Э. Р. Хайрнасов, Д. И. Иванов
Тюменский государственный университет, г. Тюмень
УДК 372.851

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ШКОЛЬНЫХ ОЛИМПИАД

Аннотация. В статье обсуждается математическая олимпиада как соревновательное мероприятие. Автор акцентирует внимание на трудностях, с которыми сталкиваются педагоги олимпиадной математики, таких как недостаток времени, сложность материала, нехватка ресурсов и разный уровень подготовки учащихся. Педагогам необходимо хорошо разбираться в элементарной и высшей математике, чтобы видеть связи между темами и лучше подготовить учеников к участию в олимпиадах и других математических соревнованиях. В статье приводятся результаты опроса студентов педагогических направлений и преподавателей олимпиадной математики города Тюмени. Автор подчеркивает важность изучения научных основ школьной математики и высшей математики для решения задач олимпиадного уровня. Предлагается подход, включающий решение задач одной темы разных уровней сложности, для углубления понимания тем олимпиадной математики и повышения уровня знаний педагога. Такой подход может улучшить качество преподавания и подготовки учеников к математическим соревнованиям.

Ключевые слова: математическая олимпиада, высшая математика, олимпиадная подготовка, учитель математики, обучение математике.

Введение. Математическая олимпиада — это соревновательное мероприятие в математическом образовании, охватывающее разные разделы математики и предполагающее решение сложных задач. Она способствует развитию учащихся, выявлению талантов и стимулированию интереса к математике.

Подготовка к математической олимпиаде подразумевает изучение множество различных тем, которых нет в школьном курсе математики. Педагог олимпиадной математики в процессе работы может столкнуться с трудностями, вот некоторые из них:

- недостаток времени;
- сложность материала;
- нехватка ресурсов;
- разный уровень подготовки учащихся.

Особое внимание стоит уделить сложности материала. Педагог, который занимается ею, должен быть знаком не только с различными темами олимпиадной математики, но и иметь понимание того, как они связаны друг с другом и как могут быть применены для решения задач. Педагог должным быть в позиции «над» по отношению к излагаемому материалу: он должен видеть связи между темами, видеть в какой концентрической окружности находится изучаемая тема.

Для того, чтобы видеть такую связь он должен хорошо разбираться не только в элементарной математике, но и владеть высшей математикой. Знание высшей математики может быть полезным для расширения педагогической квалификации и обеспечения более глубокого понимания математических концепций, что может помочь педагогу лучше подготовить учеников к участию в олимпиадах и других математических соревнованиях.

Дударева Н. В. и Бодряков В.Ю. в своей работе подчеркивают важность участия учителя в организации олимпиад и подготовке школьников к ним и настаивают на организации олимпиад среди высших учебных заведений. Таким образом, авторы полагают, что существенно улучшиться подготовка учителей и обогатится их профессиональный опыт [1].

Аксенова М. В. предлагает следующий подход к улучшению преподавания олимпиадной математики: организация специального курса для учителей математики, на котором учителя будут изучать мир олимпиадной математики и учиться его преподавать [2].

Говоря о связях школьной и высшей математик, Рыбников В. В. указал на некоторые несоответствия в школьном курсе на примере предела числовой последовательности и модулей. Он предложил уделить большее внимание теме модулей в школе и рассматривать все его свойства. А из высшей математики автор хочет перенести бином Ньютона и рассматривать его во время изучения формул сокращенного умножения [3].

Авторы другой работы, Машкина В. В. и Демченкова Н. А., рассматривают проблемы преемственности в обучении математике с 1 по 11 классы на примере темы «Уравнения». Авторы работы видят проблему преемственности в связи с переходом на новые стандарты преподавания и предложили свою схему изучения данной темы. Проведя длительный эксперимент, авторы работы пришли к выводу, что разработанная схема лучше справляется с поставленными задачами [4].

Туманина С.А. и Шилова З. В. также рассматривают проблему преемственности школы и вуза. В своей работе они рассмотрели проблему на примере «Функции одной переменной» и «Функции нескольких переменных». Студенты испытывали значительные затруднения при решении задач, эти затруднения были вызваны с понятием «функции». Авторы предлагают создавать методические пособия для учителей школ, которые помогут им лучше видеть связи с высшей школы [5].

Обобщая вышеизложенное, можно вывести следующую проблему.

Проблема исследования: процесс изучения наличия связей между школьной математической олимпиады и высшей математики.

Для изучения поставленной проблемы и ее решения были поставлены следующие задачи:

1. Проведение опроса среди студентов педагогического направления и действующих учителей математики;

2. Исследование связей между математической олимпиады и высшей математикой.

Материалы и методы. В рамках работы был проведен опрос среди студентов педагогических направлений и преподавателей олимпиадной математики города Тюмени. В опросе приняло участие 20 человек. Их них 9 человек имеют опыт преподавания олимпиадной математики и 11 не имеют такого опыта. А из тех, кто имеет опыт преподавания от одного 1 года до 3 — 4 человека, от 3 до 5 лет — 1 человек, более 5 лет — 4 человека.

В опросе были представлены 6 задач различного уровня сложности по две задачи на одну тему: задачи на соответствие, делимость, решение неравенств. Участникам предлагалось выбрать способ решения задач или в сложных задачах выбрать теорию из высшей математики, которая применима к решена конкретной задаче.

Результаты. По первой задаче среди педагогов результаты представлены на рис. 1, участников без опыта — на рис. 2.

Рис. 1. Ответы к первой задаче среди педагогов олимпиадной математики

Рис. 2. Ответы к первой задаче среди участников без опыта преподавания олимпиадной математики

Как можно заметить, что большая часть опрашиваемых выбрала табличный способ решения этой задачи. При этом ответы ко второй задаче, в которой предлагалось выбрать теорию из высшей математики, которую можно применить к решению задачи, ответы были не столь однозначными. Стоит отметить, что есть один верный ответ на эту задачу — рассмотрение через формулы алгебры логики. Результаты обеих групп на рис. 3 и рис. 4.

Как можно заметить у 5 педагогов не вызвало затруднений выбрать верную теорию для решения задачи, 1 педагог решил применить теорию о полных и связных графов для решения, но таким способом он задачу не решит и 2 педагога не смогли выбрать теорию для решения задачи.

Пять школьников из пяти различных городов Брянской области прибыли для участия в областной олимпиаде по математике. На вопрос: «Откуда Вы каждый дал ответ:
Иванов: «Я приехал из Клинцов, а Дмитриев — из Новозыбкова».
Сидоров: «Я приехал из Клинцов, а Петров — из Трубчевска.
Петров: «Я приехал из Клинцов, а Дмитриев — из Дятькова • .
Дмитриев: «Я приехал из Новозыбкова, а Ефимов — из Жуковки».
Ефимов: «Я приехал из Жуковки, а Иванов живёт в Дятькове».
Откуда приехал каждый из школьников, если одно утверждение школьника верно, а другое истинно.

Рис. 3. Ответы ко второй задаче среди педагогов олимпиадной математики

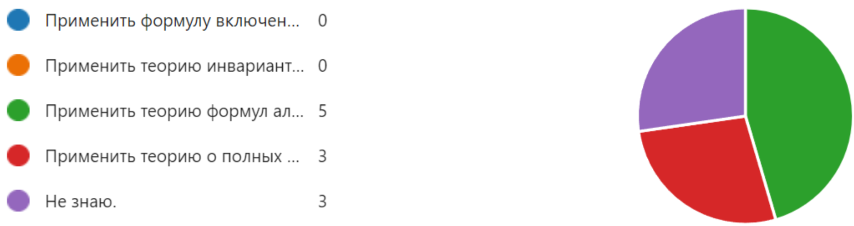

Рис. 4. Ответы ко второй задаче среди участников без опыта преподавания олимпиадной математики

Похожая ситуация сложилась и у студентов педагогического направления. 5 человек выбрали формулы алгебры логики для решения задачи, 3 человека теорию графов и 3 не знаю, что им применить.

Рассмотрим еще одну задачу, которая вызвала затруднения у обеих групп. Участникам было необходимо доказать неравенство: $3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2$. Ответы на шестую задачу продемонстрированы на рис. 5 и 6.

Рис. 5. Ответы к шестой задаче среди педагогов олимпиадной математики

Рис. 6. Ответы к шестой задаче среди участников без опыта преподавания олимпиадной математики

На данный вопрос в первой и во второй группе было дано по одному верному ответу. Можно предположить, что некоторые педагоги олимпиадной математики знают популярное неравенство Коши и хотели бы его применить здесь, но это неравенство на доказательство через Коши-Буняковского-Шварца. Среди студентов 10 человек из 11 не знаю как доказать данное неравенство.

Данный опрос показывает, что студенты и учителя имеют небольшое представление о применении высшей математики к решению задач школьных олимпиад.

Для того, чтобы будущие учителя и действующие преподаватели могли видеть рассматриваемую связь, необходимо рассматривать научные основы школьной математики, искать и решать методы высшей математики, которые применимы к решению задач математической олимпиады.

Студентам и учителям можно предложить решать задачи на одну тему, но разных уровней. Например, решить задачу по малой теореме Ферма, которые встречаются в олимпиадах с 8 класса и решить задачу на применение теоремы Эйлера в теории чисел.

Рассмотрим задачу на применение малой теоремы Ферма [6].

Задача 1. Докажите, что $300^{3000} - 1$ делится на 1001.

Решение: исходное число должно делиться на 7, 11, 13. Тогда по малой теореме Ферма: $300^{3000} = (300^{500})^6 \equiv 1(mod\, 7)$, аналогично : $300^{3000} \equiv 1\ (mod\, 11)$ и $1\ (mod\, 13)$. Следовательно, $300^{3000} - 1$ делится на 1001. Что и требовалось доказать.

Теперь рассмотрим задачу на применение теоремы Эйлера [6].

Задача 2. Докажите, что число $2^{3^n} + 1$ делится на 3^{n+1}, но не делится на 3^{n+2}.

Решение: пусть $m = 3^{n+1}$, тогда по теореме Эйлера $2^{\varphi(m)} \equiv 1\ (mod\, m)$, но $\varphi(3^{n+1}) = 3^{n+1} - 3^n = 3^n \cdot 2 + 1$, поэтому $(2^{3^n})^2 - 1 = (2^{3^n} - 1)(2^{3^n} + 1)$ делится на 3^{n+1} и $2^{3^n} - 1$ не делится на 3, так как по индукции $2^{3^n} \equiv -1\ (mod\, 3)$, значит на 3^{n+1} делится $2^{3^n} + 1$.

И здесь обнаруживается связь с высшей математикой с обобщением данной теоремы — теоремой Эйлера, которая гласит, если n — положительное число, a — целое число, взаимно простое с n, то $a^{(\varphi(n))} \equiv 1\ (mod\, n)$, где $\varphi(n)$ — функция Эйлера, которая определяет количество чисел, меньших n и взаимно простых с n.

Связь между малой теоремой Ферма и теоремой Эйлера заключается в том, что малая теорема Ферма является частным случаем теоремы Эйлера для простых чисел. Если в теореме Эйлера мы возьмем $n = p$ (простое число), то функция Эйлера $\varphi(p) = p - 1$, потому что все числа меньшие простого числа p взаимно просты с p. В этом случае теорема Эйлера превращается в малую теорему Ферма: $a^{(p-1)} \equiv 1\ (mod\, p)$ [7]

Обе теоремы имеют много приложений в криптографии, теории чисел и алгебре, и обе используют свойства делимости и арифметики остатков для доказательства их результатов.

Или можно рассмотреть задачу, решаемую средствами алгебры логики

Задача 3. Трое друзей, Дима, Никита, Петя спорили о результатах лошадиных скачек. Дима сказал: «Старый Бегун не придет первым! Первым будет Быстрый Хвост.». Никита ответил Диме: «Нет, победителем будет Старый Бегун. А Облачный Пегас — не конкурент для него.». Петя возмутился: «Быстрому Хвосту не видать первого места, а вот Облачный Пегас — самая быстрая лошадь на трассе.» По завершении скачек оказалось, что каждое из двух предположений двоих друзей подтвердилось, а оба предположения третьего из друзей оказались неверны. Кто выиграл скачки?

Решение: введем обозначения для высказываний. С — победит Старый Бегун, О — победит Облачный Пегас, Б — победит Быстрый Хвост. Перепишем высказывания ребят на языке алгебры логики. Дима: $\overline{\text{С}} \cdot \text{Б}$, Никита: $\text{С} \cdot \overline{\text{О}}$, Петя: $\overline{\text{Б}}$.

Запишем формулу с учетом условия задачи о верности их предположений. $(\overline{\text{С}} \cdot \text{Б}) \cdot (\text{С} \cdot \overline{\text{О}}) \cdot \overline{\overline{\text{Б}}} + (\overline{\text{С}} \cdot \text{Б}) \cdot \left(\overline{\text{С} \cdot \overline{\text{О}}}\right) \cdot \overline{\text{Б}} + \left(\overline{\overline{\text{С}} \cdot \text{Б}}\right) \cdot (\text{С} \cdot \overline{\text{О}}) \cdot \overline{\text{Б}} = (\text{С} + \overline{\text{Б}}) \cdot \text{С} \cdot \overline{\text{О}} \cdot \overline{\text{Б}} = \text{С} \cdot \overline{\text{О}} \cdot \overline{\text{Б}}$. Поэтапно упрощенное высказывание истинно только при $\text{С} = 1, \text{О} = 0, \text{Б} = 0$. Поэтому победил Старый Бегун.

Подобным образом можно и рассматривать другие задачи. Например, логические задачи на соответствие или задачи о рыцарях и лжецах можно также переводить на формальный язык алгебры логики. Можно рассмотреть часто встречаемые задачи на доказательства неравенств с применением неравенства Коши и Коши-Буняковского-Шварца и из математической статистики рассмотреть треугольник Паскаля [3].

Таких различных пересечений со школьной математической олимпиадой и высшей математикой найдется больше при более подробном исследовании данного вопроса.

Подготовка педагогов олимпиадной математики является сложным и ответственным процессом, который требует глубокого знания элементарной и высшей математик и способности видеть связи между двумя уровнями знаний. Как показал опрос, большинство будущих педагогов и педагоги олимпиадной математики имеют небольшое представление о применении высшей математики для решения задач школьных олимпиад. Для улучшения качества преподавания олимпиадной математики в школах и математических кружках педагоги могут повышать свою квалификацию, организовывать самообразование себя и других углублять уровень знаний поиском таких связей между элементарной и высшей математик, а также заниматься с готовыми сборникам задач. Образовательные организации могут создавать курсы для педагогов, которые помогают учителю в этом непростом деле [2] Автор работы продолжает поиск таких связей и создает свою коллекцию задач, которая поможет ему улучшить качество преподавания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дударева Н. В. Студенческие математические олимпиады и конкурсы в УрГПУ как неформальный индикатор уровня и инструмент мотивации к углублению предметной подготовки будущих учителей / Н. В. Дударева, В. Ю. Бодряков. — Текст: электронный // Педагогическое образование в России. — 2021. — № 3. — С. 119-135. — URL: https://cyberleninka.ru/article/n/studencheskie-matematicheskie-olimpiady-i-konkursy-v-urgpu-kak-neformalnyy-indikator-urovnya-i-instrument-motivatsii-k-uglubleniyu (дата обращения: 4.05.2023). — Режим доступа: Научная электронная библиотека КиберЛенинка.
2. Аксенова М. В. Подготовка будущего учителя начальных классов к обучению младших школьников решению олимпиадных задач по математике / М. В. Аксенова. — Текст: электронный // Проблемы современного педагогического образования. — 2022. — №75(4). — С. 15-19. — URL: https://cyberleninka.ru/article/n/podgotovka-buduschego-uchitelya-nachalnyh-klassov-k-obucheniyu-mladshih-shkolnikov-elementam-algebry (дата обращения: 5.05.2023). — Режим доступа: Научная электронная библиотека КиберЛенинка.
3. Рыбников В. В. Преемственность программ по математике в средней и высшей школе / В. В. Рыбников. — Текст: электронный // Вестник ИШ ДВФУ. — 2010. — № 3(5). — С. 136-140. — URL: https://cyberleninka.ru/article/n/preemstvennost-programm-po-matematike-v-sredney-i-vysshey-shkole (дата обращения: 5.05.2023). — Режим доступа: Научная электронная библиотека КиберЛенинка.
4. Машкина В. В. Преемственность в обучении математике в условиях перехода к новому стандарту общего образования / В. В. Машкина,

Н. А. Демченкова. — Текст: электронный // Вестник магистратуры. — 2014. — № 8(35). — С. 50-55. — URL: https://cyberleninka.ru/article/n/preemstvennost-v-obuchenii-matematike-v-usloviyah-perehoda-k-novomu-standartu-obschego-obrazovaniya (дата обращения: 4.05.2023). — Режим доступа: Научная электронная библиотека КиберЛенинка.
5. Туманина С.А. Преемственность при обучении математике (школа–вуз) / С. А.Туманина, З. В. Шилова. — Текст: электронный // NOVAINFO.RU. — 2016. — № 3(5). — URL: https://novainfo.ru/article/8369 (дата обращения: 5.05.2023). — Режим доступа: Электронный журнал Novainfo.
6. Горбачев Н. В. Сборник олимпиадных задач по математике / Н. В. Горбачев. — 6-е изд. — Москва : МЦНМО, 2023. — 560 с. — Текст: непосредственный.
7. Виноградов И. М. Основы теории чисел: учебное пособие / И. М. Виноградов. — 12-е изд. — Санкт-Петербург : ЛАНЬ, 2009. — 176 с. — Текст: непосредственный.