the variables the initial stage of detonation wave collapse that spreads from the closed end of the pipe along the stream of the fuel, as well as an example of the declination from Chapman-Gouge point of detonation adiabate.

Исследование процессов инициирования и распространения детонационных волн приводится во многих работах (см., например, [1,3]). Этот вопрос имеет практическое значение, как в техники и технологии, так и в связи с возможностью стихийного возникновения таких волн на производстве. Принудительное прерывание волны гетерогенной детонации изучалось в работе [3]. Представляется интересным, так же изучение эволюции детонационной волны после полного выгорания горючей смеси.

Если горючая смесь ограничена химически инертным газом, то возникшая детонационная волна впоследствии распадается. Ввиду быстрого сгорания химически активных веществ, влияние зоны релаксации в структуре детонационной волны существенно, только в очень короткий промежуток времени после распада. Поэтому при изучении процесса затухания волны целесообразно рассмотреть предельный случай, когда ширина зоны релаксации пренебрежимо мала.

Особое значение в теории распространения детонационных волн имеет режим горения Чепмена-Жуге [4], к которому стремится всякая незатухающая детонационная волна распространяющаяся по однородной горючей смеси в трубе постоянного диаметра. Однако, если на пути распространения волны встречается некоторая особенность, например, изменение состава смеси, то произойдет отклонение от указанного режима.

1. РАСПАД ДЕТОНАЦИОННОЙ ВОЛНЫ

Пусть идеальная (мгновенная) детонационная волна распространяется влево от закрытого конца трубы по горючей смеси и соответствует точке Чепмена-Жуге. Непосредственно за детонационным скачком следует автомодельная центрированная волна разрежения, к которой примыкает область покоящегося газа. Пусть протяженность горючей смеси равна h, а далее находится область нейтрального газа. При совпадении фронта детонационной волны с контактной поверхностью, отделяющей горючую смесь, произойдет распад разрыва. В область слева от контактной поверхности пройдет волна сжатия с затухающей головной ударной волной, а в область справа может идти как отраженная волна разрежения, так и волна сжатия. В работе рассмотрен первый случай, который обычно имеет место.

Саму детонационную волну и параметры газа за ней будем считать заданными. Они определяются по состоянию газа перед волной, химическим составом и теплоте реакции по известным формулам. Так же по элементарной теории может быть определено состояние газа по обе стороны от контактной поверхности в первый момент после распада разрыва [4], т. к. распределение параметров в волне разрежения, следующей за детонационной волной, описывается непрерывными функциями.

Рассчитаем возникающее течение газа методом характеристик. Для упрощенного аналитического исследования положим, что показатели адиабаты γ всех газов одинаковы и равны 5/3, а проходящая влево от контактной поверхности ударная волна является слабой. В этом случае, все течение слева от контактной поверхности определяется как волна Римана с разрывом на ударной волне. Отметим, что для двухатомного газа или воздуха в рассматриваемых условиях $\gamma \approx 1,4$. Это несколько меньше указанного значения. Поэтому принятые упрощения соответствуют тому, что смесь содержит значительную долю инертного одноатомного газа.

Выделим следующие друг за другом три области течения газа, находящегося справа от контактного разрыва.

Первая – область неподвижного газа, образованная продуктами горения и непосредственно примыкающая к закрытому концу трубы. Здесь:

$$r = r_0,\ s = s_0,\ u = u_0,\ \gamma = 5/3 \qquad (1)$$

В равенствах (1) r — скорость газа, a — скорость звука, γ — показатель адиабаты, $r = u + 2a/(\gamma-1)$, $s = u - 2a/(\gamma-1)$ — инварианты Римана. Значения $r_0 = -s_0 = 2a_0/(\gamma-1)$ считаем заданными.

Вторая — область центрированной волны разрежения, образованной в результате детонации и распространяющейся влево. Здесь:

$r = r_0,\ s_1 \le s \le s_0,\ x/t = \alpha s + \beta r_0$ (2)

Указанному значению соответствуют $\alpha = 2/3,\ \beta = 1/3,\ s_1$ — задано.

Далее следует третья область – область общего решения, которая может быть описана функцией $W(r; s)$ удовлетворяющей уравнению [5]:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r \partial s} = \frac{m}{r-s}\left(\frac{\partial W}{\partial r} - \frac{\partial W}{\partial s}\right),\quad m = \frac{3-\gamma}{2(\gamma-1)}.$$

Общий интеграл этого уравнения для $\gamma = 5/3$ имеет вид

$$W = \frac{f(r) + g(s)}{r-s}, \tag{3}$$

причем справедливо представление:

$$\begin{cases} x - (\alpha r + \beta s)t = \partial W / \partial r, \\ x - (\alpha s + \beta r)t = \partial W / \partial s. \end{cases} \tag{4}$$

Область общего решения следует разбить на две части, т. к. из точки пересечения детонационной волны с линией контактного разрыва выходит пучок характеристик. В плоскости (x, t) они заранее неизвестны. Указанные области течения газа опишем функциями W_1 и W_2.

Определим вначале движение газа в первой части, которая представляет собой область интерференции двух центрированных волн разрежения, возникших в результате детонации и скачкообразного изменения скорости контактного разрыва в момент распада детонационной волны. В плоскости (r, s) ей соответствует прямоугольник:

$r_1 \le r \le r_0,\ s_1 \le s \le s_0.$

Значение r_1 как уже отмечалось, может быть рассчитано по элементарной теории и поэтому, считаем его заданным.

Пользуясь представлением (4) поставим для функции $W_1(r; s)$ следующие краевые условия:

$$r = r_0:\quad x - (\alpha s + \beta r_0)t = \partial W_1 / \partial s = 0,$$

$$s = s_1:\quad \partial W_1 / \partial r = -h - \tau(\alpha r + \beta s_1).$$

Здесь $x = -h,\ t = \tau$ — место и момент распада детонационной волны. Учитывая общий вид (3) функции W_1, получаем

$$\begin{cases} (r_0 - s) g_1'(s) + g_1(s) + f_1(r_0) = 0, \\ (r - s_1) f_1'(r) - f_1(r) - g_1(s_1) = [-h - \tau(\alpha r + \beta s_1)](r - s_1)^2. \end{cases}$$

Поскольку функция W определена с точностью до константы, то из первого уравнения системы следует, что можно принять [5]:

$$W_1 = \frac{f_1(r)}{r-s},\ f_1 = (r_0) = 0.$$

Тогда второе условие дает:

$$f_1(r) = -\frac{\tau}{3}(r - r_0)(r - s_1)^2,\quad \tau = -\frac{3h}{2s_1 + r_0}. \tag{5}$$

Определим теперь движение газа во второй части области общего решения, ограниченной слева траекторией контактного разрыва. В плоскости (r, s) она отображается в треугольник, со сторонами:

$r = r_1,\ s = s_0,\ s - s_1 = k(r - r_1),$ (6)

Наклонная сторона соответствует траектории движения контактного разрыва. Здесь

$$k = \frac{(\rho a)_+ + (\rho a)_-}{(\rho a)_+ - (\rho a)_-}$$

коэффициент отражения, определяемый импедансами газов (ρa) справа и слева от контактной поверхности с момента распада разрыва. Этот коэффициент может быть выражен через параметры r_1, s_1 и a_1 где a_1 — скорость звука в невозмущенном слева газе, из условия равенства давления и скорости газа по обе стороны от контактного разрыва. Для идеального газа при указанном значении γ получаем

$$k = \frac{r^- - s_1}{r^- - r_1}, \quad r^- = 3a_1.$$

Здесь учтено так же постоянство инварианта r^- в газе слева от контактного разрыва. Подчеркнем, что параметры r_1, s_1 относятся к газу, находящемуся справа от контактного разрыва, a_1 — слева.

Поставим для функции W_2 следующие краевые условия:

$$r = r_1: \quad \frac{\partial W_2}{\partial r} = \frac{\partial W_1}{\partial r}, \ \frac{\partial W_2}{\partial s} = \frac{\partial W_1}{\partial s},$$

$$s - s_1 = k(r - r_1): \quad \frac{dx}{dt} = \frac{r+s}{2}.$$

Из первого условия следует, что можно положить:

$$W_2 = \frac{f_2(r)}{r-s}, f_2(r_1) = f_1(r_1), f'_2(r_1) = f'_1(r_1) \tag{7}$$

Тогда второе условие, с учетом представления (4) дает дифференциальное уравнение для функции $f_2(r)$ с общим интегралом:

$$f_2(r) = C_1(r - r^-)^{\lambda_1} + C_2(r - r^-)^{\lambda_2}, \ r^- = 3a_1;$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные; λ_1, λ_2 корни уравнения:

$$(k-1)^2\lambda^2 + (k-1)(k+5)\lambda + 6(k+1) = 0.$$

Константы C_1, C_2 могут быть определены из (7):

$$\begin{cases} C_1(r_1 - r^-)^{\lambda_1} + C_2(r_1 - r^-)^{\lambda_2} = f_1(r_1), \\ C_1\lambda_1(r_1 - r^-)^{\lambda_1 - 1} + C_2\lambda_2(r_1 - r^-)^{\lambda_2 - 1} = f'_1(r_1). \end{cases} \tag{8}$$

Тем самым функции W_1 и W_2 считаем найденными.

Определим, далее, движение газа слева от контактного разрыва в плоскости (x, t). Используя представление (4) для функции W_2 в виде:

$$t = -\frac{\partial W_2/\partial r - \partial W_2/\partial s}{(\alpha - \beta)(r - s)}, \tag{9}$$

$$x = -\frac{(\alpha s + \beta r)\partial W_2/\partial r - (\alpha r + \beta s)\partial W_2/\partial s}{(\alpha - \beta)(r - s)},$$

и уравнение (6) движения разрыва в плоскости (r, s):

$$s = kr + (s_1 - kr_1), \tag{10}$$

можем найти траекторию разрыва $x = x(r)$, $t = t(r)$. Контактный разрыв как поршень ускоряет газ находящийся слева от него, здесь

$$u + \frac{2a}{\gamma - 1} = \frac{2a_1}{\gamma - 1}, \quad x - (u - a)t = g(u), \quad \gamma = \frac{5}{3}. \tag{11}$$

Эта область ограничена слева неизвестной траекторией $x_f(t)$ ударной волны. Функция $g(u)$ зависит от характера движения контактного разрыва и должна быть определена. В силу непрерывности скорости газа на контактном разрыве, на правой границе области имеем

$$\frac{dx}{dt}=u=\frac{r+s}{2}=\frac{(1+k)r+(s_1-kr_1)}{2}. \tag{12}$$

Из уравнений (9)–(12) находи неизвестную функцию $g(u)$:

$$g(u)=\frac{1}{4}\frac{(k+1)^2(k\lambda_1+k-\lambda_1+1)G^{\lambda_1}(u)C_1}{(k-1)(ku-u-kr_1+s_1)^2}+ \tag{13}$$

$$+\frac{1}{4}\frac{(k+1)^2(k\lambda_2+k-\lambda_2+1)G^{\lambda_2}(u)C_2}{(k-1)(ku-u-kr_1+s_1)^2},$$

где $G(u)=2(ku-u-kr_1+s_1)/(k^2-1)$, $u\le(r_1+s_1)/2$; постоянные C_1, C_2, определены уравнениями (8).

Теперь можно найти форму ударной волны $x_f(t)$ прошедшей в левый газ. Скорость перемещения фронта волны в принятом приближении равна:

$$\frac{dx_f}{dt}=\frac{-a_1+(u-a)}{2}.$$

Учитывая соотношения (11) в волне, получим:

$$2u\frac{dt}{du}+4t+3\frac{dg}{du}=0.$$

Интегрируя это уравнение с учетом начальных условий $t=\tau$ при $u=(r_1+s_1)/2$, найдем

$$t=\frac{3}{8}\left(\frac{(k+1)^2(k\lambda_1+k-\lambda_1+1)G^{\lambda_1}}{(\lambda_1-1)(k-1)^2(ku-u-kr_1+s_1)u^2}-\frac{(k+1)^2(k\lambda_1+k-\lambda_1+1)G^{\lambda_1}}{(k-1)(ku-u-kr_1+s_1)^2u}\right)C_1+$$

$$+\frac{3}{8}\left(\frac{(k+1)^2(k\lambda_2+k-\lambda_2+1)G^{\lambda_2}}{(\lambda_2-1)(k-1)^2(ku-u-kr_1+s_1)u^2}-\frac{(k+1)^2(k\lambda_2+k-\lambda_2+1)G^{\lambda_2}}{(k-1)(ku-u-kr_1+s_1)^2u}\right)C_2+$$

$$+\frac{Const}{u^2},\ Const=\frac{1}{4}\tau\left(k^3r_1^2+k^3s_1^2+2k^3s_1r_0+6k^2r_1s_1-k^2r_1^2+k^2s_1^2+4k^2r_1r_0+\right.$$

$$\left.+2k^2s_1r_0-8ks_1^2-6ks_1r_0+2kr_1s_1-2s_1^2-2s_1r_0\right)/\left(k^3+3k^2-3k-1\right) \tag{14}$$

Положение x_f ударной волны найдем из (11):

$$x_f=(u-a)t+g(u)=\left(\frac{4}{3}u-a_1\right)t+g(u). \tag{15}$$

Уравнения (13)–(15) определяют форму ударной волны x_f от t в параметрическом виде, где параметр u теперь скорость газа за скачком уплотнения. Полученное решение, конечно же, ограничено во времени.

2. Отклонение детонационной волны от режима Чепмена-Жуге.

Пусть контактный разрыв отделяет две горючие смеси газов, уравнения детонационных адиабат которых различны. После распада первоначальной волны Чепмена-Жуге в левый газ пройдет пересжатая или недосжатая детонационная волна. Рассмотрим переходный режим, когда сильная волна ослабевает и стремится к новой волне Чепмена-Жуге с незначительно отличающейся интенсивностью. В этом случае все течение за детонационным скачком представляет собой с необходимой точностью простую волну Римана [6]. Теперь вместо (11) имеем

$$u+\frac{2a}{\gamma-1}=u_J+\frac{2a_J}{\gamma-1},\ x-(u-a)t=g(u), \tag{16}$$

где u_J, a_J — значение скорости газа и скорости звука за новой волной Чепмена-Жуге. Для простого аналитического описания вновь примем, что оба газа позади детонационной волны являются идеальными с показателями адиабаты $\gamma = 5/3$. Тогда коэффициент отражения падающей волны от контактной поверхности будет равен:

$$k = \frac{r_J^- - s_1}{r_J^- - r_1}, \text{ где } r_J^- = u_J + \frac{2a_J}{\gamma - 1} = u_J + 3a_J. \qquad (17)$$

Функция $g(u)$ определяемая равенством (13) описывает теперь движение газа за пережатой детонационной волной, асимптотически выходящей на режим Чепмена–Жуге по закону [7]:

$$D_J\left(t - \tau^*\right) = x_f\left(1 + \frac{h^2\varepsilon_0}{2x_f^2} + \cdots\right),$$

где $\varepsilon = 1 - a_J^2\left(dt / dx_f\right)^2$, $\varepsilon_0 = \varepsilon(x = -h)$; который представляет собой приближенное, при больших t, решение уравнения:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_f = \frac{a_J}{\gamma + 1}\frac{1}{\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dx_f}.$$

В этих уравнениях x_f — положение фронта детонационной волны, D_J — скорость перемещения фронта волны соответствующая новой точке Чепмена-Жуге. Если контактный разрыв достаточно удален от начала возникновения детонации, то можем положить:

$$D_J\left(t - \tau^*\right) = x_f\left(1 + \frac{h^2\varepsilon_0}{2x_f^2}\right), \text{ при } x_f \geq -h (18)$$

где $\tau^* = \tau\left(1 - \left(1 + \varepsilon_0 / 2\right)D_J / D_{J0}\right)$, D_{J0} — скорость исходной волны Чепмена-Жуге, — по-прежнему момент распада волны $(\tau = -h/D_{J0})$.

Выразим, в заключение, все значения переменных Римана входящие в решение (13), (16)–(18) через параметры детонационной волны Чепмена-Жуге. Так для сильной волны, имеем:

$$r_0 = -s_0 = \frac{2a_0}{\gamma - 1} = 3a_0 = \frac{3}{2}\left|D_{J0}\right|, \; s_1 = -\frac{9}{4}\left|D_{J0}\right|.$$

Рассчитав распад разрыва, найдем:

$$r_1 = \frac{12m\left|D_J\right| - 9(1 - m)\left|D_{J0}\right|}{4(1 + m)},$$

$$\varepsilon_0 \approx \frac{D_J^2 - a_1^2}{D_J^2 + a_1^2}\left[\frac{u(h,\tau)}{u_J} - 1\right]^2 = \frac{D_J^2 - a_1^2}{D_J^2 + a_1^2}\left[\frac{6D_{J0} - (5 + m)D_J}{(1 + m)D_J}\right]^2,$$

где $m = \left(\dfrac{P_J}{P_{J0}}\right)^{1/5}\dfrac{a_{J0}}{a_J} = \left(\dfrac{5D_{J0}^2 + 3a_1^2}{5D_J^2 + 3a_1^2}\right)^{4/5}\dfrac{D_J}{D_{J0}},$

P — давление, a_1 — скорость звука в невозмущенном газе.

Таким образом, в работе определена начальная стадия затухания слабой ударной волны, вызванной детонацией. Параметры газа на скачке уплотнения представляют собой сложные степенные функции времени. Требование невысокой интенсивности прошедшей в газ волны, равносильно условию изэнтропичности течения. Так как ударная адиабата близка к адиабате Пуассона, то приведенные соотношения удовлетворительно описывает реальную картину течения. Построено решение уравнений движения в области, занятой сгоревшим газом. Показана применимость полученного решения для описания течения газа за пережатой детонационной волной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ждан С. А., Митрофанов В. В. Простая модель для расчета энергии инициирования гетерогенной и газовой детонации // ФГВ. 1985. Т. 21. № 6. С. 98–103.
2. Левин В. А., Туник Ю. В. Инициирование детонационного горения угольной пыли в метановоздушной смеси // ФГВ. 1987. Т. 23. № 1. С. 3–8.
3. Кутушев А. Г., Пичугин О. Н. Численное исследование процесса прерывания распространения детонационных волн в газовзвесях унитарного топлива слоем инертных частиц // ФГВ. 1993. Т. 29. № 2. С. 90–98.
4. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987.
5. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их применение к газовой динамике. М.: Наука, 1978.
6. Левин В. А., Черный Г. Г. Асимптотические законы поведения детонационных волн // ПММ. 1967. Т. 31. Выпуск 3. С. 393–405.

Татьяна Владимировна МАЛЬЦЕВА —
заведующая кафедрой математики и информатики,
кандидат физико-математических наук, доцент

Введение функционала для решения обобщенной системы уравнений Ляме

УДК 519.6

АННОТАЦИЯ. Рассмотренные в статье уравнения отличаются от уравнений Ляме теории упругости коэффициентами при старших производных и дополнительным слагаемым, младшей производной, в каждом уравнении. Для обобщенного дифференциального оператора Ляме вводится энергетическое произведение, на его основе строится квадратичный функционал. Показывается, что постановка задачи о минимуме квадратичного функционала равносильна решению системы обобщенных уравнений Ляме с помощью известных вариационных методов.

Equations considered in the article differ from Lyme's equations of the elasticity theory by coefficients under senior derivative and additional summand, junior derivative in each equation. For Lyme's generalized differential operator energy product is entered, on its base square-law functional is built. The statement of the problem about minimum square-law functional is equal to decision of the Lyme's generalized equations system with help of the know variational methods.

1. **Случай однородных граничных условий**. При математическом моделировании [1] статического напряженно-деформированного состояния двухфазного тела, например, водонасыщенного грунта после окончания процесса консолидации или твердого биоматериала (кости), получены дифференциальные уравнения второго порядка с положительными постоянными коэффициентами G, λ, a_i, b_i (i=1,2,3):

$$-\left((G+\lambda)\frac{\partial\theta}{\partial x_1}+G\Delta u_1+a_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+b_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)=X_1,$$

$$-\left((G+\lambda)\frac{\partial\theta}{\partial x_2}+G\Delta u_2+a_2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2}+b_2\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)=X_2, \qquad (1)$$