Василий Александрович БАРИНОВ – доцент кафедры математического моделирования, кандидат физико-математических наук

Нина Николаевна БУТАКОВА – доцент кафедры математического моделирования, кандидат физико-математических наук

УДК 532.59: 532.547

ТРАЕКТОРИИ ФАЗ ПРИ ВОЛНОВОМ ДВИЖЕНИИ ДВУХФАЗНОЙ СМЕСИ

АННОТАЦИЯ. Получены уравнения траекторий фаз при волновом движении двухфазной смеси. Найдено аналитическое выражение различия траекторий разных фаз.

The equations of trajectories fluid and disperse particles during the research for progressive waves are studied. The analytic comparison of trajectories is performed.

В статьях [1], [2] приведено решение линейной задачи о распространении поверхностных волн по слою дисперсной жидкости. В этих работах получены выражения для скоростей фаз, найдены декремент затухания и фазовая скорость волны. Данная работа посвящена определению траекторий частиц несущей и дисперсной фаз в линейном приближении.

Рассматривается слой двухфазной жидкости постоянной глубины, находящийся на твердом горизонтальном основании. Свободная поверхность слоя граничит со средой пренебрежимо малой плотности, характеризующейся постоянным давлением P_a (в частности, атмосферным). Предполагается, что несущая фаза $(i=1)$ – идеальная несжимаемая жидкость, вязкость которой проявляется только на межфазной границе; дисперсная фаза $(i=2)$ – недеформируемые частицы. Движение такой среды в отсутствие теплообмена и массообмена описывается двухскоростными уравнениями сохранения массы и импульса [3]. Система, описывающая движение двухфазной смеси, в случае распространения по поверхности слоя волны длиной λ получена в работе [2]. В области, занятой смесью, выполняются уравнения

$$-\frac{\partial\alpha'}{\partial t}+\nabla\left(\left(1-\alpha_0-\alpha'\right)\mathbf{v}_1\right)=0,$$

$$\frac{\partial\alpha'}{\partial t}+\nabla\left(\left(\alpha_0+\alpha'\right)\mathbf{v}_2\right)=0,$$

$$\left(\rho_1^o+\frac{\chi}{2}\rho_1^o\left(\alpha_0+\alpha'\right)\right)\frac{d\mathbf{v}_1}{dt}-\frac{\chi}{2}\rho_1^o\left(\alpha_0+\alpha'\right)\frac{d\mathbf{v}_2}{dt}-R\left(\alpha_0+\alpha'\right)\left(\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1\right)+\nabla p=0,$$

$$\left(\rho_2^o+\frac{\chi}{2}\rho_1^o\left(1-\alpha_0-\alpha'\right)\right)\frac{d\mathbf{v}_2}{dt}-\frac{\chi}{2}\rho_1^o\left(1-\alpha_0-\alpha'\right)\frac{d\mathbf{v}_1}{dt}+R\left(1-\alpha_0-\alpha'\right)\left(\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1\right)+\nabla p=0.$$

$$\rho_i = \rho_i^o \alpha_i,\ \alpha_2 = \alpha_0 + \alpha',\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1,\ \rho_i^o = const,\ i = 1,2.$$

Здесь α_i, v_i, ρ_i, ρ_i^o – объемная концентрация, вектор скорости, приведенная и истинная плотность i-й фазы; $P_i = p + \rho_i^0 gz$ – давление i-й фазы, p – возмущение давлений, вызванное распространением волны [1]; α' – возмущение концентрации дисперсной фазы; g – вектор ускорения силы тяжести. Эмпирический коэффициент R характеризует силу вязкого трения Стокса, вызванную несовпадением скоростей фаз. Например, для сферических частиц радиуса a его значение принимается равным $R = 9\eta/2a^2$, где η - коэффициент динамической вязкости жидкости [3]. Второе слагаемое в правой части уравнений движения (1) соответствует силе присоединенных масс, которая возникает из-за ускоренного движения частиц относительно несущей фазы [4]. Значение коэффициента χ определяется экспериментально. В предельном случае идеальной несжимаемой несущей фазы $\chi = 1$ [3].

На свободной поверхности $z = \xi(t,x,y)$ заданы кинематическое и динамическое условия [1], [2]

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} - (1-\alpha_0-\alpha')v_{1z} - (\alpha_0+\alpha')v_{2z} + \frac{\partial\xi}{\partial x}\left[(1-\alpha_0-\alpha')v_{1x} + (\alpha_0+\alpha')v_{2x}\right] + \frac{\partial\xi}{\partial y}\left[(1-\alpha_0-\alpha')v_{1y} + (\alpha_0+\alpha')v_{2y}\right] = 0,$$

$$p - \left[\rho_1^o(1-\alpha_0-\alpha') + \rho_2^o(\alpha_0+\alpha')\right]g\xi = 0.$$

На дне при $z = -l$ имеем условия непротекания

$$v_{iz} = 0,\quad i = 1,2.$$

Полученная система уравнений и граничных условий является замкнутой и составляет нелинейную краевую задачу для определения поля скоростей волнового движения фаз, возмущений давления и концентрации, а также формы свободной поверхности.

Решение данной задачи в линейном приближении в случае плоскопараллельного волнового движения в плоскости xz было получено в работе [2]. Скорости частиц дисперсной и несущей фазы определяются выражениями

$$v_{ix} = c_o\varepsilon\frac{e^{-\beta t}}{sh\,kl}\left[A_i \sin k(x-c_ot) + B_i \cos k(x-c_ot)\right] ch\,k(z+l),$$

$$v_{iz} = c_o\varepsilon\frac{e^{-\beta t}}{sh\,kl}\left[B_i \sin k(x-c_ot) - A_i \cos k(x-c_ot)\right] sh\,k(z+l),\ i = 1,2,$$

$$A_i = m_iK + n_iL,\ B_i = -n_iK + m_iL,\ i = 1,2,$$

$$m_1 = \frac{1}{\beta^2 + k^2c_0^2}\left[k^2c_0^2 + 2(\beta^2 + k^2c_0^2)\rho_1^0\rho_2^0(\rho^0 - \rho_1^0)(\chi\rho^0 + 2\rho_2^0)/d\right],$$

$$m_2 = \frac{1}{\beta^2 + k^2c_0^2}\left[k^2c_0^2 + 2(\beta^2 + k^2c_0^2)\rho_1^{0^2}(\rho^0 - \rho_2^0)(\chi\rho^0 + 2\rho_2^0)/d\right],$$

$$n_1 = \frac{1}{(\beta^2 + k^2c_0^2)kc_0}\left[-\beta k^2c_0^2 + 2(\beta^2 + k^2c_0^2)\rho_2^0(\rho^0 - \rho_1^0)(2R\rho^0 - \beta\rho_1^0(\chi\rho^0 + 2\rho_2^0))/d\right],$$

$$n_2 = \frac{1}{(\beta^2 + k^2c_0^2)kc_0}\left[-\beta k^2c_0^2 + 2(\beta^2 + k^2c_0^2)\rho_1^0(\rho^0 - \rho_2^0)(2R\rho^0 - \beta\rho_1^0(\chi\rho^0 + 2\rho_2^0))/d\right],$$

$$d=\left(2R\rho^0-\beta\rho_1^0\left(\chi\rho^0+2\rho_2^0\right)\right)^2+\rho_1^{0\,2}\left(\chi\rho^0+2\rho_2^0\right)^2,\quad \rho^0=\rho_1^0(1-\alpha_0)+\rho_2^0\alpha_0 .$$

Здесь $k=2\pi/\lambda$ – волновое число, $\varepsilon=k\xi_{max}$ – малый параметр, характеризующий отношение высоты волны к ее длине, β и c_0 – декремент затухания и фазовая скорость волны соответственно, приведенные в работе [2].

Определим траектории частиц несущей и дисперсной фазы при распространении по поверхности слоя затухающей бегущей волны. Координаты частиц i-й фазы $x_i(t)$, $z_i(t)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{dx_i(t)}{dt}=v_{ix},\\[2mm] \dfrac{dz_i(t)}{dt}=v_{iz}, \quad i=1,2.\end{cases}$$

С учетом решения линейной задачи уравнения для определения траекторий запишутся так

$$\frac{dx_i(t)}{dt}=c_o\varepsilon\frac{e^{-\beta t}}{sh\,kl}\left[A_i\sin k(x-c_ot)+B_i\cos k(x-c_ot)\right]ch\,k(z+l),$$

$$\frac{dz_i(t)}{dt}=c_o\varepsilon\frac{e^{-\beta t}}{sh\,kl}\left[B_i\sin k(x-c_ot)-A_i\cos k(x-c_ot)\right]sh\,k(z+l).$$

Решение данных уравнений будем искать в виде рядов по малому параметру ε

$$x_i(t)=X_{i0}(t)+\varepsilon X_{i1}(t)+\ldots,\quad z_i(t)=Z_{i0}(t)+\varepsilon Z_{i1}(t)+\ldots,\quad i=1,2 .$$

Подставляя эти разложения в уравнения и выписывая коэффициенты при ε^0 и ε^1, получаем следующие уравнения

$$\frac{dX_{i0}}{dt}=0,\quad \frac{dZ_{i0}}{dt}=0,$$

$$\frac{dX_{i1}}{dt}=c_o\frac{e^{-\beta t}}{sh\,kl}\left[A_i\sin k(X_{i0}-c_ot)+B_i\cos k(X_{i0}-c_ot)\right]ch\,k(Z_{i0}+l),$$

$$\frac{dZ_{i1}}{dt}=c_o\frac{e^{-\beta t}}{sh\,kl}\left[B_i\sin k(X_{i0}-c_ot)-A_i\cos k(X_{i0}-c_ot)\right]sh\,k(Z_{i0}+l),\quad i=1,2 .$$

Интегрируя первые два уравнения, получаем

$$X_{i0}=\text{const},\quad Z_{i0}=\text{const},\quad i=1,2 .$$

Подставляя эти выражения в последние два уравнения, получаем систему уравнений для определения X_{i1} и Z_{i1}

$$\frac{dX_{i1}}{dt}=c_o\frac{e^{-\beta t}}{sh\,kl}\left[A_i\sin k(X_{i0}-c_ot)+B_i\cos k(X_{i0}-c_ot)\right]ch\,k(Z_{i0}+l),$$

$$\frac{dZ_{i1}}{dt}=c_o\frac{e^{-\beta t}}{sh\,kl}\left[B_i\sin k(X_{i0}-c_ot)-A_i\cos k(X_{i0}-c_ot)\right]sh\,k(Z_{i0}+l),\quad i=1,2 .$$

Интегрируя эти уравнения, находим

$$X_{i1}=\frac{c_oe^{-\beta t}}{\beta^2+k^2c_o^2}\left[-(\beta A_i+kc_oB_i)\sin k(X_{i0}-c_ot)+(kc_oA_i-\beta B_i)\cos k(X_{i0}-c_ot)\right]\frac{ch\,k(Z_{i0}+l)}{sh\,kl}+C_{xi},$$

$$Z_{i1}=\frac{c_o e^{-\beta t}}{\beta^2+k^2c_o^2}\left[\left(kc_oA_i-\beta B_i\right)\sin k\left(X_{i0}-c_ot\right)+\left(\beta A_i+kc_oB_i\right)\cos k\left(X_{i0}-c_ot\right)\right]\frac{sh\,k\left(Z_{i0}+l\right)}{sh\,kl}+C_{zi},$$

$$i=1,2$$

где C_{xi}, C_{zi} – произвольные константы. Определяем постоянные интегрирования так, чтобы величины X_{i0} и Z_{i0} были лагранжевыми координатами частицы i-й фазы в момент времени $t=0$. Для этого нужно взять

$$C_{xi}=\frac{c_o}{\beta^2+k^2c_o^2}\left[\left(\beta A_i+kc_oB_i\right)\sin kX_{i0}+\left(\beta B_i-kc_oA_i\right)\cos kX_{i0}\right]\frac{ch\,k\left(Z_{i0}+l\right)}{sh\,kl},$$

$$C_{zi}=\frac{c_o}{\beta^2+k^2c_o^2}\left[\left(\beta B_i-kc_oA_i\right)\sin kX_{i0}-\left(\beta A_i+kc_oB_i\right)\cos kX_{i0}\right]\frac{sh\,k\left(Z_{i0}+l\right)}{sh\,kl},$$

$$i=1,2.$$

Теперь можно записать уравнения движения частицы i-й фазы в линейном приближении

$$x_i=X_{i0}+\frac{c_o}{\beta^2+k^2c_o^2}\Big\{-\left(\beta A_i+kc_oB_i\right)\left[e^{-\beta t}\sin k\left(X_{i0}-c_ot\right)-\sin kX_{i0}\right]+$$
$$+\left(kc_oA_i-\beta B_i\right)\left[e^{-\beta t}\cos k\left(X_{i0}-c_ot\right)-\cos kX_{i0}\right]\Big\}\frac{ch\,k\left(Z_{i0}+l\right)}{sh\,kl},$$

$$z_i=Z_{i0}+\frac{c_o}{\beta^2+k^2c_o^2}\Big\{\left(kc_oA_i-\beta B_i\right)\left[e^{-\beta t}\sin k\left(X_{i0}-c_ot\right)-\sin kX_{i0}\right]+$$
$$+\left(\beta A_i+kc_oB_i\right)\left[e^{-\beta t}\cos k\left(X_{i0}-c_ot\right)-\cos kX_{i0}\right]\Big\}\frac{sh\,k\left(Z_{i0}+l\right)}{sh\,kl},\qquad i=1,2.$$

Путем элементарных преобразований из этих уравнений получаем равенства

$$\frac{\left(x_i-X_{i0}-\varepsilon C_{xi}\right)^2}{\left(c_o\varepsilon\sqrt{\frac{A_i^2+B_i^2}{\beta^2+k^2c_o^2}}\frac{ch\,k\left(Z_{i0}+l\right)}{sh\,kl}\right)^2}+\frac{\left(z_i-Z_{i0}-\varepsilon C_{zi}\right)^2}{\left(c_o\varepsilon\sqrt{\frac{A_i^2+B_i^2}{\beta^2+k^2c_o^2}}\frac{sh\,k\left(Z_{i0}+l\right)}{sh\,kl}\right)^2}=e^{-2\beta t},\ i=1,2,$$

из которых, в силу малости β, следует, что частицы несущей и дисперсной фазы описывают при своем движении разомкнутые траектории, близкие к эллипсу с полуосями

$$a=c_o\varepsilon\sqrt{\frac{A_i^2+B_i^2}{\beta^2+k^2c_o^2}}\frac{ch\,k\left(Z_{i0}+l\right)}{sh\,kl},\quad b=c_o\varepsilon\sqrt{\frac{A_i^2+B_i^2}{\beta^2+k^2c_o^2}}\frac{sh\,k\left(Z_{i0}+l\right)}{sh\,kl},\quad i=1,2.$$

Горизонтальная полуось больше вертикальной. С увеличением глубины вертикальная полуось уменьшается и на дне становится равной нулю. В случае отсутствия примесей ($\alpha_o=0$) или в случае равенства истинных плотностей фаз ($\rho_1^o=\rho_2^o$) траектории превращаются в эллипсы, что полностью соответствует классическим решениям [5]. Если отбросить силу трения, положив $R=0$, то имеем $\beta=0$ и траектории также являются эллипсами. Следовательно, разомкнутость траекторий обусловлена силой трения между фазами.

Исключая из уравнений движения время t, получаем траектории частиц несущей и дисперсной фазы

$$\frac{\left(x_i - X_{i0} - \varepsilon C_{xi}\right)^2}{ch^2 k\left(b_i + l\right)} + \frac{\left(z_i - Z_{i0} - \varepsilon C_{zi}\right)^2}{sh^2 k\left(b_i + l\right)} = \frac{c_o^2 \varepsilon^2 \left(A_i^2 + B_i^2\right) e^{-\frac{2\beta a_i}{c_o}}}{\left(\beta^2 + k^2 c_o^2\right)\mathrm{sh}^2 kl} \exp\left[-\frac{2\beta}{kc_o} \times\right.$$

$$\left.\times\, arctg \frac{\left(z_i - Z_{i0} - \varepsilon C_{zi}\right)\left(kc_o A_i - \beta B_i\right) - th\, k\left(Z_{i0} + l\right)\left(x_i - X_{i0} - \varepsilon C_{xi}\right)\left(\beta A_i + kc_o B_i\right)}{\left(z_i - Z_{i0} - \varepsilon C_{zi}\right)\left(\beta A_i + kc_o B_i\right) + th\, k\left(Z_{i0} + l_i\right)\left(x_i - X_{i0} - \varepsilon C_{xi}\right)\left(kc_o A_i - \beta B_i\right)}\right],$$

$$i = 1,2. \quad (1)$$

Это уравнение задает спираль, выходящую из точки с координатами $\left(X_{i0}, Z_{i0}\right)$.

Кривая (1) схематически изображена на рис. 1. Первый виток спирали близок к эллипсу с большой и малой полуосями a и b, соответственно. Движение происходит по часовой стрелке. Центр траектории соответствует состоянию покоя, наступающему при полном затухании волны. Для примера построены траектории движения частиц несущей и дисперсной фазы с лагранжевыми координатами $X_{10} = X_{20} = 0$, $Z_{10} = Z_{20} = -0{,}8$, вызванного распространением по свободной поверхности слоя глубиной $l = 2$ м волны длиной $\lambda = 1$ м начальная высота волны $h = 0{,}1$ м. Плотность несущей фазы $\rho_1^o = 1000\ \text{кг}/\text{м}^3$, коэффициент динамической вязкости $\eta = 1{,}004 \cdot 10^{-3}$ кг/(м·с); дисперсная фаза представлена сферическими частицами радиуса $a = 0{,}25 \cdot 10^{-2}$ м, концентрация примесей в покоящемся слое $\alpha_o = 0{,}1$. На рис. 1 и рис. 2 изображены траектории частиц в случае $\rho_2^o = 500\ \text{кг}/\text{м}^3$ и $\rho_2^o = 1500\ \text{кг}/\text{м}^3$, соответственно. Из графиков видно, что более легкие по сравнению с несущей жидкостью частицы движутся по траекториям большего «радиуса», чем тяжелые. Известно [4], что если плотность сферической частицы больше плотности жидкости ($\rho_2^o > \rho_1^o$),то при движении среды ее скорость будет меньше, т. е. частица отстает от жидкости. Если же $\rho_2^o < \rho_1^o$, то частица опережает жидкость и, следовательно, движется по траектории большего размера. Этим можно объяснить различие траекторий.

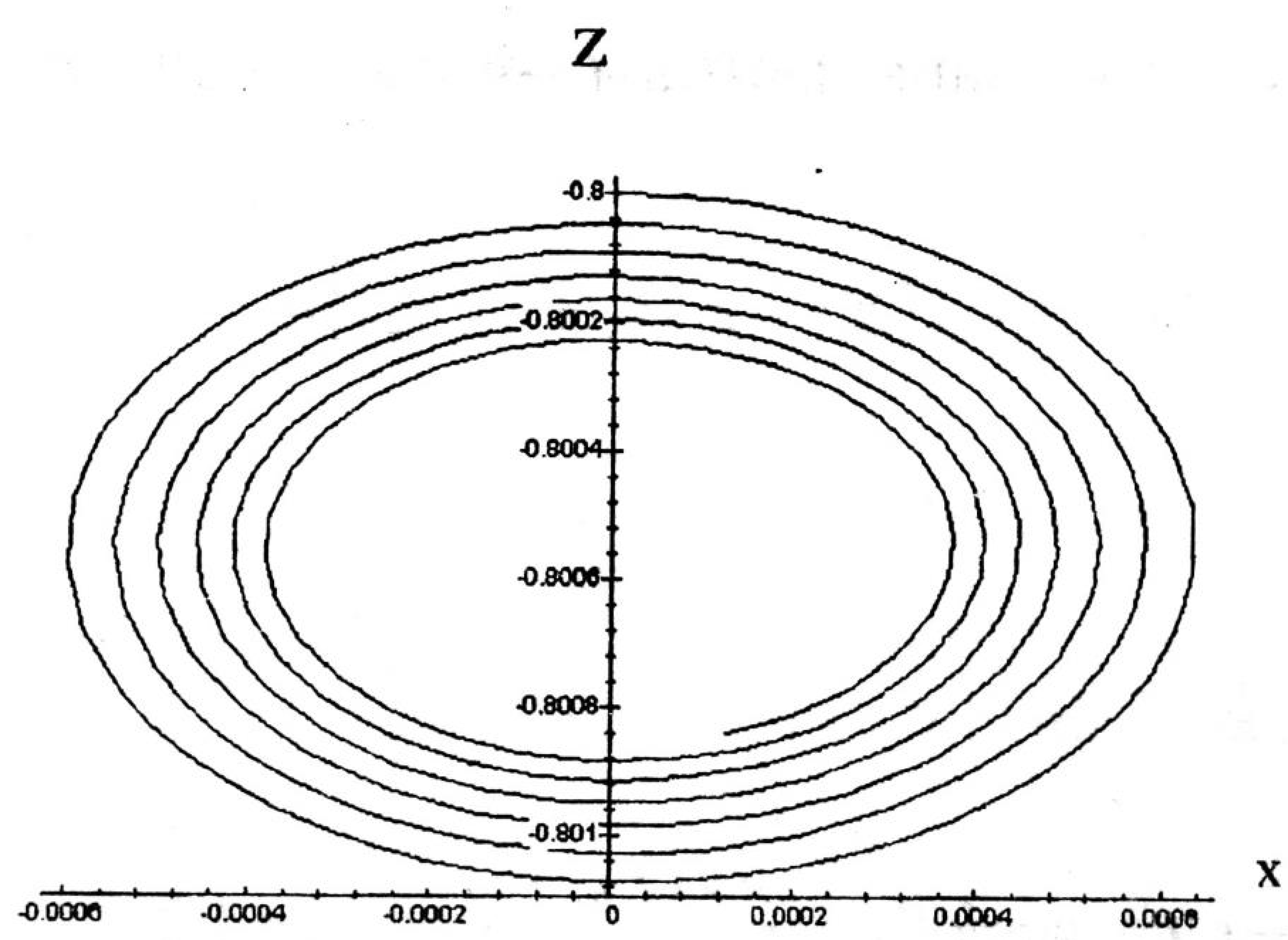

Рис. 1. Схематическое изображение траектории движения частиц

В случаях, представленных на рисунках, «радиусы» движения частиц отличаются примерно в полтора раза. Оценку разницы между траекториями частиц можно получить, если пренебречь экспонентой в правой части (8). Это возможно, так как разомкнутость траекторий, обусловленная влиянием силы межфазного трения, невелика. После несложных преобразований получаем, что большие полуоси эллипсов, по которым движутся частицы с лагранжевыми координатами X_0, и Z_0, отличаются на величину

$$\Delta = b - a = \frac{4\rho^o k c_o^2 \varepsilon \left(\rho_2^o - \rho_1^o\right)\left[\left(\beta^2 + k^2 c_o^2\right)\left(\chi\rho_1^o + \rho_1^o + \rho_2^o\right) - 2\beta R\right]\sqrt{K^2 + L^2}\, ch\, k\left(Z_0 + l\right)}{\left(\beta^2 + k^2 c_o^2\right)\sqrt{d}\left(\sqrt{d_{\rho 1}} + \sqrt{d_{\rho 2}}\right) sh\, kl},$$

где

$$d_{\rho 1} = \left(2R - \beta\rho_1^0(\chi + 2)\right)^2 + k^2 c_0^2 \rho_1^{0^2} (\chi + 2)^2,$$

$$d_{\rho 2} = \left(2R - \beta\left(\chi\rho_1^0 + 2\rho_2^0\right)\right)^2 + k^2 c_0^2 \left(\chi\rho_1^0 + 2\rho_2^0\right)^2.$$

В силу малости β эта разность принимает положительные значения при $\rho_2^o > \rho_1^o$ и отрицательные при $\rho_2^o < \rho_1^o$. Следовательно, менее плотные частицы движутся по большим траекториям, чем частицы с большей плотностью, что и видно на рис. 2 и рис. 3

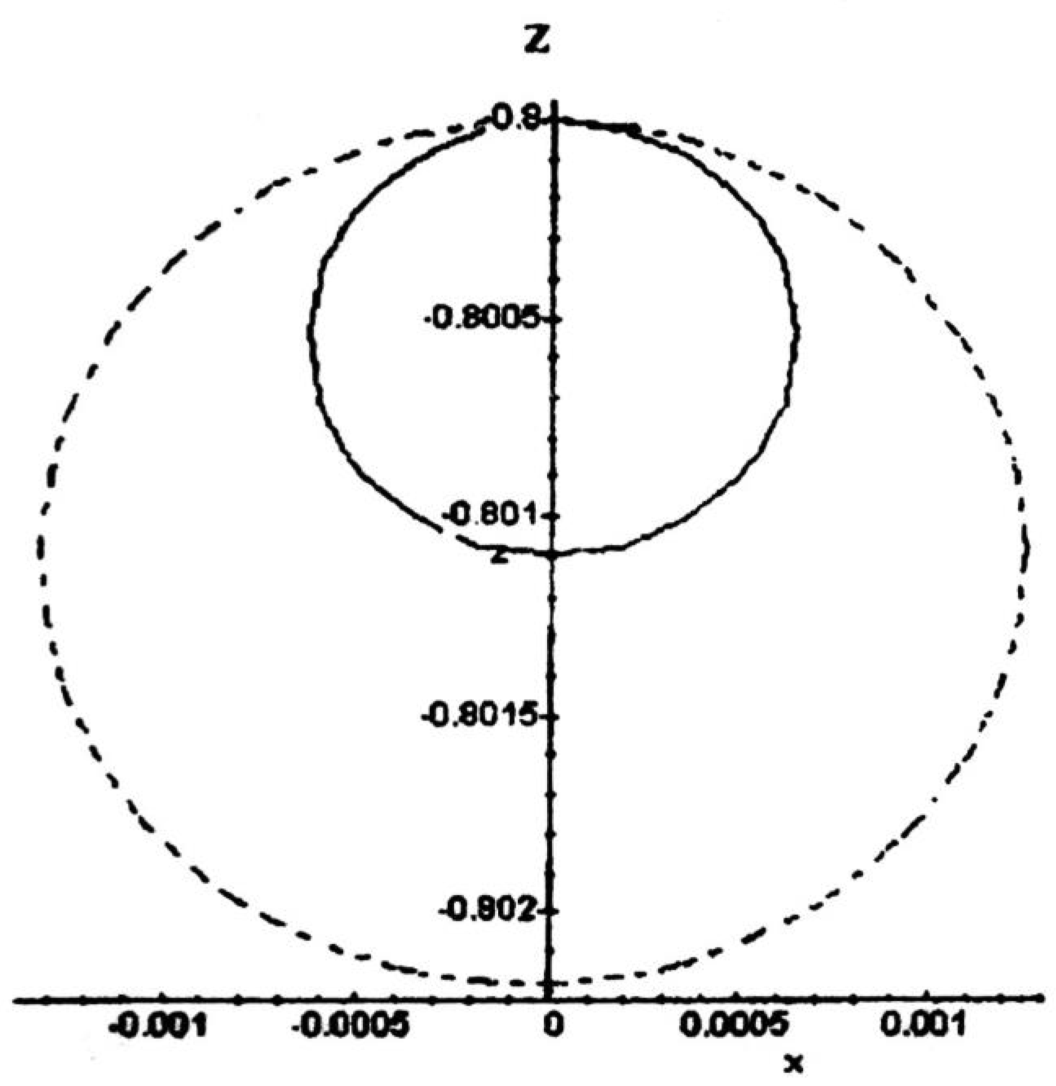

Рис. 2. Траектории движения частиц несущей (——) и дисперсной (- - - -) фаз при $\rho_2^o = 500$ кг/м^3.

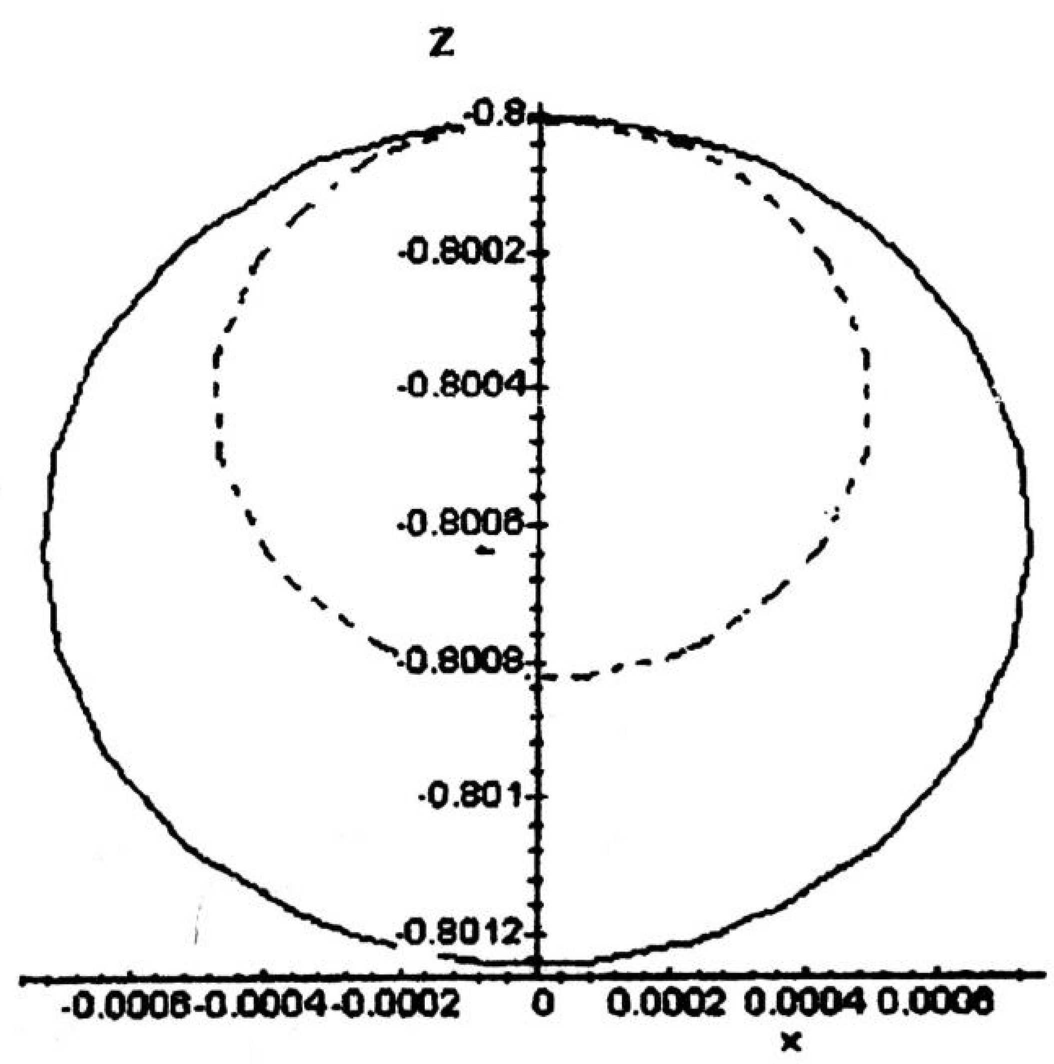

Рис. 3. Траектории движения частиц несущей (——) и дисперсной (- - - -) фаз при $\rho_2^o = 1500$ кг/м^3.

Таким образом, показано, что за счет межфазного трения траектории частиц несущей и дисперсной фазы разомкнуты уже в линейном приближении. Получена формула, описывающая различие траектории волнового движения частиц несущей и дисперсной фазы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баринов В. А., Бутакова Н. Н. Волны на свободной поверхности двухфазной среды // Прикл. мех. и техн. физ. 2002. Т.43. № 4. С.27-35.

2. Баринов В. А., Бутакова Н. Н. Распространение волн по свободной поверхности двухфазной смеси // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2003. № 6. С.94-102.

3. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч.1. М.: Наука, 1987. 464 с.

4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 735 с.

5. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 816 с.