*А. А. КАРПОВА, В. Г. ШАРМИН*
*Тюменский государственный университет, г. Тюмень*
**УДК 372.851**

# ФОРМИРОВАНИЕ ЛОГИЧЕСКИХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ УЧЕБНЫХ ДЕЙСТВИЙ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ НА УРОКАХ ГЕОМЕТРИИ В 7–8 КЛАССАХ

**Аннотация.** В работе показана связь логических универсальных учебных действий и геометрических доказательств, а также представлены некоторые задания на разные виды деятельности, способствующие формированию логических универсальных учебных действий в процессе обучения доказательству.

**Ключевые слова**: логические универсальные учебные действия, геометрическое доказательство, деятельностный подход.

**Введение.** В настоящее время школьное обучение строится на основе концепции универсальных учебных действий, разработанной группой авторов под руководством АсмоловаА.Г. [1]. Данная концепция достаточно нова, и апробированных методик по формированию универсальных учебных действий в рамках предметных областей недостаточно. Об этом писали в своих статьях Турчен Д.Н., Березнева Н.С., Глазков Ю.А., Егупова М.В. [2, 3, 4].

Логические универсальные учебные действия могут успешно формироваться в процессе обучения геометрическому доказательству сразу по нескольким причинам: возрастные особенности учащихся, обучение в деятельности, связь доказательства с методами научного познания [1, 5]. Далингер В.А. глубоко изучал вопросы геометрических доказательств, а также реализации деятельностного подхода при изучении математики [1, 6].

Учащиеся по-разному справляются с решением задач на доказательство, у многих возникают трудности. Основная причина — направленность обучения на запоминание в ущерб изучению методов и способов рассуждений. Некоторые учащиеся приобретают не обобщенные умения, а лишь частные; наблюдается заучивание вместо осознания [5; 10-11].

По результатам международного мониторингового исследования качества школьного математического и естественнонаучного образования TIMSS, проводившегося среди учащихся восьмых классов, в Российской Федерации в 2019 году в области математики пятая часть участников (20%) продемонстрировала низкий или самый низкий результаты[7; 3-4]. Тест проверял не только уровень знаний, но и способность их применять, рассуждать, а это относится к универсальным учебным действиям. Более того, при выполнении математических заданий необходимо использовать методы научного познания, а значит, логические универсальные учебные действия. Отдельно отмечено, что восьмиклассникам из видов познавательной деятельности применение далось хуже, чем знание, а рассуждение хуже, чем применение.

**Проблема исследования.** Таким образом, в процессе математической деятельности у некоторой части учащихся сформирован недостаточный уровень логических универсальных учебных действий. Нами была поставлена задача: выделить некоторые виды математической деятельности учащихся в процессе изучения геометрии и на базе этого создать элементы методики преподавания данного предмета по формированию логических универсальных учебных действий в процессе обучения геометрическому доказательству.

**Материалы и методы.** При написании статьи использовались такие методы как: изучение литературы по теме исследования; анализ учебников по математике; разработка заданий.

**Результаты.** В основе федерального государственного стандарта второго и третьего поколения лежит системно-деятельностный подход [8; I, 5], [9; I, 4]. Учащийся занимает активную позицию на уроке, обучаясь через виды деятельности; деятельность — основа развития личности [6].

В основной школе учащиеся постепенно начинают овладевать теоретическим (на основе анализа и рассуждений) и рефлексивным мышлением. Подростки уже могут рассуждать абстрактно-логически (без опоры на действия) и гипотетико-дедуктивно (на основе общих посылок). Восприятие приобретает точность, позволяет выделять значимое, видеть причинно-следственные зависимости на чертежах [1; 15–16].

Среди требований к освоению основной образовательной программы сформулированы требования к уровню развития логических универсальных учебных действий [8; II, 8-10], [9; IV, 43]. В целом логические универсальные учебные действия можно охарактеризовать как совокупность умений, обеспечивающих способность применять основные методы научного познания.

В предметных требованиях к освоению основной образовательной программы сказано, что учащиеся должны иметь определенные знания и навыки в математической области, в том числе в области геометрии и геометрических доказательств [8; II, 11, 9; IV, 45]. В седьмом классе учащиеся знакомятся с теоремами и методами доказательства. Работа над доказательством теорем позволяет сформировать у учащихся такие умения как: выдвижение гипотез на основе наблюдения частных случаев; анализ формулировки теоремы; прямое и косвенное доказательство; отбор аргументов; умение делать выводы; использование признаков, свойств, необходимых и достаточных условий. Перечисленное входит в логические универсальные учебные действия [10; 2].

В некоторых учебниках по геометрии деятельностный подход занимает центральное место. Например, в учебнике для 7 класса авторов Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И., Ходот Т.Г. Все задания четко разделены на категории в зависимости от видов деятельности: смотрим, рисуем, представляем, исследуем, строим, доказываем, дополняем теорию, находим величину, работаем с формулой, планируем, применяем геометрию, рассуждаем, оцениваем, измеряем, ищем границы, разбираемся в решении [11]. Опираясь на вышеприведенную классификацию, выделим некоторые основные виды деятельности учащихся, которые будем использовать при создании элементов методики проведения геометрических доказательств.

Для осуществления полноценного доказательства учащиеся должны уметь работать с текстом задачи и рисунком к задаче (определять объекты, известные данные и вопрос; оформлять задачу в виде «дано» и «доказать», строить рисунок к задаче или составлять представление по готовому рисунку, осуществлять дополнительные построения, видеть случаи расположения фигур на рисунке), уметь работать с теоремами (определять виды теорем и их части, формулировать теоремы, делать выводы), понимать аксиоматический подход и суть доказательства (доказывать по правилам вывода и с помощью методов доказательства).

Таким образом, мы выделили следующие основные виды деятельности при геометрическом доказательстве: 1 — определяем, 2 — оформляем, 3 — строим, 4 — составляем, 5 — формулируем, 6 — размышляем, 7 — доказываем. На основании табл. 1 можно заметить, что логические универсальные учебные действия формируются во всех этих видах деятельности и наоборот: сформированные универсальные учебные действия будут способствовать более успешной работе с доказательством. Задания на данные виды деятельности должны соответствовать предметным результатам обучения математике; быть доступными для понимания учащимися; иметь подходящий уровень сложности[4; 244].

*Таблица 1*

**Соотнесение видов деятельности и логических УУД**

| *Логические УУД* | *Вид деятельности* |
|---|---|
| Анализ объектов с целью выделения признаков | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 |
| Синтез как составление целого из частей (в том числе восполнение) | 3, 4, 5, 6, 7 |
| Выбор оснований и критериев для сравнения | 1, 6 |
| Выбор оснований и критериев для сериации, классификации | 1, 3, 6, 7 |
| Установление аналогий | 2, 4, 5, 6, 7 |
| Подведение под понятия | 1, 4, 6, 7 |
| Выведение следствий | 4, 6, 7 |
| Установление причинно-следственных связей | 4, 5, 6, 7 |
| Построение логической цепи рассуждений, доказательство | 4, 6, 7 |
| Выдвижение гипотез и их обоснование | 3, 6, 7 |

Одним из наиболее популярных учебников геометрии для 7-9 классов является учебник, разработанный группой авторов под руководством Л.С. Атанасяна [12]. Если мы проанализируем данный учебник с точки зрения видов деятельности, реализуемых при геометрическом доказательстве, то увидим, что в нем преобладают готовые доказательства для ознакомления и задачи, требующие самостоятельного доказательства от учащихся. Мало задач для предварительной подготовки к доказательству, нет промежуточного звена между изучением доказательства и самостоятельным доказательством, нет нестандартных задач высокого уровня сложности. Рассмотрим, какие еще виды заданий можно было бы реализовать на уроках, опираясь на выделенные виды деятельности.

Например, задачи, позволяющие подготовить учащегося к доказательству — актуализировать определенные знания, акцентировать на чем-либо внимание, выделить проблему, дать исследовать какой-либо вопрос, разобрать формулировку и смысл теоремы.

*Определяем.*Определите, сколько медиан изображено на рис. 1. Выпишите все пары «название треугольника — название медианы».

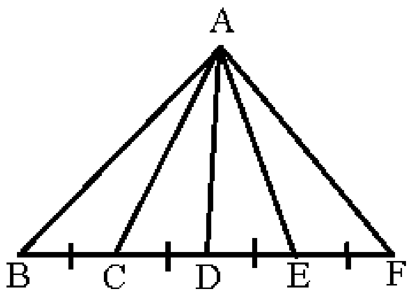


*Рис. 1.* Медианы

*Размышляем.* А.Даны две прямые и их секущая. Может ли секущая быть параллельной к этим прямым? Почему?

Б. Даны две прямые и их секущая. Может ли секущая быть перпендикулярной к этим прямым? Почему?

*Строим, размышляем.* А. Даны две параллельные прямые. Представьте, что вам нужно построить еще одну прямую. Как она может быть расположена по отношению к данным прямым? Постройте несколько рисунков, иллюстрирующих ваши варианты.

Б. Можно ли полученные рисунки разбить на группы по каким-либо признакам? Сколько прямых пересекает новая прямая — обе, одну, ни одной? Можно ли выдвинуть какие-либо предположения о том, как может располагаться прямая относительно двух параллельных прямых?

*Формулируем.* Заполните пропуски в табл. 2 формулировками теорем об углах, образованных параллельными прямыми и секущей.

*Таблица 2*

**Формулировки теорем**

| *Теорема* | *Условная форма* | *Категорическая форма* |
|---|---|---|
| О накрест лежащих углах | … | При пересечении двух параллельных прямых секущей образуются равные накрест лежащие углы |
| О соответственных углах | … | … |
| Об односторонних углах | Если две параллельные прямые пересечены секущей, то сумма односторонних углов равна 180° | … |

В отдельную категорию можно выделить задания, которые помогут учащимся сделать шаг от изучения готового доказательства к самостоятельному доказательству. На начальных этапах обучения геометрическому доказательству учащиеся могут дополнять доказательства, заполнять пропуски в них, отвечать на вопросы или доказывать по наводящим вопросам, выстраивать пункты доказательства в верном порядке, искать ошибки.

*Доказываем.* А. Дополните доказательство о том, что в равнобедренном треугольнике углы при основании равны (см. рис. 2).

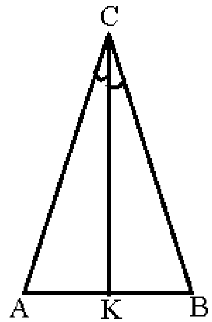


*Рис. 2.* Равнобедренный треугольник

Дано: ΔABC, AC= CB.

Доказать: ∠CAB = ∠CBA.

Доказательство:

1) CK — биссектриса (по построению);

2) … = … (по определению биссектрисы);

3) … = … (по определению равнобедренного треугольника);

4) … = … (по первому признаку равенства треугольников из п.2, п.3, CK — общая);

5) … = … (из п.4, в равных треугольниках равны соответствующие компоненты).

Б. Могут ли пункты из доказательства данной задачи стать доказательством следующего утверждения: биссектриса, проведенная из угла, лежащего напротив основания равнобедренного треугольника, является его медианой и высотой? Осуществите доказательство.

Большой потенциал имеют нестандартные и более сложные задачи, требующие глубокого понимания материала. Например, задачи с недостаточными или избыточными условиями. Учителю нужно знакомить учащихся с подобными задачами постепенно, оказывая значительную поддержку.

*Размышляем, доказываем*. А. В треугольниках MPN и MRN (рис. 3) углы MPN и MRN соответственно прямые. Отрезок PN равен отрезку RM. Треугольник MON равнобедренный. Какое из условий можно убрать, чтобы без него было возможным доказательство равенства треугольников MPN и MRN? Это единственный вариант, или можно убрать другое условие?

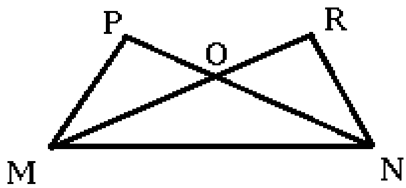


*Рис. 3*. Треугольники

Б. Уберите одно из условий и осуществите доказательство.

**Заключение.** Геометрические доказательства имеют большой потенциал для формирования логических универсальных учебных действий в процессе активной деятельности учащихся. Задача учителя — грамотно организовать обучение, используя подходящие задания.

В целом можно дать следующие рекомендации по формированию логических универсальных учебных действий в процессе обучения доказательству. Учителю стоит:

1. Учить класс внимательному чтению задачи, выделению данных и вопроса, построению верного и понятного чертежа. Изученные геометрические объекты учащиеся должны узнавать на чертеже и в тексте.

2. Формировать у учащихся умение видеть структуру теорем, учить их определять условие и заключение теоремы вне зависимости от ее формы, определять необходимость и достаточность, видеть логические связки, преобразовывать теорему в обратную, противоположную и контрапозитивную.

3. Формировать у учащихся понимание структуры доказательства и того, что цепочка умозаключений выстраивается из условия теоремы, аксиом и полученных из них утверждений, либо уже доказанных теорем.

4. Тщательно осуществлять работу по переносу приема доказательства на сходные теоремы; использовать словесный, образный и символьные способы представления информации.

5. Целенаправленно обучать разным методам доказательства; учить подбирать подходящий к ситуации метод.

6. Привлекать учащихся к «открытию» доказательства теоремы.

7. Своевременно использовать задания на формирование логических универсальных учебных действий, вовлекая учащихся в различные виды деятельности и постепенно увеличивая уровень сложности заданий.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Асмолов А. Г. Формирование универсальных учебных действий в основной школе: от действия к мысли. Система заданий: пособие для учителя / А. Г. Асмолов, Г. В. Бурменская, И. А. Володарская [и др.]; под ред. А. Г. Асмолова. — Москва: Просвещение, 2010. — 159 с. — Текст: непосредственный.
2. Турчен Д. Н. Концепция формирования универсальных учебных действий в современном российском образовании / Д. Н. Турчен. — Текст: электронный // Интернет-журнал «Науковедение». — 2014. — № 1. — URL: https://cyberleninka.ru/article/n/kontseptsiya-formirovaniya-universalnyh-uchebnyh-deystviy-v-sovremennom-rossiyskom-obrazovanii/viewer (дата обращения 05.05.2023).
3. Березнева Н. С. Диагностика сформированности логических универсальных учебных действий учащихся 7 класса на уроках геометрии / Н. С. Березнева. — Текст: электронный // Педагогическое призвание: сборник статей II международного научно-методического конкурса. — 2020. — С. 275-283.– URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=42675464 (дата обращения 21.04.2023).
4. Глазков Ю. А. Формирование универсальных учебных действий при обучении математике в основной школе: задания, методические подходы / Ю. А. Глазков, М. В. Егупова. — Текст: электронный // Вестник Оренбургского государственного педагогического университета: электронный научный журнал. — 2016. — №4. — С. 244-256. –URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=27526308(дата обращения 13.05.2021).
5. Далингер В. А. Методика обучения математике. Обучение учащихся доказательству теорем: учебное пособие для СПО / В. А. Далингер. — Москва: Издательство Юрайт, 2019. — 338 с. — URL: https://mx3.urait.ru/uploads/pdf_review/E620FA53-5D41-41E0-BFFF-6E0958551A18.pdf (дата обращения 14.05.2023).Текст: электронный.

6. Далингер В. А. Деятельностный подход к обучению математике в школе — требование новых образовательных стандартов / В. А. Далингер. — Текст: электронный // Международный журнал экспериментального образования. — 2014. — № 11-2. — С. 55-56. — URL: https://www.elibrary.ru/download/elibrary_22475964_69562051.pdf (дата обращения 16.05.2023).
7. Результаты исследования TIMSS-2019. URL: https://fioco.ru/Media/Default/Documents/МСИ/Результаты%20TIMSS%202019.pdf (дата обращения 02.05.2023).
8. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования: текст с изменениями и дополнениями от 8 ноября 2022 года: [утв. 17.12.2010 г.]. — URL: https://base.garant.ru/55170507/53f89421bbdaf741eb2d1ecc4ddb4c33/(дата обращения 04.05.2023). — Текст: электронный.
9. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования: [утв. 31.05.2021 г.]. — URL: https://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/401333920/(дата обращения 04.05.2023). — Текст: электронный.
10. Шестакова Л. Г. Реализация развивающего потенциала теоремы (на материале школьного курса математики) / Л. Г. Шестакова. — Текст: электронный // Развивающий потенциал математического образования: школа — вуз: коллективная монография. — Соликамск: Соликамский государственный педагогический институт (филиал) ФГБОУ ВПО «ПГНИУ». 2015. — 111 с. — URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=23482018 (дата обращения 12.05.2023). — Текст: электронный.
11. Геометрия. 7 класс: учебник для общеобразовательных учреждений / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик, Т. Г. Ходот. — Москва: Просвещение, 2013. — 176 с. Текст: непосредственный.
12. Геометрия. 7-9 классы: учебник для общеобразовательных организаций / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев [и др]. — 7-е изд. — Москва: Просвещение, 2017. — 383 с. Текст: непосредственный.