ным и отрицательным сдвигами энергии примерно равнозначен и в этом случае говорить о доминировании притяжения не приходится.

Таким образом, можно подтвердить вывод о качественной согласованности высокотемпературного разложения и разложения при T=0 в теории сверхпроводимости электрон-бозонных систем. Вполне возможно, что эффективное притяжение электронов в электрон-бозонных системах является таким же неотъемлемым свойством, как и эффективное отталкивание (притяжение) в чистых фермионных (бозонных) системах невзаимодействующих тождественных частиц [5]. Данный эффект притяжения имеет место лишь для низких температур и исчезает при высоких температурах, что, возможно, указывает на альтернативный тепловому механизм разрушения сверхпроводимости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kohn W., Luttinger J. M. Phys. Rev. 1960. Т. 118. № 41.
2. Давыдов А. С. Квантовая механика. М., 1963.
3. Аринштейн Э. А., Аринштейн К. Э., Вершинин В. Е. Высокотемпературное разложение в термодинамике системы с электрон-бозонным взаимодействием // Известия вузов. Физика. Т. 46. № 4. 2003. С. 39–44.
4. Аринштейн Э. А. Теория возмущений для матрицы плотности и термодинамического потенциала квантовой системы // ТМФ. Т. 130. № 1. 2002. С. 54–63.
5. Хуанг К. Статистическая механика. М., 1966.

Алексей Викторович ТАТОСОВ —
доцент кафедры математического моделирования,
кандидат физико-математических наук

Схема расчета нестационарных течений газа в магистральном трубопроводе

УДК 621.648

АННОТАЦИЯ. Рассмотрена численная схема расчета нестационарных течений газа в магистральном трубопроводе. Предложены дополнительные расчетные формулы определения коэффициента сопротивления, а также моделирование движения газа в местах ветвления трубопровода.

The modeling scheme of nonstationary gas motion in branchy pipeline is consid-ered. A new calculating formulae to define resistance coefficient, as well as modeling of gas motion in the pipeline branching are offered.

Введение. В связи с быстрым развитием и совершенствованием вычислительной техники, многих авторов привлекает возможность численного моделирования реальных процессов нефтегазового промысла. В работе рассматриваются нестационарные течения газа в системе магистрального трубопровода. По разным причинам система трубопровода постоянно находится в нестабильном режиме работы. Это в свою очередь приводит к волновому характеру течения газа по сети. Такое течение сопровождается распространением волн сжатия и разряжения, взаимодействием их друг с другом, отражением от граничных точек и точек ветвления магистрали.

Ввиду того что, современные пневматические системы состоят из множества различных элементов и имеют значительную протяженность, исследование нестационарных течений газа в них затруднено экспериментально. Математическое моделирование подобных процессов является основным способом решения задач магистрального транспорта газа.

Нестационарные течения газа в системе магистрального трубопровода описываются системой дифференциальных уравнений в частных производных, вообще говоря, нелинейной. Одним из привлекательных направлений исследования, является применение аналитических методов (см., например, [1]). Они основаны, как правило, на упрощении исходных уравнений, состоящем в их линеаризации. Решение же линейных уравнений, хорошо изучено. Веский аргумент в пользу аналитических расчетов нестационарных течений газа состоит в том, что с помощью одной формулы можно получить решение в любой заданной точке и не строить его во всей области течения. Однако сами решения не удается получить а конечной форме. Решение задачи строится в виде рядов, которые при сложных граничных условиях, очевидно, плохо сходятся.

Однако громоздкость аналитического решения не является сильным аргументом в пользу численных методов. Недостаток указанного подхода в другом – в не строгой линеаризации, основанной на внешнем качественном сходстве. Линеаризация используется не только для упрощения исходных уравнений движения газа, но и при моделировании других физических процессов, что не всегда оправдано. Так, например, при анализе работы системы автоматической защиты, регулирования и сглаживания волн повышенного давления, невозможно заранее задать время и скорость сброса газа. Это означает, что модель такого важного процесса описывается, аналитически, нелинейными уравнениями. Другим примером, является обычный разветвленный трубопровод. Здесь сложность «сшивания» рядов в точках ветвления сети оставляет численный эксперимент без альтернативы. С другой стороны, возможность визуального наблюдения изменяющихся полей давлений и расходов газа в сложной системе магистрального трубопровода, делает процесс исследования наглядным и интересным.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ГАЗА ПО ТРУБОПРОВОДУ

Основные уравнения и допущения. Для расчета течения газа в магистрали, уравнения неразрывности и импульса одномерного движения

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x}=-\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\zeta\rho}{r}|u|u \tag{1.1}$$

запишем в приближении Чарного [2]. Воспользовавшись для удобства уравнением состояния газа $p=(\rho/\mu)RT$ в виде $p=c^2\rho$, где $c=\sqrt{RT/\mu}$, R — газовая постоянная, имеем

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=\frac{\partial(p/c^2)}{\partial t}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial t}-\frac{2p}{c^3}\frac{\partial c}{\partial t}\approx\frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial t}.$$

Последнее приближенное равенство переходит в строгое при движении газа в стационарном поле температуры, в частности, для изотермического течения. В дальнейшем, будем считать температуру газа постоянной на протяжении всего участка трубопровода.

Обозначая, далее, $q=\rho u$ и пренебрегая нелинейным слагаемым в левой части уравнения движения, получим

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial q}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial q}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\zeta c^2}{r}\frac{|q|q}{p} \tag{1.2}$$

В этих уравнениях p, ρ, u соответственно давление, плотность и скорость газа; q — плотность потока вещества; r — радиус трубы (или гидравлический радиус сечения); c — изотермическая скорость звука; ζ — безразмерный коэффициент сопротивления. Если рассматривается широкий диапазон изменения параметров потока, то ζ следует считать зависящим от числа Рейнольдса.

Уравнения движения в безразмерных переменных. Для удобства численного интегрирования введем безразмерные переменные

$$\bar{p}=\frac{p}{p_0},\ \bar{x}=\frac{x}{L},\ \bar{t}=\frac{ct}{L},\ \bar{q}=\frac{cq}{p_0} \qquad (1.3)$$

где p_0 — атмосферное давление; L — длина отдельного участка трубопровода. В новых переменных система уравнений (1.1) примет вид

$$\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{t}}+\frac{\partial\bar{q}}{\partial\bar{x}}=0,\quad \frac{\partial\bar{q}}{\partial\bar{t}}=-\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{x}}-\lambda\frac{|\bar{q}|\bar{q}}{\bar{p}} \qquad (1.4)$$

При стационарном течении газа из (1.4) имеем

$$\frac{d\bar{q}}{d\bar{x}}=0,\quad \frac{d\bar{p}}{d\bar{x}}=-\lambda\frac{|\bar{q}|\bar{q}}{\bar{p}}. \qquad (1.5)$$

Из первого уравнения следует, как и должно быть, постоянство плотности потока газа $\bar{q}=const.$. Второе уравнение при сделанных предположениях также легко интегрируются и дает закон изменения давления по длине трубы:

$$\bar{p}_1^2-\bar{p}_2^2=2\lambda\bar{L}|\bar{q}|\bar{q}=2\lambda|\bar{q}|\bar{q}. \qquad (1.6)$$

На практике принято измерять давление P в атм., а коммерческий расход Q в млн. м^3/сутки при нормальных условиях. Численные значения P и $\bar{p}$ совпадают, т.к. измеряются в одних и тех же единицах. Выделим далее в уравнении (1.6) коммерческий расход. Для этого запишем вначале

$$q=\rho u=\rho_0u_0=\frac{p_0}{c_0^2}u_0=\frac{p_0}{c_0^2S}u_0S=\frac{p_0}{c_0^2S}\frac{dV}{dt}=\frac{p_0}{c_0^2S}Q_0,$$

где индексом «о» отмечены значения параметров газа при нормальных условиях. В этих формулах S — площадь сечения трубы; Q_0 — расход газа измеряемый в Cu в м^3/с. Изменим должным образом масштаб измерения расхода. Имеем, 1 млн. м^3 /сутки = k_0 м^3/с; k_0 і 11.57, тогда Q млн. м^3/сутки = k_0Q м3/с = м3/с. Из последнего равенства получаем и, следовательно,

$$q=(k_0c/Sc_0^2)Q. \qquad (1.7)$$

Уравнение (1.6) теперь можно записать в виде

$$P_1^2-P_2^2=\frac{2\lambda k_0^2c^2}{c_0^4S^2}|Q|Q. \qquad (1.8)$$

Сравнивая (1.8) с хорошо известным законом падения давления

$$P_1^2-P_2^2=\Lambda|Q|Q,$$

где Λ — коэффициент сопротивления всей трубы, находим

$$\lambda=\frac{b^2S^2}{2}\Lambda,\ \text{где}\ b=\frac{c_0^2}{k_0c}. \qquad (1.9)$$

С учетом обозначения (1.9) из (1.7) получаем

$$Q=bS\bar{q}. \qquad (1.11)$$

Система уравнений (1.4) совместно с (1.9)–(1.11) и заданными значениями Λ и c полностью определяет нестационарное движение газа в одной ветке магистрали.

2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ГАЗА В МЕСТАХ ВЕТВЛЕНИЯ ТРУБОПРОВОДА

Численные алгоритмы расчета нестационарных течений газа в трубопроводе известны (см., например, [3–7]). Как правило особое внимание уделяется условиям устойчивости разностной схемы. Эти вопросы имеют важнейшее значение [6]. Расчет движения газа в окрестности точки ветвления магистрали создает дополнительные сложности. В данном месте нарушается предположение о квазиодномерности течения. Таким образом, реализация разностной схемы для газопровода сложной структуры требует особого внимания.

Обобщенное уравнение баланса массы. Рассмотрим некоторый внутренний узел магистральной сети, представляющий собой место ветвления трубопровода. С целью упростить рассуждения, вначале исключим все отборы, подкачки и компрессорные станции. Пусть к рассматриваемому узлу примыкает r ребер. Занумеруем ребра по порядку и будем считать их ориентированными от вершины. Тогда на каждом ребре, в приближении Чарного, справедливо уравнение движения

$$\frac{\partial q}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\zeta c^2}{r}\frac{|q|q}{p} \tag{2.1}$$

и выполняется условие баланса массы в узле

$$\sum_{k=1}^{r} q_k S_k = 0 \tag{2.2}$$

Как правило, в самом узле задают общее для всех ребер давление. Данное предположение о равенстве давлений основано на том, что значение динамического напора в магистральном трубопроводе относительно мало

$$\frac{\rho u^2}{p}=\frac{u^2}{c^2}<<1.$$

При движении же жидкости, эта величина весьма существенна в уравнении движения. Именно ее учет составляет содержание известного закона Бернулли. В реальной картине течения газа с до-звуковой скоростью слабые разрывы и ударные волны не могут оставаться неподвижными. Следовательно, в малой окрестности точки ветвления трубопровода заметных перепадов давления быть не может.

Уравнение (2.2) не вызывает сомнений, однако его численная реализация вовсе не очевидна. Во-первых, система (2.1)–(2.2) для численного интегрирования является не очень удобной. На каждом временном слое для каждого узла разветвленной сети приходится решать нелинейную систему уравнений, определяя значения сеточных функций давления в узле и расходов вблизи узла. При малых значениях расходов система становится плохо обусловленной. Во-вторых, уравнение (2.2) призванное обеспечить выполнение фундаментального закона сохранения массы, в действительности его нарушает. Это связано с тем фактом, что при численной реализации значения сеточных функций отражают не локальную, а среднюю характеристику потока на элементарном отрезке хоть и малой, но конечной длины. Соотношение (1.2) оправдано только при бесконечно малом шаге по координате. Разница же расходов в соседних узлах расчетной сетки как раз и обеспечивает изменение плотности и давления газа при нестационарном режиме течения.

Таким образом, уравнения (2.1)-(2.2) справедливы только на дифференциальном уровне. При численной же реализации необходимо разработать специальные разностные схемы. Очевидно следует отказаться от условия баланса расходов в узлах ветвления сети и заменить его на разностный аналог уравнения неразрывности.

Введем следующие обозначения для k-го ребра: q_k — ближайшее к узлу значение сеточной функции удельного массового расхода, равного произведению плотности газа ρ на его скорость u; c_k — изотермическая скорость звука; S_k — площадь поперечного сечения; sg_k — величина, принимающая одно из значений {1; –1}, первое из них соответствует ребру ориентированному от вершины, второе — в обратном случае; Cp_k — скачок давления создаваемый компрессорной станцией (КС), находящейся вблизи узла; H_k, Γ— шаги по координате и реальном времени; ρ_{k-}, p_{k-}— соответственно плотность и давление газа непосредственно перед КС, если газ движется к узлу, или после КС, если газ движется от узла (направление тяги КС совпадает с положительным направлением ребра). Пусть также p, Qm_{out}, Qm_{in} — соответственно давление, массовый отбор и подкачка газа в самом узле.

Будем считать, что значения сеточных функций давления p и удельного расхода q на ребре смещены друг относительно друга на половину шага H. Выделим рассматриваемый узел вместе с некоторой окрестностью. В качестве окрестности на k-м ребре возьмем элементарный участок, равный половине шага $H_k/2$. Тогда на границе выделенного элемента будет задан расход q_k, а в узле значение p. Изменением параметров ρ_{k-}, p_{k-} в пределах одного шага (фактически $H_k/2$) пренебрегаем, рассматривая их как средние значения на элементарном отрезке.

Количество газа в выделенном элементе за 1с уменьшается на величину:

$$S_1 u_1 \rho_1 sg_1 + \ldots + S_r u_r \rho_r sg_r + Qm_{out} - Qm_{in}.$$

Это уменьшение происходит за счет изменения плотности газа:

$$-\left(S_1 \frac{H_1}{2}\frac{\Delta\rho_{1-}}{\Delta t} + \ldots + S_r \frac{H_r}{2}\frac{\Delta\rho_{r-}}{\Delta t}\right).$$

Приравнивая оба выражения, и учитывая, что

$$\rho_{k-} = \frac{1}{c_k^2} p_{k-} = \frac{1}{c_k^2}\left(p + sg_k Cp_k\right),$$

получаем уравнение:

$$-\sum_{k=1}^{r} \frac{S_k H_k}{2c_k^2}\frac{\Delta p}{\Delta t} = \sum_{k=1}^{r} S_k q_k sg_k + \left(Qm_{out} - Qm_{in}\right) + \sum_{k=1}^{r} \frac{S_k H_k sg_k}{2c_k^2}\frac{\Delta Cp_k}{\Delta t}.$$

Пренебрегая, в дальнейшем, зависимостью Cp от времени t, получим следующее обобщенное уравнение баланса массы:

$$-\sum_{k=1}^{r} \frac{S_k H_k}{2c_k^2}\frac{\Delta p}{\Delta t} = \sum_{k=1}^{r} S_k q_k sg_k + \left(Qm_{out} - Qm_{in}\right). \quad (2.3)$$

Пусть в узле нет ветвлений, отборов и подкачек, а течение газа изотермическое. Тогда $r = 2$ и для трубы постоянного диаметра, имеем

$$\sum_{k=1}^{2} \frac{S_k H_k}{2c_k^2} = \frac{S(H_1 + H_2)}{2c^2} = \frac{SH}{c^2},$$

$$\sum_{k=1}^{2} S_k q_k sg_k = S(q_2 - q_1) = S\frac{\Delta q}{\Delta x}H$$

и, следовательно, уравнение (2.3) принимает вид обычного разностного уравнения неразрывности изотермического течения

$$\frac{1}{c^2}\frac{\Delta p}{\Delta t} + \frac{\Delta q}{\Delta x} = 0.$$

В случае же стабилизации потоков (2.3) переходит в выше упомянутое условие баланса массы (2.2).

Разностные уравнения для внутренних узлов магистральной сети.

Заменив в уравнении (2.3) производную по времени разностным аналогом, найдем

$$-\sum_{k=1}^{r} \frac{S_k H_k}{2c_k^2}\frac{p^{j+1} - p^j}{\Gamma} = \sum_{k=1}^{r} S_k q_k^{j+1} sg_k + \left(Qm_{out} - Qm_{in}\right) \quad (2.4)$$

В качестве величины q, в правой части уравнения (2.4), взято значение сеточной функции на новом временном слое, по аналогии со схемой «крест».

В уравнении (2.4) все величины являются размерными и определены в некоторой стандартной системе единиц, например в Cu. Для удобства практических расчетов перейдем к безразмерным переменным (1.7) и коммерческому расходу

$Q = \frac{c_0^2}{k_0 p_0} Qm$, $[Q]$ млн. м^3/сутки.

В новых переменных уравнение (2.4) примет вид

$$-\sum_{k=1}^{r} \frac{c_0}{c_k} \frac{S_k}{2Kr_k} \left(\bar{p}^{\,j+1} - \bar{p}^{\,j}\right) = \sum_{k=1}^{r} \frac{c_0}{c_k} S_k \bar{q}_k^{\,j+1} sg_k + \frac{k_0}{c_0}\left(Q_{out} - Q_{in}\right) \tag{2.5}$$

Здесь введено число Куранта для k-го ребра:

$$Kr_k = \frac{\tau_k}{h_k} = \frac{\Gamma c_k}{H_k}.$$

При общем для всех ребер реальном шаге по времени, шаг на расчетной сетке k-го ребра, свой:

$$\tau_k = Kr_k h_k = \frac{\Gamma c_k}{L_k}.$$

Учитывая, что относительные изменения абсолютной температуры газа, и тем более скорости c, в магистрали невелики, можем несколько упростить уравнение (2.5). Опуская в дальнейшем черту над безразмерными величинами, окончательно имеем следующее разностное уравнение баланса массы:

$$-\left(p^{j+1} - p^{j}\right)\sum_{k=1}^{r} \frac{S_k}{2Kr_k} = \sum_{k=1}^{r} S_k q_k^{j+1} sg_k + \frac{k_0}{c_0}\left(Q_{out} - Q_{in}\right) \tag{2.6}$$

Запишем, далее, уравнение движения газа для k-го ребра. В безразмерных переменных уравнение движения газа имеет вид (черта над символами опущена):

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \lambda \frac{|q|q}{p}, \quad \lambda = \frac{\zeta L}{r} \tag{2.7}$$

При составлении разностного уравнения, как и ранее, будем считать: p — давление в узле ветвления; P_k, q_k — ближайшие к узлу значения сеточных функций давления и расхода на k-м ребре. Тогда разностный аналог (2.7) для ближайших к узлу ветвления значений сеточных функций, можно представить, как

$$\frac{q_k^{j+1} - q_k^{j}}{\tau_k} sg_k = -\frac{P_k^{j} - \left(p^{j} + sg_k Cp_k\right)}{h_k} - \frac{2\lambda \left|q_k^{j}\right| q_k^{j} sg_k}{P_k^{j} + \left(p^{j} + sg_k Cp_k\right)} \tag{2.8}$$

В уравнении (2.8) учитывается возможный скачок давления газа при прохождении им КС.

Система уравнений (2.6) и (2.8) разрешается явно. Из второго, находим удельные расходы q_k на новом временном слое, а из первого — давление p. Кроме указанной, возможны и другие (неявные) схемы.

Отметим, что на самом линейном участке магистрали возможно использование различных численных методов расчета течений. Приведенные соотношения для внутренних узлов выполняют, как бы, роль граничных условий для уравнений, описывающих одномерное течение газа.

Указанная схема расчета позволяет согласовывать потоки в узлах сети явным способом, не прибегая к решению никаких систем уравнений. Такой подход дает заметный выигрыш, предельно сокращая трудоемкость вычислений и улучшая точность баланса массы.

Таким образом, в работе предложена дополнительная схема расчета локального коэффициента сопротивления, основанная на его осреднении по отдельным участкам трубопровода. Получены специальные разностные уравнения, моделирующие течение газа в местах ветвления магистрального трубопровода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гусейнзаде М. А., Другина Л. И., Петрова О. Н., Степанова М. Ф. Гидродинамические процессы в сложных трубопроводных системах. М., 1991.
2. Чарный И. А. Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. М., 1975.
3. Сухарев М. Г., Ставровский Е. Р. Расчеты систем транспорта газа с помощью вычислительных машин. М., 1971.
4. Седов Л. И., Черный Г. Г. Осреднение неравномерных потоков газа в каналах. Теоретическая гидромеханика / Под ред. Л. И. Седова: Сб. статей. № 12. Вып.4. М., 1954. С. 17–30.
5. Воеводин А. Ф., Сафин Р. И. Алгоритм численного расчета течения газа в системе труб с учетом местных сопротивлений // Числ. методы механики сплош. среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние ВЦ; Ин-т теорет. и прикл. механики. 1981. Т. 12. № 1. С. 20–29.
6. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М., 1992.
7. Юфин В. А., Мамедов А. И., Аллахвердиев В. А. Расчет переходных процессов в сложных разветвленных системах магистральных нефтепроводов с учетом влияния ударных волн // Изв. вузов. Нефть и газ. 1986. № 11. С. 69–73.

Павел Анатольевич СТАРОДУБЦЕВ —
кандидат технических наук, доцент
Тихоокеанского военно-морского института
имени С. О. Макарова (Владивосток)

К вопросу влияния среды распространения на параметры просветных акустических сигналов при проведении численного моделирования

УДК 551.465

АННОТАЦИЯ. В статье приводятся результаты модельных исследований влияния поверхностного волнения на стационарной трассе о. Сахалин — о. Итуруп на частотный спектр одно или двукратно рассеянной компоненты просветного акустического сигнала разного рода неоднородностями морской среды.

The author offers the results of modeling research implemented to the influence of the surface ocean waves between the islands of Sachalin and Iturup upon frequency specter of once or twice dispersed components of the discrete acoustic signal caused by heterogeneous meteorological, hydrodynamic and ocean processes.

Целью приведенных ниже результатов модельных исследований является изучение процесса влияния среды распространения на параметры тональных просветных акустических сигналов на стационарной трассе о. Сахалин — о. Итуруп.

Введение. Если ось подводного звукового канала (ПЗК) находится около поверхности моря или на малой глубине, близкой к 100 м, он считается полностью