2. Nemirovsky Yu.V., Gorynin G.L. The theory of the layered beams under the action of cross loading // Advanced Studies in Mechanical Engineering. Yeungnam University. Korea. 2002. P. 9-16.

3. Горынин Г. Л. Расчет композитных балок на упругом основании на действие поперечной нагрузки в трехмерной постановке // Материалы III Международной научно-технической конференции «Надежность и долговечность строительных материалов и конструкций», 27-29 марта 2003 г. В 4 ч. Волгоград: ВолГАСА, 2003. Ч. II. С. 35-37.

4. Горынин Г. Л., Немировский Ю. В. Аналитический метод 3-D расчета термоупругих композитных балок произвольного поперечного очертания // Сб. научных трудов VI международного симпозиума «Современные проблемы прочности» имени В. А. Лихачёва. Т. II. В. Новгород, 2003. С. 138-144.

5. Горынин Г. Л., Немировский Ю. В. Поперечный изгиб многослойных плит в трехмерной постановке // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Труды XVIII Межреспубликанской конференции, ИТПМ СО РАН, Кемерово, 1-3 июля 2003 г. / Под ред. В. М. Фомина. Новосибирск: Изд-во «Нонпарель», 2003. С. 230-244.

6. Горынин Г. Л., Немировский Ю. В. Пограничный слой в слоистом стержне // Научный вестник НГТУ. 2004. № 1 . С. 3-15.

Леонид Геннадьевич АГЕНОСОВ – доцент кафедры математического анализа и теории функций факультета математики и компьютерных наук, кандидат физико-математических наук

Инна Владимировна ГАЙДАМАК – аспирант кафедры математического анализа и теории функций факультета математики и компьютерных наук

УДК 517.91

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ ВАРИАЦИОННОГО ПРИНЦИПА В ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

АННОТАЦИЯ. В статье рассматривается возможность применения к расчету тонких оболочек одного из вариантов формулы статически возможных изменений напряженного состояния.

Possibility of one of the version of statically possible changes of strained state formula's application to calculation of fine shells is considered in this article.

В монографии [1] К. З. Галимовым был предложен один из вариантов вариационного метода интегрирования основных уравнений теории пологих оболочек, основанный на применении формулы статически возможных изменений напряженного состояния.

В соответствии с этим вариантом мы точно удовлетворяем всем трем уравнениям равновесия, а условие совместности деформаций интегрируем по методу Бубнова-Галеркина, при этом варьируется только функция усилий.

В данной статье рассматривается возможность применения указанного метода к решению задач динамики. Исследуется частный случай свободных колебаний круговой конической оболочки, находящейся под действием равномерного внешнего давления, при этом учитываются только нормальные силы инерции.

Исходная система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial r}(T_1 r)+\frac{\partial S}{\partial \varphi_1}-T_2=0; \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(Sr)+\frac{\partial T_2}{\partial \varphi_1}+S=0; \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial r^2}-\frac{2}{r}\frac{\partial^2 H}{\partial r\,\partial \varphi_1}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 G_2}{\partial \varphi_1^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial H}{\partial \varphi_1}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(2G_1-G_2)+ \tag{3}$$

$$+\frac{ctg\gamma}{r}T_2+T_{10}\kappa_1+2S_0\tau+T_{20}\kappa_2-\frac{\gamma_1 h}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial t_1^2}=0;$$

$$r\nabla^2\nabla^2\Psi+\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}=0; \tag{4}$$

где приняты следующие обозначения:

r – расстояние вдоль образующей конуса от его вершины до текущей точки на срединной поверхности оболочки;

r_1, r_0 – указанные расстояния до большего и меньшего оснований конуса соответственно;

φ – угол между текущей аксиальной плоскостью и плоскостью отсчета;

E, σ, h, γ_1 – модуль упругости, коэффициент Пуассона, толщина оболочки, удельный вес ее материала;

2γ – полный угол при вершине конуса;

T_{10}, T_{20}, S_0 – усилия в срединной поверхности, определяемые по безмоментной теории;

ω – круговая частота собственных колебаний;

m – число полуволн вдоль образующей конуса;

n – число волн в окружном направлении;

t_1 – время;

$$t=\ln\frac{r_1}{r_0};\quad D=\frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)};\quad \varphi_1=\varphi\sin\gamma;\quad n_1=\frac{n}{\sin\gamma};\quad m_1=\frac{m\pi}{t}.$$

В случае действия на оболочку равномерного внешнего давления интенсивности p_0 для усилий T_{10}, T_{20}, S_0 имеем зависимость

$$T_{10}=-\frac{p_0 r}{2}tg\gamma,\quad S_0=0,\quad T_{20}=-p_0 r\,tg\gamma. \tag{5}$$

Первым двум уравнениям равновесия (1–2) можно тождественно удовлетворить введением функции усилий Ψ по формулам:

$$\frac{T_1}{Eh\,ctg\gamma}=\frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial \varphi_1^2};\quad \frac{T_2}{Eh\,ctg\gamma}=\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2};\quad \frac{S}{Eh\,ctg\gamma}=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi_1}\right) \tag{6}$$

Третьему уравнению равновесия, следуя [1], можно удовлетворить с помощью функций моментов Ψ_1 и Ψ_2, приняв:

$$G_1 = -D(\kappa_1 + \sigma\kappa_2) = -D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \sigma\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi_1^2}\right)\right] =$$

$$= G_1^0 + \frac{1}{r}\left(\Psi_1 + \frac{\partial \Psi_2}{\partial \varphi_1}\right) - \frac{Eh\,ctg^2\gamma}{r}\Psi - T_{10}w; \qquad (7)$$

$$G_2 = -D(\kappa_2 + \sigma\kappa_1) = -D\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi_1^2} + \sigma\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right) = G_2^0 + \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} - T_{20}w;$$

$$2H = \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi_1}{\partial \varphi_1} - \frac{\Psi_2}{r}.$$

В этих формулах G_1^0, G_2^0 - частные решения третьего уравнения равновесия (3) без учета тангенциальных усилий, а функции Ψ_1 и Ψ_2 подбираются по структуре соотношений (7) при заданных Ψ, w.

После подстановки (7) в (3) с учетом (5) получим для определения G_1^0, G_2^0 уравнение

$$\frac{\partial^2 G_1^0}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 G_2^0}{\partial \varphi_1^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial G_1^0}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial G_2^0}{\partial r} - \frac{\gamma_1 h}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial t_1^2} = 0 \cdot$$

Частное решение этого уравнения можно взять в виде

$$G_1^0 = -\frac{\alpha^2}{2r}\left(\int_{r_0}^{r} dr \int_{r_0}^{r} wrdr - \frac{1}{n_1^2}\int_{r_0}^{r} r^2 wdr\right),$$

$$G_2^0 = \frac{\alpha^2}{2n_1^2} r^2 w, \quad \alpha^2 = \frac{\gamma_1 h}{g}\omega^2,$$

при этом для замкнутой в кольцевом направлении оболочки принято

$$w = w(r)\cos n_1\varphi_1 \cos \omega t_1 .$$

Перейдем в уравнениях (4, 7) с учетом (6, 8) к новой переменной $z = \ln\dfrac{r}{r_1}$

и примем
$$w = e^{2z} w_1(z)\cos n_1\varphi_1 \cos\omega t_1,$$
$$\Psi = r_1 e^{3z}\Phi(z)\cos n_1\varphi_1 \cos\omega t_1,$$
$$\Psi_1 = r_1^{-1} e^{z}\Phi_1(z)\cos n_1\varphi_1 \cos\omega t_1,$$
$$\Psi_2 = r_1^{-1} e^{z}\Phi_2(z)\sin n_1\varphi_1 \cos\omega t_1 .$$

После выполнения указанной процедуры с учетом погрешности, общепринятой в теории пологих оболочек, придем к системе четырех дифференциальных уравнений

$$D\left(w_1'' + (3+\sigma)w_1' + (2 + 2\sigma - \sigma n_1^2)w_1\right) + \Phi_1 + n_1\Phi_2 - Ehr_1^2 ctg^2\gamma\, e^{2z}\Phi -$$
$$- \frac{\alpha^2 r_1^4}{2e^z}\left[\int_{z_0}^{z} e^z dz \int_{z_0}^{z} e^{4z} w_1 dz - \frac{1}{n_1^2}\int_{z_0}^{z} e^{5z} w_1 dz\right] + \frac{p_0 r_1^3 tg\gamma}{2} e^{3z} w_1 = 0;$$
$$D\left(\sigma w_1'' + (1+3\sigma)w_1' + (2 + 2\sigma - n_1^2)w_1\right) + \Phi_1' + \Phi_1 +$$
$$+ \left(\frac{\alpha^2 r_1^4}{2n_1^2} e^{4z} + p_0 r_1^3 tg\gamma\, e^{3z}\right) w_1 = 0;$$
$$2D(1-\sigma)n_1(w_1' + w_1) + \Phi_2' - n_1\Phi_1 = 0;$$
$$\Phi^{IV} + 8\Phi''' + 24\Phi'' + 32\Phi' - 2n_1^2\Phi'' - 8n_1^2\Phi' - 10n_1^2\Phi + n_1^4\Phi + w_1'' + 3w_1' + 2w_1 = 0 .$$

Подбирая, исходя из геометрических и статических граничных условий, выражения для функции прогиба w_1 и функции усилий Ф, придем с учетом сказанного выше относительно подбора функций $Ф_1$ и $Ф_2$, к системе алгебраических уравнений относительно неопределенных коэффициентов, входящих в разложения искомых функций в ряды Фурье.

Применение этого метода к задачам динамики цилиндрических оболочек показано в работе [2].

Поскольку в данном варианте метода уравнение изгиба удовлетворяется точно, то в тех случаях, когда энергия изгиба является превалирующей, от этого метода можно ожидать получения более точных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Муштари Х. М., Галимов К. З. Нелинейная теория упругих оболочек. Казань: Таткнигоиздат. Казанский филиал АН СССР, 1957. 431 с.

2. Агеносов Л. Г. О применении метода К. З. Галимова к задачам динамики оболочек // Исследования по теории пластин и оболочек. Казань: Изд-во КГУ, 1965. Сб. 3. С.189-195.

Михаил Владимирович ДМИТРИЕВСКИЙ – кандидат физико-математических наук, ЗАО «ИНТЕРА»

Юлия Александровна ПЛИТКИНА – аспирант кафедры математического моделирования

УДК 519.63+519.65

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЕЙ ДАВЛЕНИЙ С ЦЕЛЬЮ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРАВЛЕНИЯ ТРЕЩИНЫ ГИДРОРАЗРЫВА

АННОТАЦИЯ. В данной работе предлагается комбинированный метод восстановления полей давлений, основанный на двух классических подходах: интерполяции «пластовых» давлений и математическом моделировании процессов фильтрации. Предлагаемый метод имеет вариационную постановку (минимизация последовательности функционалов) и позволяет учитывать зачастую противоречивые значения дебитов и забойных давлений, заданных в скважинах. Такая особенность метода дает возможность по выбранному критерию определить примерное направление трещины гидроразрыва.

This paper presents the combined method of pressure fields reconstruction, based on two classical approaches: interpolation of «formation» pressures and mathematical modeling of filtration processes. This method has variation statement (consecutive minimizing of functionals), and allows us to take into account values of rates and bottom-hole pressures given in the wells, which are often inconsistent. This feature the method enables to define an approximate direction of a fracture by the chosen criterion.