кальное направление трещины. Для моделирования трещины были использованы данные о дебите и забойном давлении скважины. Эти данные оказались противоречащими друг другу и поэтому были учтены в виде комбинации двух функционалов (9). В результате было построено две карты пластовых давлений (Рис. 3): в предположении, что трещина направлена с севера на юг (вертикальная трещина) и с запада на восток (горизонтальная трещина). Наиболее вероятным направлением трещины оказалось вертикальное. В этом случае из слагаемых в функционале (9) принято меньшее значение, нежели в случае горизонтальной трещины. Выбранный критерий для определения направления трещины является реализацией следующей идеи: чем точнеее удается определить направление трещины ГРП, тем лучше будут соответствовать друг другу забойное давление и дебит, задание в скважине.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Данилов В. Л. Вариационный принцип наименьшей скорости рассеяния энергии при фильтрации жидкостей в пористой среде и его приложения. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 108 с.

2. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1970.

3. Каневская Р. Д. Математическое моделирование гидродинамических процессов разработки месторождений углеводородов. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 128 с.

4. Костюченко С. В. Математическое моделирование полей давлений в нефтяных резервуарах с произвольными системами скважин различных профилей // Нефтяное хозяйство. 2000. № 10. С. 70-77.

5. Порев В. Н. Компьютерная графика. СПб.: БХВ-Петербург, 2002. 432 с., илл.

Сергей Арнольдович ИНЮТИН – проректор по научной работе Сургутского государственного педагогического института, доктор технических наук, профессор

УДК 621.29

ИЕРАРХИЯ ФУНКЦИОНАЛОВ – ХАРАКТЕРИСТИК ОТНОШЕНИЯ ПОРЯДКА ДЛЯ МОДУЛЯРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ КВАДРАТИЧНОГО ДИАПАЗОНА

АННОТАЦИЯ. Систематизированы функционалы, применяемые для характеристики отношения порядка над модулярными представлениями числовых величин квадратичного диапазона. Получены оценки их сложности и исследованы соотношения между точными и «неточными» функционалами, имеющими меньшую алгоритмическую сложность.

The author offers the system of the modular functionals that are applied to characterize the order relation for the modular codes at square computer diapason. Research had been carried out to define the relation between any exact and «nonexact» functional and assessments of their complexity had been obtained.

В тематике вычислений с числовыми величинами в модулярном представлении (модулярных вычислений) существует базовая, нерешенная в полной мере проблема – эффективного вычисления количественных характеристик отношения порядка для модулярных векторов, называемых позиционными характеристиками (ПХ) [1, 2, 3].

Определим ПХ как некоторый функционал над множеством кортежей вычетов – компонент модулярного вектора, дающий оценку числовой величины. Оценка может вычисляться точно или «неточно», и это зависит от затрат вычислительных ресурсов, последний параметр является критическим для бортовых вычислителей в режиме реального времени [4].

К ПХ предъявляются противоречивые требования: простоты вычисления и универсальности использования для выполнения всего спектра операций машинной арифметике. Кроме того, для повышения надежности бортовых вычислителей алгоритмы вычисления позиционных характеристик, используемых для выполнения немодульных операций, должны быть совмещены с алгоритмами контроля. В частности, при вычислении ПХ для определения знака или переполнения одновременно обнаруживались модульные ошибки, а затем при обнаружении ошибок дополнительно выполнялись процедуры их коррекции [5].

Для арифметических применений и контроля целесообразно ввести конструкцию модулярных диапазонов [6, 7]:

$[0, P^2)$ – рабочий мультипликативный диапазон,

$D^2=p^2_0$ – множитель расширения на диапазон со знаком и аддитивным переполнением. Минимальное значение $D^2=p^2_0=2\cdot 2$. Причем:

$$p_0^2 < p_1^2 < p_2^2 < p_3^2 \dots < p_n^2 < p_{n+1}^2 < p_{n+2}^2 \ .$$

$H^2=p^2_{n+1}\cdot p^2_{n+2}$ - множитель расширения на диапазон с контролем: обнаружением и коррекцией одномодульных ошибок.

В введенной конструкции диапазонов выполняются условия:

$[A/D^2] \in [0,2P^2)$ – модулярная величина имеет положительное значение;

$[A/D^2] \in [E^2-2P^2, E^2)$ – модулярная величина имеет отрицательное значение;

$[A/D^2] \in [2P^2, E^2-2P^2)$ – модулярная величина содержит модульные ошибки.

Вычисление ПХ непосредственно влияет на быстродействие выполнения немодульных (некольцевых) операций в модулярной арифметике. Поиск некоторого компромисса, удовлетворяющего всем требованиям, привел к введению ряда ПХ, получивших названия: ранг, след, нормированный ранг, неточный ранг [1], ядро числа, модульное ядро, нормированное ядро, квазислед [2].

Все введенные ПХ можно разделить на два класса. «Точные» функционалы – ранг, нормированный ранг, след, ядро. По их величине при соответствующих (полнодиапазонных) вычислительных ресурсах можно однозначно определить величину числа, следовательно, сравнить модулярные вектора, устанавливать знак и т. д. «Неточные» функционалы – неточный ранг, квазислед, модульное ядро в случаях, приемлемых для практической реализации, имеют значительно меньшую сложность вычисления, но по ним величина модулярного числового представления определяется однозначно не во всех случаях.

ПХ характеристики введены разными исследователями. Для классификации определим их с единых позиций.

Определение. Для числа $A = (\alpha_1, \dots \alpha_n, \dots \alpha_{n+g})$, заданного в модулярном представлении с $n+g$ квадратичными основаниями и модулярным диапазоном $P = \prod_1^n p^2{}_i \prod_{n+1}^{n+g} p^2{}_i = D^2 D^2{}_g$:

ранг $R(A) = \left[\sum_1^{n+g} \alpha_i m_i / p^2{}_i\right]$,

след $S(A) = \left[\sum_1^{n+g} \alpha_i m_i D^2{}_g / p^2{}_i\right] - \left[\sum_1^{n=g} \alpha_i m_i / p^2{}_i\right] D^2{}_g$,

нормированный ранг

$$NR(A) = \left[\sum_1^{n+g} \left|\alpha_i m_i\right|_{p^2{}_i} / p^2{}_i\right],$$

нормированный след

$$NS(A) = \left[\sum_1^{n+g} \left|\alpha_i m_i\right|_{p^2{}_i} D^2{}_g / p^2{}_i\right] - \left[\sum_1^{n+g} \left|\alpha_i m_i\right|_{p^2{}_i} / p^2{}_i\right] D^2{}_g,$$

ядро $J(A) = \sum_1^{n+g} \left[A / p^2{}_i\right] \tau_i$,

нормированное ядро $NJ(A) = \sum_1^{n+g} \left[A \tau_i / p^2{}_i\right]$.

Определение. Следующие определяют функционалы:

«неточный» ранг

$$IR(A) = \left[\sum_1^{n+g} \left[\alpha_i m_i T / p^2{}_i\right] / T\right],$$

нормированный «неточный» ранг

$$INR(A) = \left[\sum_1^{n+g} \left[\left|\alpha_i m_i\right|_{p^2{}_i} T / p^2{}_i\right] / T\right],$$

квазислед

$$INS(A) = \left[\left|\sum_1^{n+g} \left[\left|\alpha_i m_i\right|_{p^2{}_i} T / p^2{}_i\right]\right|_T D^2{}_g / T\right],$$

модульное ядро

$$MJ(A) \equiv \sum_1^{n+g} \alpha_i MJ(m_i P^2 / p^2{}_i) (\mathrm{mod} MJ / P^2)),$$

нормированное модульное ядро

$$MNJ(A) \equiv \sum_1^{n+g} \alpha_i MJ(m_i P^2 / p^2{}_i) (\mathrm{mod} MJ(P^2)).$$

В определениях использованы следующие обозначения:

$x \equiv |x|_{p_i^2}$ – вычет, наименьший неотрицательный или абсолютно наименьший, числа x ;

$[x]$ – целая часть, небольшая числа x ;

$m_i = \left|P^2 / p^2{}_i\right|^{-1}_{p_i^2}$, T, τ_i – константы.

Большое количество введенных функционалов, естественно, ставит вопросы установления аналитических связей между ними. Это в свою очередь позволяет конструировать способы их оптимального использования и алгоритмы немодульных операций на их основе, а также дать сравнительные оценки сложности и скорости их выполнения.

Непосредственно из определений следует ряд свойств.

$$R(A) = NR(A) + \sum_{1}^{n+g}\left[\alpha_i m_i / p^2{}_i\right],$$

$$S(A) = NS(A),$$

$$J(P) = NJ(P),$$

$$J(B_i) = NJ(B_i),$$

$$J(A) = NJ(A) + \sum_{1}^{n+g}\left[\alpha_i \tau_i / p^2{}_i\right.,$$

$$MJ(A) = MNJ(A),$$

Замечание.

При $T = P^2 \left| P^2 / p^2{}_i \right.$ $IR(A) = R(A), IS(A) = S(A)$.

При $\tau_i = p^2{}_i, \forall j \neq i\ \tau_j = 0,\ J(B_i) = B_i,\ J(P^2) = P^2,\ J(A) = A$.

В следующих теоремах установлены соотношения между различными функционалами.

Теорема Т-1. Выполняется соотношение:

$$R(A) = IR(A) + \left[\left|\sum_{1}^{n+g}\left[\alpha_i m_i T / p^2{}_i\right]\right|_T / T + \left[\sum_{1}^{n+g}\left|\alpha_i m_i T\right|_{p_i^2} / p^2{}_i\right] / T\right].$$

Доказательство. Действительно выполняется следующее:

$$R(A) = \left[\left(\sum_i \alpha_i m_i T / p^2{}_i\right) / T\right] = \left[\sum_i\left[\alpha_i m_i T / p^2{}_i\right] / T + \left(\sum_i \left|\alpha_i m_i T\right|_{p_i^2} / p^2{}_i\right) / T\right] =$$

$$= \left[\sum_i\left[\alpha_i m_i T / p^2{}_i\right] / T\right] + \left[\left|\sum_i\left[\alpha_i m_i T / p^2{}_i\right]\right|_T / T + \left(\sum_i\left|\alpha_i m_i T\right|_{p_i^2} / p^2{}_i\right) / T\right] =$$

$$= IR(A) + \left[\left|\sum_i\left[\alpha_i m_i T / p^2{}_i\right]\right|_T / T + \left[\sum_i\left|\alpha_i m_i T\right|_{p_i^2} / p^2{}_i\right] / T\right].$$

Теорема Т-2. Выполняется соотношение:

$$NR(A) = INR(A) + \left[\left|\sum_i\left[\left|\alpha_i m_i T\right|_{p_i^2} T / p^2{}_i\right]\right|_T / T + \left[\sum_i\left|\alpha_i m_i T\right|_{p_i^2} / p^2{}_i\right] / T\right]$$

Доказательство. Действительно выполняется следующее:

$$NR(A) = \left[\sum_i\left|\alpha_i m_i\right|_{p_i^2} / p^2{}_i\right] = \left[\left(\sum_i\left|\alpha_i m_i\right|_{p_i^2} T / p^2{}_i\right) / T\right] =$$

$$= \left[\sum_i\left[\left|\alpha_i m_i\right|_{p_i^2} T / p^2{}_i\right] / T + \sum_i\left|\alpha_i m_i T\right|_{p_i^2} / p^2{}_i / T\right] =$$

$$= INR(A) + \left[\left|\sum_i\left[\left|\alpha_i m_i\right|_{p_i^2} T / p^2{}_i\right]\right|_T / T + \left[\sum_i\left|\alpha_i m_i T\right|_{p_i^2} / p^2{}_i\right] / T\right]$$

Теорема Т-3. Выполняется соотношение:

$$NS(A) = INS(A) + \left[\left(\left|\sum_i\left[\left|\alpha_i m_i\right|_{p_i^2} T / p^2{}_i\right] D^2{}_g\right|_T + \left|\sum_i\left|\alpha_i m_i T\right|_{p_i^2} / p^2{}_i\right|_T D^2{}_g\right) / T\right] - 0 \mid D_g^2.$$

Доказательство. Действительно выполняется следующее:

$$NS(A) = \left[\left|\sum_i\left[\left|\alpha_i m_i\right|_{p_i^2} T / p^2{}_i\right] + \sum_i\left|\alpha_i m_i T\right|_{p_i^2}\right|_T D^2{}_g / T\right] =$$

$$= \left[\left|\sum_i\left[\left|\alpha_i m_i\right|_{p_i^2} T / p^2{}_i\right]\right|_T D^2{}_g / T + \left|\sum_i\left|\alpha_i m_i T\right|_{p_i^2} / p^2{}_i\right|_T D^2{}_g / T\right] - 0 / D^2{}_g =$$

$$= INS(A) + \left[\left|\sum_i \left[\left|\alpha_i m_i\right|_{p_i^2} T / p^2{}_i\right] D^2{}_g\right|_T /_T + \left|\sum_i \left|\alpha_i m_i T\right|_{p_i^2} / p^2{}_i\right|_T D_g^2 / T\right] - 0 / D_g^2.$$

Теорема Т-4. Выполняется соотношение:

$$NS(A) = INS(A) + \left[\sum_i \left|\alpha_i m_i\right|_{p_i^2} D^2{}_g / p^2{}_i\right] - \left[\sum_i \left[\left|\alpha_i m_i\right|_{p_i^2} T / p^2{}_i\right] D^2{}_g / T\right] -$$

$$- \left[\left|\sum_i \left[\left|\alpha_i m_i\right|_{p_i^2} T / p^2{}_i\right]\right|_T / T + \left[\sum_i \left|\alpha_i m_i\right|_{p_i^2} / p^2{}_i\right] / T\right] D^2{}_g.$$

Доказательство. Действительно выполняется следующее:

$$NS(A) = \left[\sum_i \left|\alpha_i m_i\right|_{p_i^2} TD^2{}_g / p^2{}_i T\right] - \left[\sum_i \left|\alpha_i m_i\right|_{p_i^2} / p^2{}_i\right] D^2{}_g =$$

$$\left[\left(\left[\sum_i \left|\alpha_i m_i\right|_{p_i^2} T / p^2{}_i\right] / T\right) D^2{}_g + \sum_i \left|\alpha_i m_i T\right|_{p_i^2} D^2{}_g / p^2{}_i T\right] - \left[\sum_i \left|\alpha_i m_i\right|_{p_i^2} / p^2{}_i\right] D^2{}_g =$$

$$= \left[\left(\left|\sum_i \left[\left|\alpha_i m_i\right|_{p_i^2} T / p^2{}_i\right]\right|_T / T\right) D^2{}_g + \left[\sum_i \left[\left|\alpha_i m_i\right|_{p_i^2} T / p^2{}_i\right]\right] D^2{}_g / T + \beta\right]$$

где
$$\beta = \sum_i \left|\alpha_i m_i T\right|_{p_i^2} D^2{}_g / p^2{}_i T - \left[\sum_i \left|\alpha_i m_i\right|_{p_i^2} / p^2{}_i\right] D^2{}_g.$$

Теорема Т-5. Выполняется соотношение:

$$S(A) = R(AD^2{}_g) - R(A) D^2{}_g.$$

Доказательство. Действительно выполняется следующее:

$$S(A) = \left[\sum_i \alpha_i m_i D^2{}_g / p^2{}_i\right] - \left[\sum_i \alpha_i m_i / p^2{}_i\right] D^2{}_g = \left[\sum_i \alpha_i m_i D^2{}_g / p^2{}_i\right] - R(A) D^2{}_g =$$

$$= \left[\left(\sum_i \alpha_i m_i P^2 / p^2{}_i\right) D^2{}_g / P^2\right] - R(A) D^2{}_g = R(AD^2{}_g) - R(A) D^2{}_g.$$

Теорема Т-6. Выполняется соотношение:

$$IS(A) + D^2{}_g INR(A) = \left[D^2{}_g \sum_i \left[\left|\alpha_i m_i\right|_{p_i^2} T / p^2{}_i\right] / T\right].$$

Доказательство. Действительно выполняется следующее:

$$INS(A) = \left[\left|\sum_i \left[\left|\alpha_i m_i\right|_{p_i^2} T / p^2{}_i\right]\right|_T / TD^2{}_g\right] =$$

$$= \left[D^2{}_g \sum_i \left[\left|\alpha_i m_i\right|_{p_i^2} T / p^2{}_i\right] / T - D^2{}_g \left[\sum_i \left[\left|\alpha_i m_i\right|_{p_i^2} T / p^2{}_i\right] / T\right]\right] =$$

$$= \left[D^2{}_g \sum_i \left[\left|\alpha_i m_i\right|_{p_i^2} T / p^2{}_i\right] / T\right] - D^2{}_g INR(A).$$

Теорема Т-7. Выполняется соотношение:

$$NJ(A) = NS(A \cdot NJ(P^2)) - NR(\left|A \cdot NJ(P^2)\right|_{P^2} / P^2).$$

Доказательство. Действительно выполняется следующее:

$$NJ(A) = \sum_i \left[A\tau_i / p^2{}_i\right] = \sum_i A\tau_i / p^2{}_i - \sum_i \left|\alpha_i \tau_i\right|_{p_i^2} / p^2{}_i =$$

$$= -\left(\sum_i \left|\alpha_i m_i \tau_i'\right|_{p_i^2} / p^2{}_i - A \cdot NJ(P^2) / P^2 = -\left(\sum_i \left|\alpha_i m_i \tau_i'\right|_{p_i^2} / p^2{}_i -\right.\right.$$

$$\left. - \left|A \cdot NJ(P^2)\right|_{P^2} / P^2\right) + \left[A \cdot NJ(P^2) / P^2\right] =$$

$$= -NR\left(\left|A \cdot NJ(P^2) / P^2\right|_{P^2}\right) + NS(A \cdot NJ(P^2)),$$

где: $\left(\tau_1' ... \tau_{n+g}'\right) = NJ(P^2)$.

Теорема Т-8. Выполняется соотношение:

$$|NJ(A)|_{NJ(P^2)/R(A)} = \left|\sum_i \alpha_i NJ(B_i) + \sum_i \left[\alpha_i \tau_i / p^2{}_i\right]\right|_{NJ(P^2)/R(A)} .$$

Доказательство. Действительно выполняется следующее:

$$NJ(A) = \left(\sum_i \alpha_i m_i P^2 / p^2{}_i - R(A)P^2\right) NJ(P^2) - \sum_i |\alpha_i \tau_i|_{p_i^2} / p_i^2 =$$

$$= \sum_i \alpha_i m_i NJ(P^2) / p^2{}_i - R(A) NJ(P^2) - \sum_i |\alpha_i \tau_i|_{p_i^2} / p^2{}_i =$$

$$= \sum_i \alpha_i \left(\sum_i m_i P^2 \tau_i / p^2{}_i \cdot p^2{}_i - \tau_i / p^2{}_i + \tau_i / p^2{}_i\right) - \sum_i |\alpha_i \tau_i|_{p_i^2} / p^2{}_i - R(A) NJ(P^2) =$$

$$= \sum_i \alpha_i NJ(B_i) + \sum_i \alpha_i \tau_i / p^2{}_i - \sum_i |\alpha_i \tau_i|_{p_i^2} / p^2{}_i - R(A) NJ(P^2) =$$

$$= \sum_i \alpha_i NJ(B_i) + \sum_i \left[\alpha_i \tau_i / p^2{}_i\right] - R(A) NJ(P^2) \cdot$$

Теорема Т-9. Выполняется соотношение:

$$J(A) = S(A \cdot J(P^2)) - NR(|A \cdot J(P^2)|_{P^2}) - \sum_i \left[\alpha_i \tau_i / p^2{}_i\right] \cdot$$

Доказательство. Действительно выполняется следующее:

$$J(A) = \sum_i \left[A / p^2{}_i\right] \tau_i = \sum_i A\tau_i / p^2{}_i - \sum_i \alpha_i \tau_i / p^2{}_i =$$

$$A / P^2 \cdot J(P^2) - \sum_i \alpha_i \tau_i / p^2{}_i = -\left(\sum_i \alpha_i \tau_i P^2 / p^2{}_i \cdot P^2 - \right.$$

$$\left. - \left[A \cdot J(P^2) / P^2\right] - |A \cdot J(P^2)|_{P^2} / P^2\right) =$$

$$= -\left(\sum_i |\alpha_i \tau_i' m_i|_{p_i^2} P^2 / p^2{}_i P^2 - (A \cdot J(P^2)(P^2 / P^2) - \sum_i \left[\alpha_i \tau_i / p^2{}_i\right] + \right.$$

$$\left. + \left[A \cdot J(P^2) / P^2\right] = -NR(|A \cdot J(P^2)|_{P^2}) + S(A \cdot J(P^2)) - \sum_i \left[\alpha_i \tau_i / p^2{}_i\right].$$

Способ использования функционалов для выполнения немодульных операций и реализаций модулярных вычислительных процессов в модулярной арифметике является отдельной проблематикой [8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Амербаев В. М. Теоретические основы машинной арифметики. Алма-Ата: Наука, 1976. 320 с.

2. Инютин С. А. Основы многоразрядной алгоритмики. Сургут: РИО, 2002. 137.

3. Ноден П. и др. Алгебраическая алгоритмика. М.: Мир, 1999. 720 с.

4. Inyutin S. A. Parallel Square Modular Computer Algebra // Lecture Notes in Computer Science: Parallel Processing and Applied Mathematics (PPAM). German Poland: Springer, 2003, LNCS № 3019. P. 993-997.

5. Инютин С. А. Модулярные вычисления в сверхбольших компьютерных диапазонах // Известия вузов. Электроника. 2001. № 6. С. 34-39.

6. Инютин С. А. Помехозащитные модулярные кодовые конструкции квадратичного диапазона // Вестник Тюменского госуниверситета. 2003. № 5. С. 173-180.

7. Инютин С. А. Компьютерная модулярная алгебра квадратичного диапазона и область ее приложения // Вестник Тюменского госуниверситета. 2001. № 2. С. 141-148.

8. Инютин С. А. Вычислительные задачи большой алгоритмической сложности и модулярная арифметика // Вестник Тюменского госуниверситета. 2002. № 3. С. 3-9.

Сергей Александрович БАРДАСОВ — доцент кафедры экономики и управления собственностью, кандидат физико-математических наук

УДК 519.21(075.8)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ЧИСЛА ГРУПП ИНТЕРВАЛЬНОГО ВАРИАЦИОННОГО РЯДА

АННОТАЦИЯ. Функция максимального правдоподобия используется для определения оптимального числа групп вариационного ряда.

The function of the maximal plausibility is used for definition of optimum number of groups of variational series.

Пусть имеется n объектов, которые характеризуются ранжированными в порядке возрастания численными значениями $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$ некоторого признака. Построим интервальный вариационный ряд, то есть образуем m групп. Определим для полученного ряда функцию максимального правдоподобия, зависящую от числа групп m и от способа их получения, по формуле:

$$L = L(x_1, x_2, \ldots, x_n; m) = \left(\frac{f_1}{n\lambda_1}\right)^{f_1} \cdot \left(\frac{f_2}{n\lambda_2}\right)^{f_2} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{f_m}{n\lambda_m}\right)^{f_m}, \qquad (1)$$

где f_i – количество значений признака в i – й группе $\left(\sum_{i=1}^{m} f_i = n,\ f_i \ge 1\right)$,

λ_i – длина i – го группового интервала $\left(\lambda_i > 0,\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = \Lambda = x_n - x_1\right)$.

Таким образом, если какое-либо значение признака x оказалось в i – й группе, то плотность вероятности в точке x полагается равной $\left(\frac{f_i}{n\lambda_i}\right)$. При определении функции (1) полагаем, что при построении ряда не должно быть пустых групп и групповых интервалов, равных нулю.

Рассмотрим возможность получения критерия для оптимального числа групп m, при котором функция правдоподобия примет максимальное значение. В случае равных интервалов, имеем:

$$L_1 = \left(\frac{f_1}{n\lambda}\right)^{f_1} \cdot \left(\frac{f_2}{n\lambda}\right)^{f_2} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{f_m}{n\lambda}\right)^{f_m} = \frac{f_1^{f_1} \cdot f_2^{f_2} \cdot \ldots \cdot f_m^{f_m}}{n^n \lambda^n} =$$

$$= \frac{f_1^{f_1} \cdot f_2^{f_2} \cdot \ldots \cdot f_m^{f_m} \cdot m^n}{n^n \Lambda^n}, \quad \lambda = \frac{\Lambda}{m}.$$