

Глеб Леонидович ГОРЫНИН –
заведующий кафедрой «Строительные
технологии и конструкции» Югорского
государственного университета, канди-
дат физико-математических наук

УДК 539.3

МЕТОД АСИМПТОТИЧЕСКОГО РАСЩЕПЛЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ИЗГИБА ПРЕДВАРИТЕЛЬНО ДЕФОРМИРОВАННЫХ КОМПЗИТОВ

АННОТАЦИЯ. В работе демонстрируется применение нового метода решения задач изгиба предварительно деформированных композитных балок в трехмерной постановке.

In work application of a new method of the decision of problems of a bend preliminary deformed composite beams in three-dimensional statement is shown.

Использование композитных конструкций в авиационной промышленности и судостроении становится повсеместным. Это связано со стремительно возрастающими требованиями к прочностным и весовым характеристикам авиалайнеров и морских судов. В силу особенностей технологического цикла производства композитов в их структуре имеются изначальные предварительные деформации, не достаточный учет которых приводит к непредсказуемому разрушению конструкции. Для расчета уровня напряжений, возникающих из-за предварительной деформации, используются пространственные уравнения теории упругости. В данной работе эти уравнения решаются с помощью метода асимптотического расщепления, который ранее с успехом применялся при решении задач продольно-поперечного изгиба балки и балки, лежащей на упругом основании, термоупругого деформирования слоистых стержней и продольно-поперечного изгиба слоистых плит [1-5]. Основная идея метода состоит в расщеплении исходной пространственной краевой задачи на систему плоских краевых задач, решаемых в сечении балки, и краевых одномерных задач в продольном направлении.

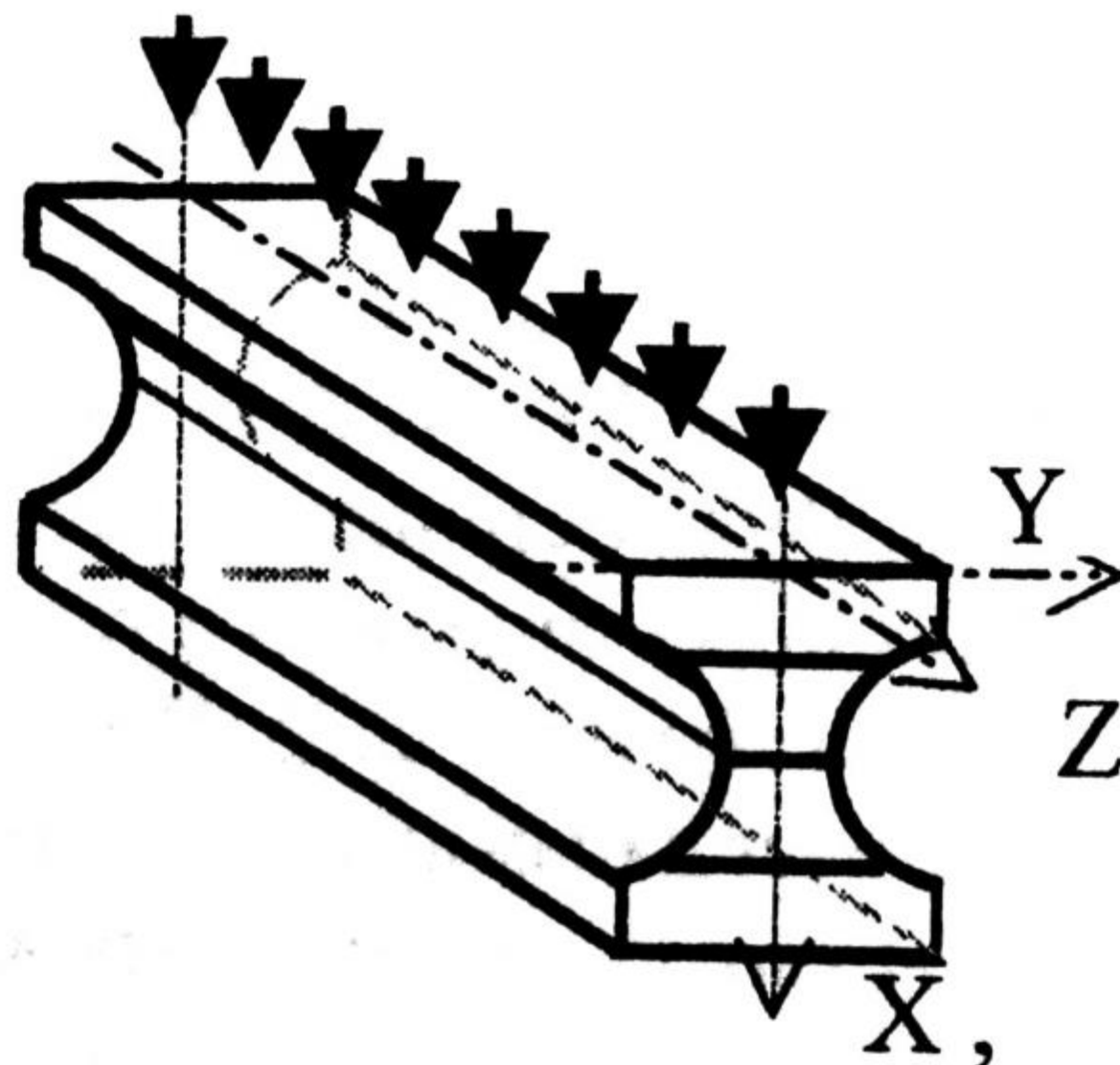


Рис. 1 Предварительно деформированная слоистая балка под действием поперечной нагрузки

Рассмотрим композитную балку с постоянным по длине произвольным поперечным сечением, симметричным относительно вертикальной ко-

ординатной прямой Ox , состоящую из произвольного числа упругих слоев, выполненных из различных изотропных материалов (Рис. 1). Ось z направлена вдоль оси балки. Начало координат расположено в верхней точке сечения балки. Слои нумеруем сверху вниз, i – номер текущего слоя, S – число слоев. Пусть u, v, w – перемещения точек балки в направлении осей x, y, z соответственно, $(\sigma_{\alpha\beta})_i$ – компоненты тензора напряжения на i -ом слое; $[\sigma_{\alpha n}]_i^j$ – скачок контактных напряжений, действующих на границу раздела i -го и j -го слоев в направлении α , $\alpha = \{x, y, z\}$; n_x, n_y – компоненты вектора нормали к поверхности балки либо к границе раздела слоев, λ_i, μ_i – упругие постоянные Ламе для каждого слоя. На боковую поверхность балки действуют распределенные поперечные нагрузки q_x , симметричные относительно плоскости xOz . Пусть \tilde{u} – характерное значение для перемещения u , h – высота стержня и L – его длина, \tilde{E} – характерное значение модуля Юнга. Будем рассматривать только такие стержни, для которых величина $\varepsilon = h/L$ является малым параметром, а ширина соразмерна с высотой или меньше ее. Перейдем к безразмерным переменным и функциям, для простоты не меняя их обозначения:

$$x \leftrightarrow x/h, y \leftrightarrow y/h, z \leftrightarrow z/L, u \leftrightarrow u/\tilde{u}, w \leftrightarrow w/\tilde{u}, v \leftrightarrow v/\tilde{u}, \lambda_i \leftrightarrow \lambda_i/\tilde{E},$$

$$\mu_i \leftrightarrow \mu_i/\tilde{E}, \sigma_{\alpha\beta} \leftrightarrow \frac{\sigma_{\alpha\beta}}{\tilde{E}}, q_\alpha \leftrightarrow \frac{q_\alpha}{\tilde{\sigma}}, \tilde{\sigma} = \frac{\tilde{\lambda}\tilde{u}}{h}. \quad (1)$$

Требуем выполнения уравнений равновесия внутри стержня и на его поверхности всюду за исключением торцов:

$$\frac{\partial(\sigma_{\beta x})_i}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_{\beta y})_i}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial(\sigma_{\beta z})_i}{\partial z} = 0, \quad \beta = \{x, y, z\}, \quad (2)$$

$$(\sigma_{\beta x})_i n_x + (\sigma_{\beta y})_i n_y = q_\beta, \quad q_y = 0, \quad q_z = 0. \quad (3)$$

На границе между слоями стержня требуем непрерывности контактных напряжений и перемещений

$$[(\sigma_{\beta n})_i]^j = 0, \quad (\sigma_{\beta n})_i = (\sigma_{\beta x})_i n_x + (\sigma_{\beta y})_i n_y, \quad i, j = [1, s], \quad (4)$$

$$(u)_j = (u)_i, \quad (v)_j = (v)_i, \quad (w)_j = (w)_i. \quad (5)$$

Будем считать, что прежде чем балка была объединена в единое деформируемое тело каждый из ее слоев был предварительно деформирован $(e_{\gamma\beta})_i^0$. Тогда если отсчитывать перемещения и соответствующие им деформации от этого предварительно деформированного состояния, то закон Гука принимает вид:

$$(\sigma_{\alpha\beta})_i = \lambda_i \theta \delta_{\alpha\beta} + 2\mu_i (e_{\alpha\beta} + (e_{\alpha\beta})_i^0), \quad \theta = \sum_{\gamma=1}^3 (e_{\gamma\gamma} + (e_{\gamma\gamma})_i^0), \quad i = 1, s, \quad (6)$$

где $e_{\gamma\beta}$ – компоненты линейного тензора деформаций.

Одним из распространенных способов предварительного деформирования слоя является его растяжение в направлении оси Z . Тогда деформации упругого слоя имеют вид:

$$(\varepsilon_{zz})_i^0 = \frac{\sigma_0}{E}, (\varepsilon_{xx})_i^0 = (\varepsilon_{yy})_i^0 = -\nu \frac{\sigma_0}{E}, (\varepsilon_{xy})_i^0 = (\varepsilon_{zy})_i^0 = (\varepsilon_{xz})_i^0 = 0. \quad (7)$$

В случае изготовления предварительно деформированных железобетонных конструкций в силу технологических особенностей (позтапность процессов деформации арматуры и застывания бетонной смеси) предварительные деформации всего слоя нельзя считать подчиненными закону упругости. В ряде случаев можно считать, что выполняются соотношения

$$(\varepsilon_{zz})_i^0 = \frac{\sigma_0}{E}, (\varepsilon_{xx})_i^0 = (\varepsilon_{yy})_i^0 = 0, (\varepsilon_{xy})_i^0 = (\varepsilon_{zy})_i^0 = (\varepsilon_{xz})_i^0 = 0. \quad (8)$$

Обобщая случаи формул (7)- (8) и другие подобные им случаи, будем считать, что выполнены соотношения

$$(\varepsilon_{\beta\beta})_i^0 = \alpha_i^\beta \xi_0(z), (\varepsilon_{xy})_i^0 = (\varepsilon_{zy})_i^0 = (\varepsilon_{xz})_i^0 = 0, \beta = \{x, y, z\}, \quad (9)$$

где $\xi_0(z)$ – функция предварительной деформации; $\alpha_i^\beta(x, y)$ – заданные функции распределения предварительной деформации по сечению балки.

Закон Гука (6) с учетом формул (9) имеет вид:

$$\begin{aligned} (\sigma_{\delta\beta})_i &= \lambda_i \theta \delta_{\delta\beta} + 2\mu_i \varepsilon_{\delta\beta} + (\chi_{\delta\beta})_i \xi_0, (\chi_{\delta\delta})_i = (\lambda_i + 2\mu_i) \alpha_i^\delta + \lambda_i (\alpha_i^\beta + \alpha_i^\gamma), \\ (\chi_{\delta\beta})_i &= 0, (\delta \neq \beta \neq \gamma). \end{aligned} \quad (10)$$

Будем рассматривать слоистые балки с симметричным сечением относительно оси x , для которых предварительная деформация также обладает симметрией:

$$\alpha_i^\beta(x, y) = \alpha_i^\beta(x, -y), \beta \in \{x, y, z\}. \quad (11)$$

Задача (2)- (6) является полукраевой [1], т.к. на торцах краевые условия не заданы. Для ее решения используем представление для перемещений, используемое при продольно поперечном изгибе [1]:

$$\begin{aligned} w_i^{(n)} &= w_\xi^{(n)}(z) + \sum_{k=1}^n W_{i,k}^z \frac{d^{2k} w_\xi^{(n)}}{dz^{2k}} \varepsilon^{2k}, \quad u_i^{(n)} = \sum_{k=1}^n W_{i,k}^x \frac{d^{(2k-1)} w_\xi^{(n)}}{dz^{(2k-1)}} \varepsilon^{2k-1}, \\ v_i^{(n)} &= \sum_{k=1}^n W_{i,k}^y \frac{d^{(2k-1)} w_\xi^{(n)}}{dz^{(2k-1)}} \varepsilon^{2k-1}. \end{aligned} \quad (12)$$

где n – номер асимптотического приближения; $w_\xi^{(n)}(z)$ – функция продольного смещения сечения, вызванного предварительной деформацией; $W_{i,k}^\beta(x, y)$ – характеристические функции векторного поля перемещений в поперечном сечении балки. Будем считать, что функция продольного смещения $w_0^{(n)}(z)$ равняется среднему перемещению точек поперечного сечения в продольном направлении, а средние перемещения в поперечных направлениях равняются нулю, это равносильно выполнению равенств

$$\sum_{i=1}^s \int_{F_i} W_{i,k}^\beta(x, y) dF = 0, \beta \in \{x, y, z\}, k = 1, n, \quad (13)$$

где F, F_i – площадь поперечного сечения балки и площадь i -го слоя поперечного сечения балки соответственно. Предположим, что функция предварительной деформации связана с функцией продольного смещения сечения с помощью соотношения:

$$\xi_0(z) = \sum_{k=1}^n \xi^{(2k-1)} \frac{d^{2k-1} w_\xi^{(n)}}{dz^{2k-1}} \varepsilon^{2k-1}, \quad (14)$$

где $\xi^{(2k-1)}$ – некоторые числа. Поперечную нагрузку, действующую на боковой поверхности, которая в общем случае зависит от предварительной деформации, представим в виде:

$$q_x^\xi(\Gamma, z) = f_x^q(\Gamma) \sum_{k=1}^n q_x^{(2k-1)} \frac{d^{2k-1} w_\xi^{(n)}}{dz^{2k-1}} \varepsilon^{2k-1}, \quad p_x^\xi(z) = \sum_{k=1}^n q_x^{(2k-1)} \frac{d^{2k-1} w_\xi^{(n)}}{dz^{2k-1}} \varepsilon^{2k-1},$$

$$q_x^{(1)} = 0, \quad p_x(z) = \oint_\Gamma q_x d\Gamma, \quad \oint_\Gamma f_x^q(\Gamma) d\Gamma = 1, \quad f_x^q(x, y) = f_x^q(x, -y), \quad (15)$$

где $q_x^{(2k)}$ ($k = 2, n$) – некоторые константы; Γ – множество граничных точек поперечного сечения балки; $f_x^q(\Gamma)$ – функции, заданные на границе сечения; p_x^ξ – суммарная поперечная нагрузка в сечении.

Путем дифференцирования равенств (12) получим компоненты тензора деформации и подставим их в закон Гука (10)

$$\begin{aligned} (\sigma_{xx}^w)_i^{(n)} &= \sum_{k=1}^n (\tau_{xx})_i^{(2k-1)} \frac{d^{2k-1} w_\xi^{(n)}}{dz^{2k-1}} \varepsilon^{2k-1} + \lambda_i W_{i,n}^z \frac{d^{2n+1} w_\xi^{(n)}}{dz^{2n+1}} \varepsilon^{2n+1}, \\ (\sigma_{yy}^w)_i^{(n)} &= \sum_{k=1}^n (\tau_{yy})_i^{(2k-1)} \frac{d^{2k-1} w_\xi^{(n)}}{dz^{2k-1}} \varepsilon^{2k-1} + \lambda_i W_{i,n}^z \frac{d^{2n+1} w_\xi^{(n)}}{dz^{2n+1}} \varepsilon^{2n+1}, \\ (\sigma_{zz}^w)_i^{(n)} &= \sum_{k=1}^n (\tau_{zz})_i^{(2k-1)} \frac{d^{2k-1} w_\xi^{(n)}}{dz^{2k-1}} \varepsilon^{2k-1} + (\lambda_i + 2\mu_i) W_{i,n}^z \frac{d^{2n+1} w_\xi^{(n)}}{dz^{2n+1}} \varepsilon^{2n+1}, \quad \beta \in \{x, y\}, \\ (\sigma_{xy}^w)_i^{(n)} &= \sum_{k=1}^n (\tau_{xy})_i^{(2k-1)} \frac{d^{2k-1} w_\xi^{(n)}}{dz^{2k-1}} \varepsilon^{2k-1}, \quad (\sigma_{\beta z}^w)_i^{(n)} = \sum_{k=1}^n (\tau_{\beta z})_i^{(2k)} \frac{d^{2k} w_\xi^{(n)}}{dz^{2k}} \varepsilon^{2k}. \end{aligned} \quad (16)$$

В формулах использованы характеристические функции тензорного поля напряжений в поперечном сечении балки $(\tau_{\beta\gamma}^w)_i^{(j)}$, которые связаны с характеристическими функциями векторного поля перемещений следующим образом:

$$\begin{aligned} (\tau_{zz}^w)_i^{(2k-1)} &= (\lambda_i + 2\mu_i) W_{i,k-1}^z + \lambda_i \left(\frac{\partial W_{i,k}^x}{\partial x} + \frac{\partial W_{i,k}^y}{\partial y} \right) + \xi^{(2k-1)} (\chi_{zz})_i, \quad W_{i,0}^z = 1, \\ (\tau_{xx}^w)_i^{(2k-1)} &= \left[\lambda_i \left(W_{i,k-1}^z + \frac{\partial W_{i,k}^y}{\partial y} \right) + (\lambda_i + 2\mu_i) \frac{\partial W_{i,k}^x}{\partial x} \right] + \xi^{(2k-1)} (\chi_{xx})_i, \\ (\tau_{yy}^w)_i^{(2k-1)} &= \left[\lambda_i \left(W_{i,k-1}^z + \frac{\partial W_{i,k}^x}{\partial x} \right) + (\lambda_i + 2\mu_i) \frac{\partial W_{i,k}^y}{\partial y} \right] + \xi^{(2k-1)} (\chi_{yy})_i, \\ (\tau_{xz}^w)_i^{(2k)} &= \mu_i \left(\frac{\partial W_{i,k}^z}{\partial x} + W_{i,k}^x \right), \quad (\tau_{yz}^w)_i^{(2k)} = \mu_i \left(W_{i,k}^y + \frac{\partial W_{i,k}^z}{\partial y} \right), \\ (\tau_{xy}^w)_i^{(2k-1)} &= \mu_i \left(\frac{\partial W_{i,k}^y}{\partial x} + \frac{\partial W_{i,k}^x}{\partial y} \right), \quad (\tau_{xz}^w)_i^{(0)} = (\tau_{yz}^w)_i^{(0)} = 0, \quad k = 1, n. \end{aligned} \quad (17)$$

Потребуем, чтобы характеристические функции удовлетворяли следующим краевым задачам в сечении балки

$$\begin{cases} \frac{\partial(\tau_{\beta x}^w)^{(2k-1)}}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{\beta y}^w)^{(2k-1)}}{\partial y} + (\tau_{\beta z}^w)^{(2k-2)} = 0, \beta \in \{x, y\}, k=1, n, i=1, s; \\ \frac{\partial(\tau_{xz}^w)^{(2k)}}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{yz}^w)^{(2k)}}{\partial y} + (\tau_{zz}^w)^{(2k-1)} = 0 \end{cases} \quad (18)$$

на боковой поверхности балки

$$\begin{aligned} (\tau_{xx}^w)^{(2k-1)} n_x + (\tau_{xy}^w)^{(2k-1)} n_y &= q_x^{(2k-1)} f_x^q(\Gamma), (\tau_{yy}^w)^{(2k-1)} n_y + (\tau_{xy}^w)^{(2k-1)} n_x = 0, \\ (\tau_{xz}^w)^{(2k)} n_x + (\tau_{yz}^w)^{(2k)} n_y &= 0, k=1, n; \end{aligned} \quad (19)$$

на границах между слоями

$$\begin{aligned} \left[(\tau_{\beta x}^w)^{(2k-1)} n_x + (\tau_{\beta y}^w)^{(2k-1)} n_y \right]_i^j &= 0, \left[(\tau_{yz}^w)^{(2k)} n_y + (\tau_{xz}^w)^{(2k)} n_x \right]_i^j = 0, \beta \in \{x, y\}, \\ \gamma_{j,k} &= W_{i,k}^\gamma, \gamma \in \{x, y, z\}, k=1, n, i, j = [1, s]. \end{aligned} \quad (20)$$

Для характеристических жесткостей и моментов инерции используем следующие формулы

$$(G_{\gamma\beta}^w)^{(m)} = \sum_{i=1}^s \int_{F_i} (\tau_{\gamma\beta}^w)^{(m)} dF, \quad (I_x^w)^{(m)} = \sum_{i=1}^s \int_{F_i} (\tau_{zz}^w)^{(m)} (x - c_0) dF.$$

Интегрируя уравнения (17) по сечению балки и используя формулы (18)-(21), выведем следующие соотношения

$$(G_{xz}^w)^{(2k)} = (I_x^w)^{(2k-1)}, \quad q_x^{(2k-1)} = -(G_{xz}^w)^{(2k-2)}, \quad q_z^{(2k)} = -(G_{zz}^w)^{(2k-1)}, \quad k=1, n. \quad (22)$$

В соответствии с формулами (14)-(15), (22) должны выполняться равенства для функций предварительной деформации и продольного смещения

$$\sum_{k=1}^n \xi^{(2k-1)} \frac{d^{2k-1} w_\xi^{(n)}}{dz^{2k-1}} \varepsilon^{2k-1} - \xi_0(z) = 0, \quad p_x^\xi = - \sum_{k=2}^n (G_{xz}^w)^{(2k-2)} \frac{d^{2k-1} w_\xi^{(n)}}{dz^{2k-1}} \varepsilon^{2k-1} + p_x. \quad (23)$$

Первая формула (23) является дифференциальным уравнением, из которого находится функция продольного смещения $w_\xi^{(n)}$, вторая формула (23) является формулой для поперечной нагрузки p_x^ξ , которая необходима для выполнения равенств полукраевой задачи (2)-(6). Таким образом, суммарная поперечная нагрузка p_x^ξ не может быть произвольно заданной.

Подставим формулы для перемещений и напряжений (12) и (16), записанные на основе решений уравнений (23), в левые части уравнений полукраевой задачи (2)-(6). После учета равенств (17)-(20) и всех сокращений легко видеть, что левые части уравнений (2)-(6) являются малыми величинами порядка $O(\varepsilon^{2n-1})$. Таким образом, можно сказать, что уравнения полукраевой задачи (2)-(6) выполняются с точностью $O(\varepsilon^{2n-1})$ и, следовательно, ее формальное асимптотическое решение для необходимо заданной нагрузки p_x^ξ построено. Для обеспечения необходимой точности требуется достаточная малость параметра ε .

С целью устранения требования на поперечную нагрузку p_x^ξ , подчиняющуюся второму равенству (23), построим другой тип решений полукраевой задачи (2)-(6). Для этого предположим, что вспомогательная поперечная распределенная нагрузка на боковой поверхности балки представлена в виде:

$$q_x^h(\Gamma, z) = f_x^q(\Gamma) \sum_{k=1}^n q_x^{(2k)} \frac{d^{2k} u_0^{(n)}}{dz^{2k}} \varepsilon^{2k}, \quad p_x^h = \sum_{k=1}^n q_x^{(2k)} \frac{d^{2k} u_0^{(n)}}{dz^{2k}} \varepsilon^{2k}, \quad (24)$$

и воспользуемся представлением для перемещений, применяемым при простом поперечном изгибе [1]- [2]

$$u_i^{(n)}(\bar{r}, \varepsilon) = u_0^{(n)}(z) + \sum_{k=1}^n U_{i,k}^x \frac{d^{2k} u_0^{(n)}}{dz^{2k}} \varepsilon^{2k}, \quad v_i^{(n)}(\bar{r}, \varepsilon) = \sum_{k=1}^n U_{i,k}^y \frac{d^{2k} u_0^{(n)}}{dz^{2k}} \varepsilon^{2k}, \\ w_i^{(n)}(\bar{r}, \varepsilon) = -(x - c_0) \frac{du_0^{(n)}}{dz} \varepsilon + \sum_{k=1}^n U_{i,k}^z \frac{d^{(2k+1)} u_0^{(n)}}{dz^{(2k+1)}} \varepsilon^{2k+1}, \quad (25)$$

где $q_x^{(2k)}$ ($k = 2, n$) – некоторые константы; $p_x(z)$ – суммарная нагрузка в поперечном сечении, $u_0^{(n)}$ – функция прогиба; $U_{i,k}^\beta$ – характеристические функции перемещений. Будем считать, что функции прогиба $u_0^{(n)}(z)$ равняются средним перемещениям точек поперечного сечения в поперечном направлении, это равносильно выполнению равенств

$$\sum_{i=1}^s \int_{F_i} U_{i,k}^x(x, y) dF = 0, \quad k = 1, n. \quad (26)$$

Действуя точно так же, как и в случае представления перемещений в виде формул (12), получим следующие выражения для напряжений и характеристических функций:

$$\begin{aligned} (\sigma_{\beta\beta}^u)^{(n)}_i &= \sum_{k=1}^n (\tau_{\beta\beta}^u)^{(2k)}_i \frac{d^{2k} u_0^{(n)}}{dz^{2k}} \varepsilon^{2k} + \lambda_i U_{i,n}^z \frac{d^{2n+2} u_0^{(n)}}{dz^{2n+2}} \varepsilon^{2n+2}, \quad \beta \in \{x, y\}, \\ (\sigma_{zz}^u)^{(n)}_i &= \sum_{k=1}^n (\tau_{zz}^u)^{(2k)}_i \frac{d^{2k} u_0^{(n)}}{dz^{2k}} \varepsilon^{2k} + (\lambda_i + 2\mu_i) U_{i,n}^z \frac{d^{2n+2} u_0^{(n)}}{dz^{2n+2}} \varepsilon^{2n+2}, \\ (\sigma_{xy}^u)^{(n)}_i &= \sum_{k=1}^n (\tau_{xy}^u)^{(2k)}_i \frac{d^{2k} u_0^{(n)}}{dz^{2k}} \varepsilon^{2k}, \quad (\sigma_{\beta z}^u)^{(n)}_i = \sum_{k=1}^n (\tau_{\beta z}^u)^{(2k+1)}_i \frac{d^{2k+1} u_0^{(n)}}{dz^{2k}} \varepsilon^{2k+1}; \quad (27) \\ (\tau_{zz}^u)^{(2k+2)}_i &= (\lambda_i + 2\mu_i) U_{i,k}^z + \lambda_i \left(\frac{\partial U_{i,k+1}^x}{\partial x} + \frac{\partial U_{i,k+1}^y}{\partial y} \right), \quad (\tau_{xy}^u)^{(2k)}_i = \mu_i \left(\frac{\partial U_{i,k}^y}{\partial x} + \frac{\partial U_{i,k}^x}{\partial y} \right), \\ (\tau_{xx}^u)^{(2k+2)}_i &= \left(\lambda_i \left(U_{i,k}^z + \frac{\partial U_{i,k+1}^y}{\partial y} \right) + (\lambda_i + 2\mu_i) \frac{\partial U_{i,k+1}^x}{\partial x} \right), \quad (\tau_{\beta z}^u)^{(2k+1)}_i = \mu_i \left(U_{i,k}^y + \frac{\partial U_{i,k}^z}{\partial y} \right), \\ (\tau_{xz}^u)^{(1)}_i &= (\tau_{yz}^u)^{(1)}_i = 0, \quad (\tau_{yy}^u)^{(2k+2)}_i = \left(\lambda_i \left(U_{i,k}^z + \frac{\partial U_{i,k+1}^x}{\partial x} \right) + (\lambda_i + 2\mu_i) \frac{\partial U_{i,k+1}^y}{\partial y} \right), \quad \beta \in \{x, y\}, \\ & k = 1, n. \quad (28) \end{aligned}$$

Потребуем, чтобы характеристические функции удовлетворяли следующим краевым задачам в сечении балки

$$\begin{cases} \frac{\partial (\tau_{\beta x}^u)^{(2k)}_i}{\partial x} + \frac{\partial (\tau_{\beta y}^u)^{(2k)}_i}{\partial y} + (\tau_{\beta z}^u)^{(2k-1)}_i = 0 \\ \frac{\partial (\tau_{xz}^u)^{(2k+1)}_i}{\partial x} + \frac{\partial (\tau_{yz}^u)^{(2k+1)}_i}{\partial y} + (\tau_{zz}^u)^{(2k)}_i = 0 \end{cases}$$

$$\text{при } \beta \in \{x, y\}, \quad k = 1, n, \quad i = 1, s; \quad (29)$$

на границах между слоями

$$(\tau_{nz}^u)^{(2k-1)}_j = (\tau_{nz}^u)^{(2k-1)}_i, \quad (\tau_{n\beta}^u)^{(2k)}_j = (\tau_{n\beta}^u)^{(2k)}_i, \quad U_{j,k}^{\beta,\gamma} = U_{i,k}^{\beta,\gamma}, \quad i, j = [1, s] \quad (30)$$

на боковой поверхности балки

$$(\tau_{nx}^u)^{(2k)} = q_x^{(2k)} f_x^q(\Gamma), \quad (\tau_{ny}^u)^{(2k)} = 0, \quad (\tau_{nz}^u)^{(2k+1)} = 0, \quad k = 1, n. \quad (31)$$

Введем интегральные характеристики характеристических функций

$$(G_{\beta\gamma}^u)^{(j)} = \sum_{i=1}^s \int_{F_i} (\tau_{\beta\gamma}^u)^{(j)} dF, \quad (I_x^u)^{(2k)} = \sum_{i=1}^s \int_{F_i} [(x - c_0)(\tau_{zz}^u)^{(2k)}] dF, \quad k = 1, n,$$

где $(I_x^u)^{(2k)}$, $(G_{\beta\gamma}^u)^{(j)}$ – характеристические моменты инерции и характеристические жесткости слоистой балки соответственно. Интегрируя уравнения (29) по сечению балки и используя формулы (30) – (31), выведем следующие соотношения

$$(G_{xz}^u)^{(2k+1)} = (I_x^u)^{(2k)}, \quad q_x^{(2k)} = -(G_{xz}^u)^{(2k-1)} \quad (32)$$

Пусть вспомогательная нагрузка q_x^h такова, что в сумме с необходимо приложенной нагрузкой q_x^ξ получается произвольно заданная нагрузка

$$q_x = q_x^h + q_x^\xi, \quad p_x = p_x^h + p_x^\xi. \quad (33)$$

Тогда в силу линейности рассматриваемых уравнений теории упругости перемещения и напряжения являются суммами формул (12), (16) и (25)-(26)

$$u_i^{(n_u, n_w)} = u_i^{(n_u)} + u_i^{(n_w)}, \quad v_i^{(n_u, n_w)} = v_i^{(n_u)} + v_i^{(n_w)}, \quad w_i^{(n_u, n_w)} = w_i^{(n_u)} + w_i^{(n_w)}, \quad (34)$$

$$(\sigma_{\gamma\beta})_i^{(n_u, n_w)} = (\sigma_{\gamma\beta}^u)_i^{(n_u)} + (\sigma_{\gamma\beta}^w)_i^{(n_w)}, \quad (35)$$

где индексы n_u , n_w – номера асимптотических приближений для представлений (16) и (12) соответственно. Первое уравнение (23) перепишем без изменения, а второе равенство (23) подставим во вторую формулу (33) и воспользуемся формулами (32). Тогда получим систему уравнений изгиба предварительно деформированной балки на функции прогиба и продольного смещения $u_0^{(n_u)}$, $w_0^{(n_w)}$:

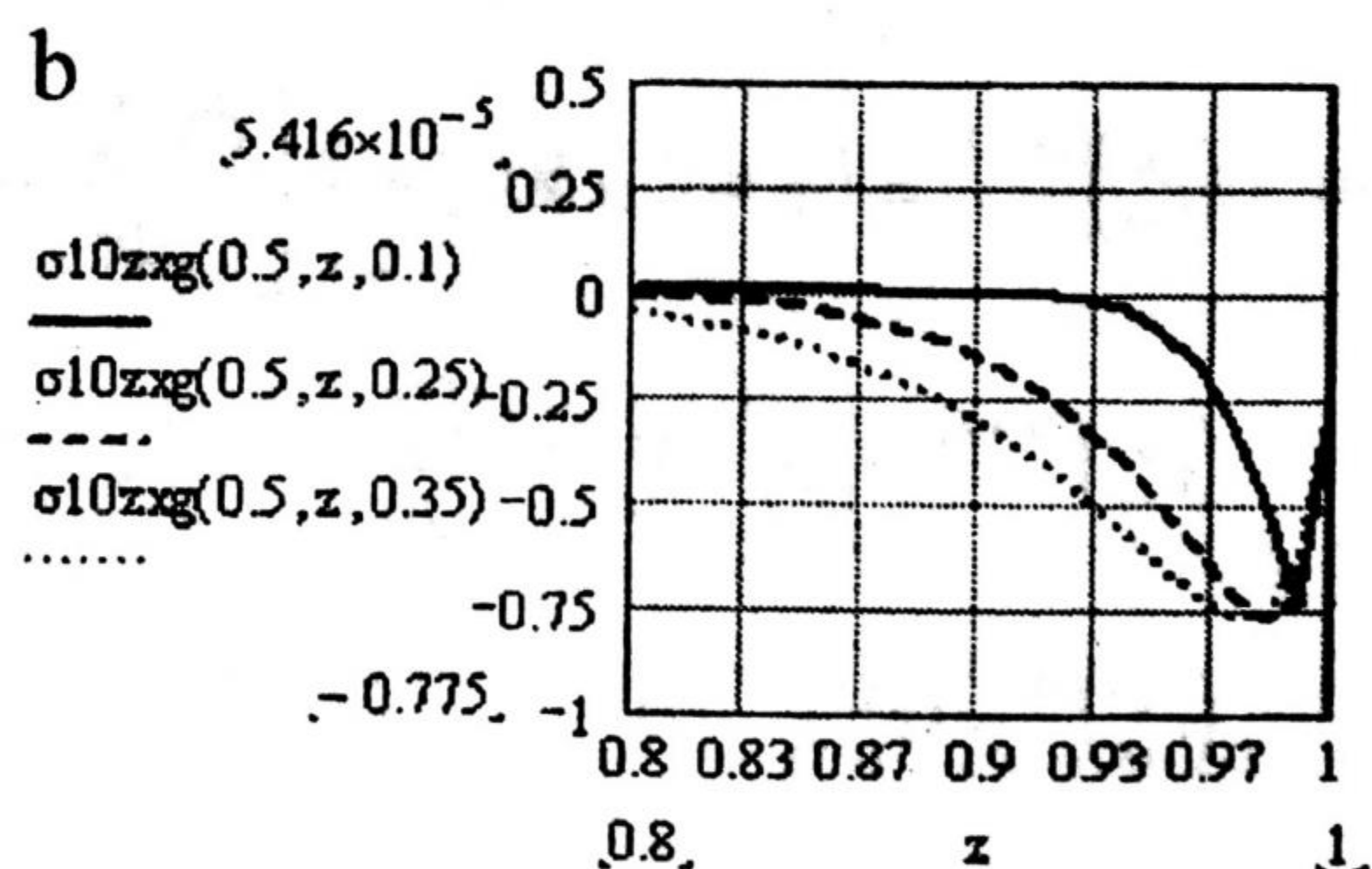
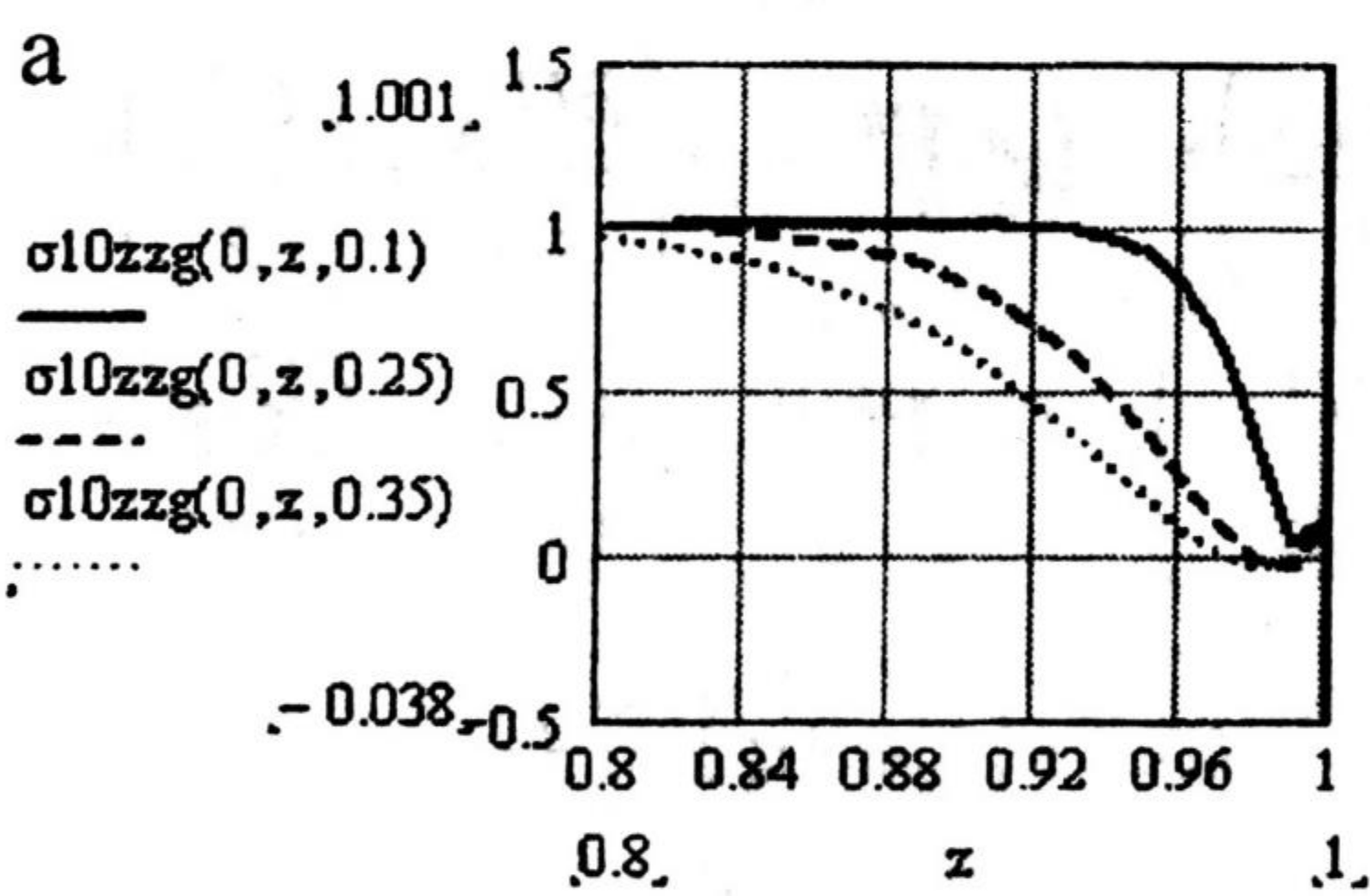


Рис. 2. Напряжения в пограничном слое двухслойной предварительно деформированной балки в зависимости от продольной переменной: $\epsilon = 0.1$ – сплошная линия; $\epsilon = 0.25$ – прерывистая линия; $\epsilon = 0.35$ – пунктир. а) Нормальные продольные напряжения при $x=0$. б) Касательные напряжения при $x=0.5$.

$$\sum_{k=1}^{n_w} \xi^{(2k-1)} \frac{d^{2k-1} w_\xi^{(n_w)}}{dz^{2k-1}} \epsilon^{2k-1} - \xi_0(z) = 0,$$

$$\sum_{k=2}^{n_w} (G_{xz}^w)^{(2k-2)} \frac{d^{2k-1} w_\xi^{(n_w)}}{dz^{2k-1}} \epsilon^{2k-1} + \sum_{k=2}^{n_u} (G_{xz}^u)^{(2k-1)} \frac{d^{2k} u_0^{(n_u)}}{dz^{2k}} \epsilon^{2k} + p_x = 0, \quad (36)$$

Формулы (34)–(35), построенные на основе решений системы (36), образуют 5-параметрическое семейство асимптотических решений полукраевой задачи

(2)-(6) с точностью $O(\varepsilon^{2n-1})$, что проверяется путем прямой подстановки. Значения параметров определяются из условия постановки классических интегральных условий на торцах [1]. Для уточнения напряженного состояния вблизи торцов следует рассматривать пограничные слои, теория которых изложена в [6].

Если функция $\xi_0(z)$ является многочленом степени m_ξ , а поперечная нагрузка p_x многочленом степени m_x , то для получения семейства точных решений полукраевой задачи (2)-(6) достаточно потребовать выполнения неравенств для номеров асимптотических приближений

$$n_w \geq \frac{m_\xi + 1}{2}, \quad n_u \geq \frac{\max(m_\xi - 2, m_x) + 1}{2} + 1. \quad (37)$$

Пример. (Плоская деформация предварительно деформированной балки). Пусть распределение предварительной деформации не меняется по длине балки и отсутствует внешняя нагрузка, из неравенств (37) находим значения приближений n_w и n_u

$$\xi_0(z) = \xi_0, \quad m_\xi = 0, \quad m_x = 0, \quad n_w = 1, \quad n_u = 2.$$

Из уравнений (36) с учетом того, что на свободном торце изгибающий момент относительно оси u и поперечная сила равны нулю, следуют равенства

$$\xi^{(1)} \frac{dw_\xi^{(n_w)}}{dz} \varepsilon = \xi_0, \quad \frac{d^2 u_0^{(2)}}{dz^2} \varepsilon^2 = - \frac{(I_x^{w,T})^{(1)}}{(I_x^{u,0})^{(2)}} \frac{dw_T^{(1)}}{dz} \varepsilon. \quad (38)$$

Тогда из выражений (16), (26) и (35) следуют формулы для напряжений:

$$(\sigma_{zz})_i^{(2,1)} = \left((\tau_{zz}^w)_i^{(1)} - (\tau_{zz}^u)_i^{(2)} \frac{(I_x^w)^{(1)}}{(I_x^u)^{(2)}} \right) \frac{\xi_0}{\xi^{(1)}}, \quad (\sigma_{xz})_i^{(2,1)} = 0 \quad (39)$$

Напряжения из формул (39) являются точными решениями полукраевой задачи (2)-(6) и удовлетворяют условию равенства касательных напряжений на торце и равенству изгибающего момента на торце. Нормальные напряжения неизменны по длине балки. Касательные напряжения всюду тождественно равны нулю, это требует специального объяснения, т.к. изгиб балки (ненулевые нормальные напряжения) вызван именно взаимодействием слоев, которое для свободной балки возможно только посредством касательных напряжений. Разрешение этой парадоксальной ситуации невозможно без рассмотрения пограничного слоя, возникающего вблизи торца балки [6]. Если построить такой слой вблизи правого торца при $z=1$, то оказывается, что внутри пограничного слоя касательные напряжения резко возрастают от нуля и опять превращаются в нуль, достигая в точке максимума до 35% от максимальных нормальных напряжений в середине балки (рис 2b). Столь значительные касательные напряжения вполне могут вызывать расслоение композита вблизи торцов. Нормальные напряжения внутри пограничного слоя резко убывают до нуля на торце (рис 2a).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горынин Г. Л. Асимптотическая теория продольно-поперечного изгиба композитных балок в трехмерной постановке // Образование, наука и техника: XXI век: Сб. науч. статей / Югорский государственный университет. Шадринск: Изд-во ПО «Исеть», 2003. С. 95-105.

2. Nemirovsky Yu.V., Gorynin G.L. The theory of the layered beams under the action of cross loading // *Advanced Studies in Mechanical Engineering*. Yeungnam University. Korea. 2002. P. 9-16.

3. Горынин Г. Л. Расчет композитных балок на упругом основании на действие поперечной нагрузки в трехмерной постановке // *Материалы III Международной научно-технической конференции «Надежность и долговечность строительных материалов и конструкций»*, 27-29 марта 2003 г. В 4 ч. Волгоград: ВолГАСА, 2003. Ч. II. С. 35-37.

4. Горынин Г. Л., Немировский Ю. В. Аналитический метод 3-D расчета термоупругих композитных балок произвольного поперечного очертания // *Сб. научных трудов VI международного симпозиума «Современные проблемы прочности» имени В. А. Лихачёва*. Т. II. В. Новгород, 2003. С. 138-144.

5. Горынин Г. Л., Немировский Ю. В. Поперечный изгиб многослойных плит в трехмерной постановке // *Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Труды XVIII Межреспубликанской конференции, ИТПМ СО РАН, Кемерово, 1-3 июля 2003 г.* / Под ред. В. М. Фомина. Новосибирск: Изд-во «Нонпарель», 2003. С. 230-244.

6. Горынин Г. Л., Немировский Ю. В. Пограничный слой в слоистом стержне // *Научный вестник НГТУ*. 2004. № 1. С. 3-15.

*Леонид Геннадьевич АГЕНОСОВ –
доцент кафедры математического анализа и теории функций факультета математики и компьютерных наук,
кандидат физико-математических наук*

*Инна Владимировна ГАЙДАМАК –
аспирант кафедры математического анализа и теории функций факультета математики и компьютерных наук*

УДК 517.91

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ ВАРИАЦИОННОГО ПРИНЦИПА В ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

АННОТАЦИЯ. В статье рассматривается возможность применения к расчету тонких оболочек одного из вариантов формулы статически возможных изменений напряженного состояния.

Possibility of one of the version of statically possible changes of strained state formula's application to calculation of fine shells is considered in this article.

В монографии [1] К. З. Галимовым был предложен один из вариантов вариационного метода интегрирования основных уравнений теории пологих оболочек, основанный на применении формулы статически возможных изменений напряженного состояния.