Виктор Иванович КРУГЛИКОВ –
доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического анализа и теории функций

Владимир Иванович ПАЙКОВ –
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и теории функций Донецкого национального университета (Украина)

УДК 517.53/57

ПРИМЕР ГОМЕОМОРФИЗМА, КВАЗИКОНФОРМНОГО В СРЕДНЕМ, НЕ ОСУЩЕСТВЛЯЮЩЕГО БИЕКЦИИ МНОЖЕСТВ ПРОСТЫХ КОНЦОВ ОТОБРАЖАЕМЫХ ОБЛАСТЕЙ

АННОТАЦИЯ. Приводится конкретное отображение, квазиконформное в среднем, не оставляющее инвариантным понятие граничного элемента пространственной области, определяемого посредством ёмкости конденсатора.

The quasiconformal map in the mean construction with the absent prime ends bijection is represented.

В связи с задачей о продолжении конформного отображения на границу области, К. Каратеодори [1] было введено понятие простого конца (граничного элемента) плоской односвязной области D. Оказалось, что всякое конформное отображение $f : B \to D$ единичного круга B на область D порождает биекцию между множеством точек окружности ∂B и множеством простых концов области D.

В случае пространственных областей задача о соответствии границ для различных классов отображений изучалась в [2-6].

В отличие от плоского случая, когда определенное К. Каратеодори понятие простого конца оказалось эффективным при решении вопроса о биективном соответствии границ не только для конформных, но и для более общих отображений (в частности, для квазиконформных и для квазиконформных в среднем), в случае преобразований пространственных областей выяснилось, что успешное решение вопроса о соответствии границ сильно зависит от того, насколько существенно определяемое в этом случае понятие простого конца опирается на те или иные характеристические свойства рассматриваемых классов отображений.

Обращая внимание, что важнейшие классы пространственных квазиизометрических, квазиконформных и квазиконформных в среднем отображений могут быть описаны посредством характеристических законов искажения соответствующих α-емкостей конденсаторов [7-9], представляется естественным определить понятие простого конца, используя α-емкость конденсатора.

Такой подход позволяет автоматически решить проблему биективного соответствия границ для квазиизометрических и квазиконформных отображений [3-5].

В случае же отображений, квазиконформных в среднем, эта проблема также успешно решается для обширного ряда областей [4]. В то же время, полное положительное решение указанной проблемы в классе таких отображений невозможно, и далее мы обосновываем сказанное путём построения конкретного примера.

1. Используя понятие α-ёмкости конденсатора, приведём в нужной нам форме определение простого конца и его носителя (подробнее см. [4]).

Пусть D — ограниченная область в $R^n, n \geq 3$, гомеоморфная единичному шару B. Выбирая произвольно непустые замкнутые относительно D множества $F^0, F^1 \subset D$, назовём конденсатором тройку множеств (F^0, F^1, D). При условии $\overline{F^0} \cap \overline{F^1} = \varnothing$ α-ёмкость конденсатора определим равенством

$$cap_\alpha(F^0, F^1, D) = \inf \int\limits_D |\nabla\varphi(x)|^\alpha dx,$$

где точная нижняя грань берётся по всем непрерывным ACL-функциям $\varphi : D \to [0,1]$ таким, что $\varphi(x) = 0$ при $x \in F^0$ и $\varphi(x) = 1$ при $x \in F^1$. Если же $\overline{F^0} \cap \overline{F^1} \neq \varnothing$, то полагаем $cap_\alpha(F^0, F^1, D) = \infty$.

Ниже (как и в [4,9]) ограничимся наиболее содержательным случаем, когда $n-1 < \alpha \leq n$.

Понимая далее под континуумом (относительным континуумом) невырождающееся в точку связное замкнутое относительно R^n (относительно D) множество, убывающую по включению последовательность $\{E^m\}$ относительных континуумов $E^m \subset D, \overline{E^m} \cap \partial D \neq \varnothing, m = 1,2...$, назовём α-фундаментальной по отношению к некоторому континууму $K \subset D$, если $\lim\limits_{m\to\infty} cap_\alpha(K, E^m, D) = 0$.

В [4,5] показано, что все предельные точки α-фундаментальной последовательности $\{E^m\}$ лежат на границе ∂D области D и понятие α-фундаментальности не зависит от выбора континуума $K \subset D$.

Две α-фундаментальные последовательности множеств $\{E^m\}$ и $\{F^m\}$ считаем эквивалентными, если существует α-фундаментальная последовательность $\{A^m\}$ так, что $A^m \supset E^m \cup F^m$ для п. в. m (т. е. для всех m начиная с некоторого номера).

Простым α-концом e^α области D назовём класс эквивалентных α-фундаментальных последовательностей множеств $\{E^m\}$.

Под носителем простого α-конца e^α понимаем множество $|e^\alpha| = \cup \left|\{E^m\}\right|$, где объединение берётся по всем α-фундаментальным последовательностям $\{E^m\} \in e^\alpha$, а $\left|\{E^m\}\right| = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \overline{E^m}$.

У любого простого α-конца его носитель расположен на ∂D и является континуумом или точкой [4].

2. Приведём, следуя [9], аналитическое описание рассматриваемого нами класса отображений.

При $p,q > n-1$ под отображением, квазиконформным в (p,q)-среднем, понимается гомеоморфное отображение $y = f(x): D \to \Delta$ ограниченных областей $D, \Delta \subset R^n$, $n \geq 3$, класса $ACL^n(D)$, у которого конечны интегралы

$$\int\limits_D H_I^p(x,f)|J(x,f)|dx \quad \text{и} \quad \int\limits_D H_0^q(x,f)dx ,$$

где $H_I(x,f), H_0(x,f)$ и $J(x,f)$ означают, соответственно, внутреннее и внешнее аналитические отклонения и якобиан отображения f, определённые для п. в. точек $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ из D.

Более подробное описание аналитических отклонений здесь выглядит так:

$$H_I(x,f) = |J(x,f)| / \ell^n(x,f) \quad \text{и} \quad H_0(x,f) = |f'(x)|^n / |J(x,f)|,$$

где $f'(x)$ — производное отображение и

$$|f'(x)| = \max_{|h|=1} |f'(x)h|, \quad \ell(x,f) = \min_{|h|=1} |f'(x)h)| .$$

3. Справедливо следующее утверждение, показывающее, что понятие простого α-конца неинвариантно при преобразованиях областей посредством отображений, квазиконформных в среднем.

Теорема. Для любых $p,q > n-1$ существует пара гомеоморфных n-мерному шару жордановых областей D и Δ и квазиконформное в (p,q)-среднем отображение $f: D \to \Delta$ так, что f не осуществляет биекции между множествами простых α-концов областей D и Δ ни при каком $n-1 < \alpha \leq n$.

Обоснование справедливости данного утверждения проведём в п. 5 путём построения конкретных областей и отображения между ними с описанными выше свойствами. При этом, для простоты выкладок и в целях большей наглядности, все рассмотрения будем проводить в пространстве R^3 (они очевидным образом могут быть перенесены на случай пространств R^n любой размерности $n > 3$).

4. Прежде, чем проводить конкретные построения, сначала, следуя [10], рассмотрим некий специальный класс областей $G \subset R^3$, являющийся источником разнообразных пояснительных примеров и контрпримеров при изучении граничных свойств пространственных отображений и функций.

Пусть вещественная функция $g(u)$ непрерывна на отрезке $[0,a]$, $g(0) = 0$ и $g(u) > 0$ при $0 < u \leq a$. Предположим также, что производная $g'(u)$ непрерывна и не убывает на $(0,a]$, при этом $\lim\limits_{u \to 0} g'(u) = 0$. Область

$$G = \{x : 0 < x_1 < a, \ |x_2| < g(x_1), \ |x_3| < b\} ,$$

где $0 < a < +\infty$ и $0 < b < +\infty$, назовём g-клином. Множество

$$E = \{x : x_1 = x_2 = 0, \ |x_3| \leq b\},$$

Фиксируя произвольно убывающую последовательность положительных чисел $\{\delta_m\}_{m=1}^{\infty}$ такую, что $\lim\limits_{m\to\infty}\delta_m = 0$, выберем в области G убывающую по включению последовательность $\{F^m\}_{m=1}^{\infty}$ относительных континуумов .

$$F^m = \{x : 0 < x_1 \le \delta_m,\ |x_2| < g(\delta_m),\ |x_3| < b\},\quad m = 1,2\dots.$$

Приведём условия, позволяющие делать заключения о наличии или отсутствии свойства α-фундаментальности у последовательности множеств $\{F^m\}_{m=1}^{\infty}$.

Лемма 1. Для каждого $2 < \alpha \le 3$ при условии

$$\int_0^a \frac{du}{[g(u)]^{1/(\alpha-1)}} = +\infty$$

последовательность множеств $\{F^m\}_{m=1}^{\infty}$ α-фундаментальна.

Доказательство. В силу сказанного в п. 1 достаточно проверить, что $\lim\limits_{m\to\infty} cap_\alpha(K, F^m, G) = 0$ для какого-либо произвольного заданного континуума $K \subset G$. Выбирая, например, в качестве K некоторый континуум, расположенный в части области G, ограниченной плоскостями $x_1 = a/2$ и $x_1 = a$, рассмотрим последовательность $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^{\infty}$ чисел $\varepsilon_m > 0$, задаваемых равенствами

$$\int_{\delta_m}^{a/4} \frac{du}{[g(u)]^{1/(\alpha-1)}} = \left(\frac{4b}{\varepsilon_m}\right)^{1/(\alpha-1)},\ m = 1,2,\dots.$$

Из расходимости интеграла в условии леммы вытекает $\lim\limits_{m\to\infty}\varepsilon_m = 0$.

Для оценки величины $cap_\alpha(K, F^m, G)$ сначала определим допустимую для конденсатора (F^m, K, G) функцию φ_m, полагая $\varphi_m = 0$, если $0 < x_1 < \delta_m$, и $\varphi_m = 1$, если $a/4 < x_1 < a$, а при остальных $\delta_m \le x_1 \le a/4$ полагаем

$$\varphi_m = \left(\frac{4b}{\varepsilon_m}\right)^{1/(\alpha-1)} \int_{\delta_m}^{x_1} \frac{du}{[g(u)]^{1/(\alpha-1)}}.$$

Очевидно, $|\nabla\varphi_m| = [\varepsilon_m / 4bg(x_1)]^{1/(\alpha-1)}$, если $\delta_m \le x_1 \le a/4$, и $|\nabla\varphi_m| = 0$ при остальных x_1. Поскольку теперь функция $1-\varphi_m$ будет допустимой для конденсатора (K, F^m, G) и $|\nabla(1-\varphi_m)| = |\nabla\varphi_m|$, то

$$cap_\alpha(K, F^m, G) \le \int_G |\nabla\varphi_m|^\alpha dx = \int_{\delta_m}^{a/4} dx_1 \int_{-g(x_1)}^{g(x_1)} dx_2 \int_{-b}^{b} [\varepsilon_m / 4bg(x_1)]^{\alpha/(\alpha-1)} dx_3 =$$

$$= 4b\left(\frac{\varepsilon_m}{4b}\right)^{\alpha/(\alpha-1)} \int_{\delta_m}^{a/4} \frac{dx_1}{[g(x_1)]^{1/(\alpha-1)}} = \varepsilon_m,$$

откуда $\lim\limits_{m\to\infty} cap_\alpha(K, F^m, G) = 0$, и лемма 1 доказана.

Лемма 2. Для каждого $2 < \beta \le 3$ при условии

$$\int_0^a \frac{du}{[g'(u)u]^{1/(\beta-1)}} < +\infty$$

последовательность множеств $\{F^m\}_{m=1}^{\infty}$ не будет β-фундаментальной.

Доказательство. Подобно, как и в лемме 1, достаточно убедиться, что $\lim\limits_{m\to\infty} cap_\beta(K, F^m, G) > 0$ для некоторого произвольного заданного континуума $K \subset G$.

В качестве континуума $K \subset G$ выберем здесь образ множества

$$\{(r,\theta,z): r = a/2,\ \ 0 < \theta_1 \le \theta \le \theta_2 < \pi/4,\ \ |z| \le b_1 < b\}$$

при отображении

$$T = (x_1 = r\cos\theta,\ \ x_2 = g(r\sin|\theta|)\operatorname{sgn}\theta,\ \ x_3 = z)$$

области $D = \{(r,\theta,z): 0 < r < a/\cos\theta,\ \ |\theta| < \pi/4,\ \ |z| < b\}$ на область G.

Возьмём произвольную функцию ψ, допустимую для конденсатора (K, F^m, G). Тогда функция $\psi^* = \psi \circ T$ допустима для конденсатора $(T^{-1}(K), T^{-1}(F^m), D)$. Поскольку величина $|\nabla T|$ на основании свойств функции g ограничена сверху в области D некоторой положительной постоянной $c = c(g)$, то, производя замену переменных и используя неравенство Гельдера, имеем цепочку соотношений

$$\int_G |\nabla\psi|^\beta dx \ge \iiint_D \left(\frac{|\nabla\psi^*|}{|\nabla T|}\right)^\beta g'(r\sin\theta) r\,dr\,d\theta\,dz \ge \int_{-b_1}^{b_1} dz \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_0^{a/2} \frac{|\nabla\psi^*|^\beta}{c^\beta} g'(r\sin\theta) r\,dr \ge$$

$$\ge \frac{\left(\int_{-b_1}^{b_1} dz \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_0^{a/2} |\nabla\psi^*| dr\right)^\beta}{c^\beta \left\{\int_{-b_1}^{b_1} dz \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_0^{a/2} \frac{dr}{[g'(r\sin\theta) r]^{1/(\beta-1)}}\right\}^{\beta-1}} \ge \frac{[2b_1(\theta_2-\theta_1)]^\beta}{c^\beta \left\{2b_1(\theta_2-\theta_1) \int_0^{a/2} \frac{dr}{[g'(r\sin\theta) r]^{1/(\beta-1)}}\right\}^{\beta-1}} =$$

$$= 2b_1(\theta_2-\theta_1) \Big/ c^\beta \left\{(\sin\theta_1)^{\frac{2-\beta}{\beta-1}} \int_0^{\frac{a}{2}\sin\theta_1} \frac{du}{[g'(u)u]^{1/(\beta-1)}}\right\}^{\beta-1} = t.$$

Отсюда, учитывая произвол в выборе допустимой для (K, F^m, G) функции ψ и сходимость интеграла в условии леммы 2, приходим к оценке $0 < t \le cap_\beta(K, F^m, G)$, имеющей место для любого $m = 1, 2, \ldots$. **Лемма 2 доказана.**

5. Перейдём к обоснованию теоремы из п. 3.

При построениях ниже нами используется следующее замечание о конкретном g-клине G.

Рассмотрим функцию $g(u)=u^{\beta-1}$, где $u\geq 0$ и $2<\beta\leq 3$. Опираясь на леммы 1 и 2, нетрудно видеть, что в области $G=\{x:0<x_1<a,|x_2|<x_1^{\beta-1},|x_3|<b\}$ при любом $2<\alpha\leq\beta$ носителем одного из простых α-концов служит ребро $E=\{x:x_1=x_2=0,|x_3|\leq b\}$ клина G, а остальные простые α-концы области G имеют одноточечные носители; если же $\beta<\alpha\leq 3$, то носители всех простых α-концов области G одноточечны.

Фиксируя теперь произвольные параметры $p,q>2$, построим пару жордановых областей D и Δ и квазиконформное в (p,q)-среднем отображение $f:D\to\Delta$ так, что f не осуществляет биекцию между множествами простых α-концов областей D и Δ ни при каком $2<\alpha\leq 3$.

Для этого предварительно построим следующий конечный набор вспомогательных отображений. Пусть m – некоторое натуральное число. При каждом $i=1,...,m$ рассмотрим области

$$D_i=\left\{x:0<x_1<\frac{1}{m},\ \left|x_2-\frac{2i-1}{m}\right|<\frac{1}{m}(mx_1)^{1+i/m},\ |x_3|<1\right\}$$

и

$$\Delta_i=\left\{y:0<y_1<\frac{1}{m},\ \left|y_2-\frac{2i-1}{m}\right|<\frac{1}{m}(my_1)^{1+(i-1)/m},\ |y_3|<1\right\}$$

и определим диффеоморфизм $y=f_i(x):D_i\to\Delta_i$, полагая

$$y_1=x_1,\quad y_2=\frac{2i-1}{m}+\frac{1}{m}|mx_2-2i+1|^{\frac{m+i-1}{m+i}}\operatorname{sgn}(mx_2-2i+1),\quad y_3=x_3\ .$$

Производя простые вычисления, получим соотношения

$$\ell(x,f_i)\geq c_1,\ |f_i'(x)|\leq c_2\left|x_2-\frac{2i-1}{m}\right|^{-\frac{1}{m+i}},\quad |J(x,f_i)|=c_3\left|x_2-\frac{2i-1}{m}\right|^{-\frac{1}{m+i}},$$

$$H_I(x,f_i)\leq c_4\left|x_2-\frac{2i-1}{m}\right|^{-\frac{1}{m+i}},\quad H_0(x,f_i)\leq c_5\left|x_2-\frac{2i-1}{m}\right|^{-\frac{2}{m+i}},$$

где положительные постоянные c_k, $k=1,...,5$, зависят только от m. В силу этих соотношений легко проверить, что оба интеграла

$$\int_{D_i}H_I^p(x,f_i)|J(x,f_i)|dx \quad \text{и} \quad \int_{D_i}H_0^q(x,f_i)dx$$

сходятся, если $m>\max\{p,2q\}$.

Следовательно, при таких m каждое отображение $f_i:D_i\to\Delta_i$ квазиконформно в (p,q)-среднем, и пусть далее $m>\max\{p,2q\}$ – произвольно зафиксированное натуральное число.

Нетрудно видеть, что для каждого $2<\alpha\leq 3$ найдётся i такое, что отображение $f_i:D_i\to\Delta_i$ не осуществляет биективного соответствия между множествами простых α-концов областей D_i и Δ_i. Действительно, из условия $2<\alpha\le 3$ вытекает, что $2+(i-1)/m<\alpha\le 2+i/m$ с некоторыми $i=1,...,m$. Следовательно, согласно сделанному в начале примера замечанию, носителем одного из простых α-концов области D_i будет ребро клина D_i, а носители всех простых α-концов области Δ_i одноточечны. Поскольку же каждое отображение $f_i : D_i \to \Delta_i$ продолжается до гомеоморфизма замкнутых областей, то, разумеется, найденное выше отображение f_i не может осуществлять биекцию пространств αD_i и $\alpha\Delta_i$.

Завершая построение примера, в качестве областей D и Δ рассмотрим $D=\bigcup\limits_{i=o}^{m} D_i$ и $\Delta=\bigcup\limits_{i=o}^{m}\Delta_i$, где D_0 и Δ_0 означают множества

$$D_0=\left\{x:\frac{1}{m}<x_1<2,\ 0<x_2<2,\ |x_3|<1\right\}\cup\left\{x:x_1=\frac{1}{m},\ \frac{2i-2}{m}<x_2<\frac{2i}{m},i=1,...,m,\ |x_3|<1\right\}$$

и

$$\Delta_0=\left\{y:\frac{1}{m}<y_1<2,\ 0<y_2<2,\ |y_3|<1\right\}\cup\left\{y:y_1=\frac{1}{m},\ \frac{2i-2}{m}<y_2<\frac{2i}{m},i=1,...,m,\ |y_3|<1\right\}.$$

Определим гомеоморфизм $f:D\to\Delta$, полагая $f(x)=x$ при $x\in D_0$ и $f(x)=f_i(x)$ при $x\in D_i$, $i=1,...,m$.

Совершенно ясно, что f является отображением, квазиконформным в (p,q)-среднем. В то же время, в силу построений это отображение не может осуществлять биекцию множеств простых α-концов областей D и Δ ни при каком $2<\alpha\le 3$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Caratheodory C. Über die Bergenyung einfach zusammenhängender Gebite // Math. Ann. 1913. 73. S. 323-370.

2. Зорич В. А. Соответствие границ при Q-квазиконформных отображениях шара // Докл. АН СССР. 1962. 145. № 6. С. 1209-1212.

3. Гольдштейн В. М., Водопьянов С. К. Метрическое пополнение области при помощи конформной емкости, инвариантное при квазиконформных отображениях. // Докл. АН СССР. 1978. 238. № 5. С. 1040-1042.

4. Кругликов В. И., Пайков В. И. Соответствие границ для пространственных отображений, квазиконформных в среднем. Донецк: Донец. ун-т, 1983. 63 с. (Рукопись деп. в УкрНИИНТИ, № 371).

5. Näkki R. Prime ends and quasiconformal mappings // J. Anal. Math. 1979. 35. P. 13-40.

6. Суворов Г. Д. Обобщённый «принцип длины и площади» в теории отображений. Киев: Наук. думка, 1985. 280 с.

7. Gehring F. W. Rings and quasiconformal mappings in space // Trans. Amer. Math. Soc. 1962. 103. № 3. P. 353-393.

8. Gehring F. W. Lipschitz mapping and p-capacity of rings in n-space // Advances in the theory of Riemann surfaces. Ann. Math. Studies, 66. Princeton, New Jersey, 1971. P. 175-193

9. Кругликов В. И. Емкости конденсаторов и пространственные отображения, квазиконформные в среднем // Матем. сб. М., 1986. 130. № 2. С. 185-206.

10. Näkki R. Boundary behavior of quasiconformal mappings in n-space // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI. 1970. № 484. P. 1-50.