

ЛИТЕРАТУРА

1. Ждан С. А., Митрофанов В. В. Простая модель для расчета энергии инициирования гетерогенной и газовой детонации // ФГВ. 1985. Т. 21. № 6. С. 98–103.
2. Левин В. А., Туник Ю. В. Инициирование детонационного горения угольной пыли в метановоздушной смеси // ФГВ. 1987. Т. 23. № 1. С. 3–8.
3. Кутушев А. Г., Пичугин О. Н. Численное исследование процесса прерывания распространения детонационных волн в газозвесах унитарного топлива слоем инертных частиц // ФГВ. 1993. Т. 29. № 2. С. 90–98.
4. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987.
5. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их применение к газовой динамике. М.: Наука, 1978.
6. Левин В. А., Черный Г. Г. Асимптотические законы поведения детонационных волн // ПММ. 1967. Т. 31. Выпуск 3. С. 393–405.

Татьяна Владимировна МАЛЬЦЕВА —
заведующая кафедрой математики и информатики,
кандидат физико-математических наук, доцент

Введение функционала для решения обобщенной системы уравнений Ляме

УДК 519.6

АННОТАЦИЯ. Рассмотренные в статье уравнения отличаются от уравнений Ляме теории упругости коэффициентами при старших производных и дополнительным слагаемым, младшей производной, в каждом уравнении. Для обобщенного дифференциального оператора Ляме вводится энергетическое произведение, на его основе строится квадратичный функционал. Показывается, что постановка задачи о минимуме квадратичного функционала равносильна решению системы обобщенных уравнений Ляме с помощью известных вариационных методов.

Equations considered in the article differ from Lame's equations of the elasticity theory by coefficients under senior derivative and additional summand, junior derivative in each equation. For Lame's generalized differential operator energy product is entered, on its base square-law functional is built. The statement of the problem about minimum square-law functional is equal to decision of the Lame's generalized equations system with help of the know variational methods.

1. **Случай однородных граничных условий.** При математическом моделировании [1] статического напряженно-деформированного состояния двухфазного тела, например, водонасыщенного грунта после окончания процесса консолидации или твердого биоматериала (кости), получены дифференциальные уравнения второго порядка с положительными постоянными коэффициентами G, λ, a_i, b_i ($i=1,2,3$):

$$\begin{aligned} -((G + \lambda) \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + G \Delta u_1 + a_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + b_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1}) &= X_1, \\ -((G + \lambda) \frac{\partial \theta}{\partial x_2} + G \Delta u_2 + a_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + b_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2}) &= X_2, \end{aligned} \quad (1)$$

$$-(G + \lambda) \frac{\partial \theta}{\partial x_3} + G \Delta u_3 + a_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + b_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = X_3, \quad \theta = \operatorname{div} u,$$

которые можно записать в виде векторного уравнения

$$D u = K, \quad D = -(A + B + C), \quad u = (u_1, u_2, u_3), \quad K = (X_1, X_2, X_3).$$

От известных уравнений Ляме теории упругости уравнения (1) отличаются двумя дополнительными слагаемыми в каждом уравнении. Краевые условия, соответствующие этим уравнениям будем считать однородными:

$$u|_{S_1} = 0, \quad \tilde{t}^{(v)}|_{S_2} = 0, \quad (2)$$

$\tilde{t}^{(v)}$ – вектор напряжений, действующих на поверхность тела. Кинематическое граничное условие называется главным, статическое – естественным.

Введем три дифференциальных вектора-оператора: а) дифференциальный вектор-оператор теории упругости или оператор Ляме

$$A = (G + \lambda) \operatorname{grad} \operatorname{div} + G \Delta;$$

б) дифференциальный вектор-оператор второго порядка

$$B \left(a_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \quad a_2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad a_3 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right),$$

который описывает изменение коэффициентов при старших производных по сравнению с оператором Ляме;

в) дифференциальный вектор-оператор первого порядка

$$C \left(b_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad b_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad b_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right).$$

Отрицательный оператор Ляме симметричен при однородных граничных условиях и положительно определен в пространстве $L_2(V)$ векторных функций, суммируемых с квадратом в области V [2]:

$$(A u, u) \geq C^2 \|u\|^2, \quad (3)$$

где постоянная C зависит не только от механических постоянных, но и от области V , назначить C можно как в монографии [7].

Запишем скалярное произведение для отрицательного оператора B с применением формулы интегрирования по частям:

$$\int_V u \frac{\partial v}{\partial x_i} dV = - \int_V v \frac{\partial u}{\partial x_i} dV + \int_S u v \cos(v, x_i) dS,$$

$$(-B u, u) = - \int_V \sum_{i=1}^3 a_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} u_i dV = \int_V \sum_{i=1}^3 a_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 dV - \int_S \sum_{i=1}^3 a_i u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \cos(v, x_i) dS$$

Учитывая нулевые граничные условия, имеем

$$(-B u, u) = \int_V \sum_{i=1}^3 a_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 dV.$$

Рассмотрим неравенство Фридрикса, справедливое для непрерывно дифференцируемой и равной нулю на S функции u , [7]:

$$\|u\|^2 \leq k_1 \int_V \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)^2 \right] dV.$$

Не сложно показать выполнение неравенства

$$\int_V \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 dV \geq \frac{1}{c_1} \|u_1\|^2. \quad (4)$$

Заклучим область V внутри некоторого параллелепипеда V_1 . Оси координат направим по его трем сторонам, обозначенным через d, g, h . Продолжим $u_1(x_1, x_2, x_3)$ на параллелепипед, полагая ее равной нулю вне области V , при таком продолжении она будет непрерывной в V_1 и ее можно представить

$$u_1(x_1, x_2, x_3) = \int_0^{x_1} \frac{\partial u_1(\xi, x_2, x_3)}{\partial \xi} d\xi.$$

Отсюда, по неравенству Буняковского,

$$\begin{aligned} |u_1(x_1, x_2, x_3)|^2 &= \left| \int_0^{x_1} \frac{\partial u_1(\xi, x_2, x_3)}{\partial \xi} d\xi \right|^2 \leq \int_0^{x_1} d\xi \cdot \int_0^{x_1} \left| \frac{\partial u_1(\xi, x_2, x_3)}{\partial \xi} \right|^2 d\xi = \\ &= x_1 \int_0^{x_1} \left| \frac{\partial u_1(\xi, x_2, x_3)}{\partial \xi} \right|^2 d\xi \leq x_1 \int_0^d \left| \frac{\partial u_1(\xi, x_2, x_3)}{\partial \xi} \right|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Последнее неравенство проинтегрируем по x_1, x_2, x_3 в пределах $0 < x_1 < d, 0 < x_2 < g, 0 < x_3 < h$:

$$\begin{aligned} \int_{V_1} |u_1(x_1, x_2, x_3)|^2 dx_1 dx_2 dx_3 &\leq \\ &\leq \int_0^d x_1 dx_1 \int_0^g dx_2 \int_0^h dx_3 \int_0^d \left| \frac{\partial u_1(\xi, x_2, x_3)}{\partial \xi} \right|^2 d\xi = \frac{d^2}{2} \int_V \left| \frac{\partial u_1(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} \right|^2 dV. \end{aligned}$$

и получим неравенство (4), в котором $c_1 = d^2/2$.

Аналогичные неравенства выполняются для функций u_2, u_3 при $c_2 = g^2/2, c_3 = h^2/2$. Тогда

$$(-Bu, u) \geq \frac{a_1}{c_1} \|u_1\|^2 + \frac{a_2}{c_2} \|u_2\|^2 + \frac{a_3}{c_3} \|u_3\|^2 \geq \lambda^2 \|u\|_{L_2}^2, \quad \lambda^2 = \min \left(\frac{a_1}{c_1}, \frac{a_2}{c_2}, \frac{a_3}{c_3} \right). \quad (5)$$

Отрицательный оператор B также симметричен и положительно определен при рассматриваемых условиях.

Для оператора $(-C)$ скалярное произведение после применения формулы интегрирования по частям имеет вид:

$$(-Cu, v) = - \int_V \sum_{i=1}^3 b_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} v_i dV = \int_V \sum_{i=1}^3 b_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i} u_i dV - \int_S \sum_{i=1}^3 b_i u_i v_i \cos(v, x_i) dS.$$

Покажем, что оператор $(-C)$ не симметричен:

$$\begin{aligned} (-Cu, v) - (u, -Cv) &= \int_V \left(- \sum_{i=1}^3 b_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} v_i + \sum_{i=1}^3 b_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i} u_i \right) dV = \\ &= 2 \int_V \sum_{i=1}^3 b_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i} u_i dV - \int_S \sum_{i=1}^3 b_i u_i v_i \cos(v, x_i) dS \end{aligned}$$

Положим $v = u$, запишем произведение

$$(-Cu, u) = -\int_V \sum_{i=1}^3 b_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} u_i dV = \int_V \sum_{i=1}^3 b_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} u_i dV - \int_S b u^2 \cos(\nu, x) dS$$

или

$$(-Cu, u) = -\frac{1}{2} \int_S b u^2 \cos(\nu, x) dS,$$

которое равно нулю при однородных главных граничных условиях и его вклад в энергетическое произведение оператора D отсутствует. Тогда, учитывая положительную определенность отрицательных операторов A и B , имеем

$$(Du, u) \geq \gamma \|u\|^2,$$

где из формул (3) и (5) $\gamma^2 = C^2 + \lambda^2$.

Положительная определенность оператора D при однородных главных краевых условиях позволяет использовать основные результаты из [2].

2. Случай неоднородных граничных условий. Установим связь энергетического произведения (Du, u) с потенциальной энергией двухфазного тела. В статье [3] было получено выражение для удельной потенциальной энергии

$$W = W^I + W^{II} + W^{III},$$

$$W^I = \frac{1}{2} c (\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2) + \lambda (\epsilon_1 \epsilon_2 + \epsilon_2 \epsilon_3 + \epsilon_3 \epsilon_1) + \frac{1}{4} (c - \lambda) (\epsilon_{12}^2 + \epsilon_{23}^2 + \epsilon_{31}^2),$$

$$W^{II} = \frac{1}{2} (a_1 \epsilon_1^2 + a_2 \epsilon_2^2 + a_3 \epsilon_3^2), \quad W^{III} = -b_1 \epsilon_1 u_1 - b_2 \epsilon_2 u_2 - b_3 \epsilon_3 u_3,$$

где $c = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, λ — постоянные величины, характеризующие механические свойства среды, ϵ_i , ϵ_{ij} — относительные линейные и угловые деформации соответственно. Слагаемые W^{II} и W^{III} описывают удельную потенциальную энергию, накопленную жидкой фазой, причем W^{II} является частным случаем от слагаемого W^I , которое отвечает удельной потенциальной энергии упругого тела.

Запишем энергетическое произведение (Du, u) для дифференциального оператора D . Первое слагаемое в энергетическом произведении, имеет вид [2]:

$$(-Au, u) = -\int_V Au \cdot u dV = 2 \int_V W^I dV - \int_S u \cdot t^{(\nu)} dS,$$

$$t^{(\nu)} = \sum_{i,k=1}^3 \sigma_{ik} \cos(\nu, x_k) e_i, \quad e(e_1, e_2, e_3),$$

в котором объемный интеграл совпадает с первым слагаемым W^I из удельной потенциальной энергии, ν — внешняя нормаль к S . Это слагаемое описывает потенциальную энергию и работу поверхностных сил $t^{(\nu)}$ в упругом теле.

Для отрицательного оператора B имеем с учетом преобразований:

$$\begin{aligned} (-Bu, u) &= -\int_V Bu \cdot u dV = -\int_V \left(a_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} u_1 + a_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} u_2 + a_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} u_3 \right) dV = \\ &= 2 \int_V W^{II} dV - \sum_{i=1}^3 a_i \int_S \left(u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \cos(\nu, x_i) \right) dS, \end{aligned}$$

что является частным случаем от энергетического произведения $(-Au, u)$. Объединим два поверхностных интеграла

$$\int_S \mathbf{u} \mathbf{t}^{(v)} dS + \sum_{i=1}^3 a_i \int_S \left(u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \cos(\mathbf{v}, \mathbf{x}_i) \right) dS = \int_S \mathbf{u} \cdot \tilde{\mathbf{t}}^{(v)} dS,$$

$$\tilde{\mathbf{t}}^{(v)} = \sum_{i,k=1}^3 \left(\sigma_{ik} + a_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) \cos(\mathbf{v}, \mathbf{x}_k) \mathbf{e}_i = \sum_{i,k=1, k \neq i}^3 ((2G + a_i) \epsilon_i + \lambda \epsilon_{ik} + \sigma_{ik}) \cos(\mathbf{v}, \mathbf{x}_k) \mathbf{e}_i.$$

В результате для обобщенного оператора Ляме статическое краевое условие отличается от аналогичного условия в теории упругости для оператора Ляме.

Для последнего отрицательного оператора C получаем:

$$\begin{aligned} (-C\mathbf{u}, \mathbf{u}) &= -\int_V C\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} dV = -\int_V \left(b_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} u_1 + b_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} u_2 + b_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} u_3 \right) dV = \int_V W''' dV = \\ &= -\frac{1}{2} \int_S [b_1 u_1^2 \cos(\mathbf{v}, \mathbf{x}_1) + b_2 u_2^2 \cos(\mathbf{v}, \mathbf{x}_2) + b_3 u_3^2 \cos(\mathbf{v}, \mathbf{x}_3)] dS. \end{aligned} \quad (6)$$

В задачах механики, связанных с расчетом полупространства, нижняя граница S_1 считается жестко закрепленной и имеет вид полуцилиндра для плоской и полушеры - для пространственной задач, на дневной S_2 плоскости $\cos(\mathbf{v}, \mathbf{x}_1) = 0$, $\cos(\mathbf{v}, \mathbf{x}_2) = 0$, $\cos(\mathbf{v}, \mathbf{x}_3) = -1$, интеграл в (6) положителен.

3. **Введение функционала.** В [2] рассматривается линейный дифференциальный оператор L порядка $2k$ (более общий по сравнению с A) при неоднородных граничных условиях

$$\mathbf{G}_l \mathbf{u} \big|_S = g_l, \dots, \mathbf{G}_r \mathbf{u} \big|_S = g_r, \quad (7)$$

где $\mathbf{G}_p, \dots, \mathbf{G}_r$ - линейные операторы, g_p, \dots, g_r - заданные вектор-функции, определенные на замкнутой поверхности $S = S_1 + \dots + S_r$. Главными краевыми условиями являются те, которые содержат производные от \mathbf{u} только до порядка $(k-1)$.

Вводится вектор-функция ψ , удовлетворяющая неоднородным краевым условиям

$$\mathbf{G}_l \psi \big|_S = g_l, \dots, \mathbf{G}_r \psi \big|_S = g_r.$$

Полагается $\mathbf{u} - \psi = \mathbf{v}$. Новая неизвестная вектор-функция \mathbf{v} удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$L\mathbf{v} = \mathbf{f}_l, \quad \mathbf{f}_l = \mathbf{f} - L\psi$$

и однородным краевым условиям

$$\mathbf{G}_l \mathbf{v} \big|_S = 0, \dots, \mathbf{G}_r \mathbf{v} \big|_S = 0. \quad (8)$$

Предполагается, что оператор L является положительным на множестве функций, удовлетворяющих однородным условиям (8). По теореме о минимальном функционале [4], решение системы дифференциальных уравнений $L\mathbf{u} = \mathbf{f}_l$ при однородных краевых условиях равносильно отысканию функции, реализующей на том же множестве минимум функционала

$$F(\mathbf{v}) = (L\mathbf{v}, \mathbf{v}) - 2(\mathbf{v}, \mathbf{f}_l). \quad (9)$$

Поставим задачу об интегрировании уравнений (1) при граничных условиях

$$\mathbf{u} \big|_{S_1} = 0, \quad \tilde{\mathbf{t}}^{(v)} \big|_{S_2} = \mathbf{q}(x_1, x_2). \quad (10)$$

Оператор D является положительно определенным при однородных краевых условиях, применим к нему методику построения функционала, введенного для оператора L .

Сейчас функция ψ удовлетворяет неоднородным условиям (10). Тензор напряжений, отвечающий функции ψ , может быть построен по правилу, описанному в [5]. Это правило усовершенствовано в монографии [6].

Заменим \mathbf{v} через $\mathbf{u} - \psi$ и \mathbf{f}_l через $\mathbf{K} - D\psi$ в формуле (9):

$$F(v) = (Du - D\psi, u - \psi) - 2(u - \psi, K - D\psi) = \\ = (Du, u) - 2(u, K) + (u, D\psi) - (Du, \psi) + 2(\psi, K) - (\psi, D\psi)$$

Опустим числа $2(\psi, K) - (\psi, D\psi)$ и запишем окончательное выражение для объемного интеграла

$$\int_V (u \cdot D\psi - \psi \cdot Du) dV = -2 \int_V \sum_{i=1}^3 b_i u_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} dV + \\ + \int_S (\psi \cdot \tilde{t}^{(v)}(u) - u \cdot \tilde{t}^{(v)}(\psi) + bu \cdot \psi \cos(v, x)) dS \quad (11)$$

Объемный интеграл в правой части можно представить в виде скалярного произведения $(-2(u, C\psi))$ и отнести дополнительным слагаемым в правую часть дифференциального уравнения (1). В силу условий (10), которым удовлетворяет функция u , преобразуем поверхностный интеграл к виду

$$\int_S (N(u) + M) dS,$$

где $N(u)$ зависит от u и от функции q , входящей в граничные условия (10), а M не зависит от u , но зависит от ψ , получаем

$$\int_S N(u) dS = \int_{S_2} (-q \cdot u + bu \cdot \psi \cos(v, x)) dS, \quad \int_S M dS = \int_S \psi \cdot q dS.$$

Исключим из рассмотрения M , так как оно не зависит от u . Функционал, основанный на энергетическом произведении, в случае неоднородных краевых условий имеет вид:

$$\Phi(u) = (Du, u) - 2 \int_V u \cdot f dV + \int_S N(u) dS = 2 \int_V (W'(u) + W''(u) - u \cdot f) dV - \\ - 2 \int_{S_2} u \cdot q dS + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 b_i \int_{S_2} \psi_i u_i \cos(v, x_i) dS, \quad f = K + C\psi \quad (12)$$

По теореме о минимальном функционале вместо решения системы уравнений (1) можно находить минимум этого функционала. В теории упругости однофазного тела в общем случае смешанной задачи используется функционал

$$F(u) = 2 \int_V (W'(u) - u \cdot K) dV - \int_S u \cdot t^{(v)} dS, \quad (13)$$

следовательно, дополнительными слагаемыми в (12) двухфазное тело отличается от однофазного. Эти слагаемые являются основным результатом статьи.

Таким образом, вариационные методы математической физики: метод Ритца, метод Куранта, метод Канторовича-Власова и др., применимы к отысканию минимума функционала (12) и соответственно к решению системы обобщенных уравнений Ляме с неоднородными смешанными граничными условиями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мальцев Л. Е., Бай В. Ф., Мальцева Т. В. Кинематическая модель грунта и биоматериалов. СПб.: Стройиздат, 2002. 320 с.
2. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М., 1957. 476 с.
3. Мальцева Т. В. Удельная потенциальная энергия двухфазного тела // Материалы Международного совещания зав. кафедрами Механики грунтов, Инженерной геологии, Оснований и фундаментов и Подземного строительства М.: МГАСУ, 2003. С. 89-94.

4. Михлин С. Г. Проблема минимума квадратичного функционала. М.: Изд-во технико-теоретической литературы, 1952. 216 с.
5. Филоненко-Бородич М. М. Теория упругости. М.: Физматгиз, 1959. 364 с.
6. Ионов В. Н., Огибалов П. М. Прочность пространственных элементов конструкций. М.: Высш. шк., 1972. 751 с.
7. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике / Пер. с англ. М.: Мир, 1985. 590 с.

Игорь Николаевич ГЛУХИХ —

*проректор по информационным технологиям ТюмГУ,
доктор технических наук, доцент*

Валентина Афанасьевна МАРЕНКО —

соискатель

Оптимизация набора элементов сложной системы

при конструировании антенных комплексов

УДК 007:681.3.06

АННОТАЦИЯ. Предложен способ многокритериального отбора элементов приемопередающих антенных комплексов на основе построения и анализа орграфов предпочтений.

The authors consider the problem of aerial complexes construction and suggest the method of multicriteria decision based upon graphs of preferences.

На ранних этапах развития радиоэлектроники обеспечение совместной работы радиосредств решалось в основном путем совершенствования отдельных схемных решений и планирования распределения радиочастот, используемых каждым радиосредством. В настоящее время принятия отдельных частных мер уже не достаточно. Проблема в целом имеет ярко выраженный системный характер.

При создании любого радиоэлектронного средства вопросы обеспечения их электромагнитной совместимости должны приниматься во внимание на возможно ранних стадиях. По мере завершения разработки радиоэлектронного средства набор доступных средств борьбы с нежелательными электромагнитными излучениями уменьшается, а их стоимость возрастает. По зарубежным данным своевременно принятые меры при проектировании радиоэлектронного средства позволяют избежать значительного количества потенциально возможных трудностей, связанных с влиянием непреднамеренных помех. Решения, принятые на поздних этапах, оказываются более сложными, требуют дополнительных затрат труда и средств, увеличивают время разработки изделий, приводят к их удорожанию и ухудшению характеристик, в том числе по массе и габаритам [1].

Как область знаний электромагнитная совместимость радиоэлектронных средств слишком обширна, поэтому для примера выбрана одна из характерных и практически важных задач — предварительная оценка электромагнитной совместимости приемопередающего антенного комплекса, размещенного на ограниченной площади [2].

Важнейшим вопросом, возникающим при проектировании антенного центра как сложной системы, является вопрос структурного построения, определяющий отношения между его подсистемами и характеристиками функционирования. Структура антенного центра отражает его внутреннюю организацию, распределе-