

**Анвар Гумерович КУТУШЕВ** —  
 профессор кафедры механики  
 многофазных систем,  
 д. физ.-мат. н.

**Алексей Викторович ТАТОСОВ** —  
 доцент кафедры математического  
 моделирования,  
 к. физ.-мат. н., доцент

УДК 622.692.

## СВОБОДНОЕ ИСТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ИЗ ТРУБЫ В ЗАТОПЛЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО

**АННОТАЦИЯ.** Рассматривается процесс истечения жидкости из круглой полуограниченной трубы в пространство, затопленное другой жидкостью, обусловленный различием плотностей. Построено автомодельное решение уравнений движения. Дано сравнение с экспериментальными данными.

*Leakage of viscous liquid from submarine pipeline is considered. The experimental comparison is given.*

### Введение.

Предлагается постановка, известная в литературе как задача об утечке нефти при гильотинном разрыве подводного трубопровода (см., например, [1-3]). Полубесконечная горизонтальная труба заполнена одной жидкостью и полностью погружена в другую жидкость (рис. 1). В начальный момент времени начинается движение. Необходимо описать распространение волны вытеснения в трубе. В работе [2] приведена математическая модель течения жидкостей в трубе, подобраны решения уравнений движения. В настоящей работе предлагается уравнение импульсов совместного движения сред, несколько отличающееся от [2]. Определяется форма автомодельного решения уравнений движения. Основная цель работы состояла в определении количественных оценок и качественных особенностей рассматриваемых процессов.

### 1. Математическая постановка задачи

*Допущения:*

- Течение ламинарное с четкой границей раздела жидкостей;
- Капиллярные эффекты не учитываются;
- Модель течения квазиодномерная;
- Длина волны много больше диаметра трубы.

*Обозначения:*  $p$ ,  $\rho$ ,  $n$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  — давление, плотность, скорость динамическая и кинематическая вязкости жидкости;  $s_1$ ,  $s_2$  и  $h_1$ ,  $h_2$  — площадь поперечных сечений и высота слоев жидкостей, индексы 1 и 2 относятся соответственно к легкой и тяжелой средам;  $s$ ,  $D$  — площадь сечения и диаметр трубы;  $g$  — ускорение свободного падения.



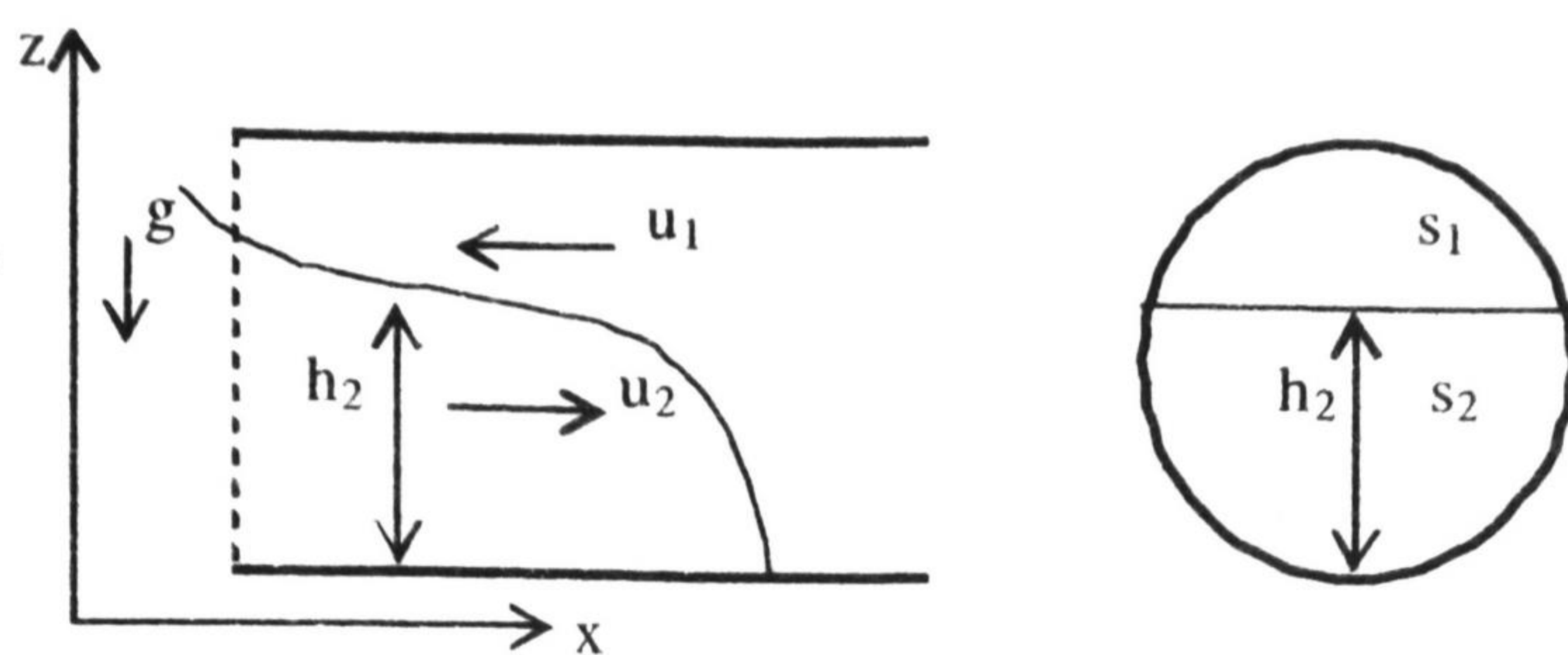


Рис. 1. Схематическое представление задачи. Пунктиром показано первоначальное положение границы раздела сред.

*Модель течения.* Уравнение импульсов первой (легкой) жидкости в принятом приближении можно представить в виде [4]:

$$\rho_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \tau_1, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_1 g. \quad (1.2)$$

Здесь  $\tau_1$  проекция на ось силы трения, действующей на первую жидкость со стороны ограничивающих ее поверхностей, отнесенная к единице объема.

Из уравнений (1.1)-(1.2) находим:

$$\rho_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p_f}{\partial x} - \rho_1 g \frac{\partial z_f}{\partial x} + \tau_1, \quad (1.3)$$

где  $p_f$  давление на границе раздела жидкостей,  $z_f$  координата точек границы раздела. Аналогично для второй (тяжелой) жидкости:

$$\rho_2 \left( \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p_f}{\partial x} - \rho_2 g \frac{\partial z_f}{\partial x} + \tau_2. \quad (1.4)$$

В дальнейшем положим  $\partial z_f / \partial x = \partial h_2 / \partial x$ . Вычитая из (1.3) уравнение (1.4) и пренебрегая инерцией жидкостей, получим следующее основное уравнение совместного движения:

$$(\rho_2 - \rho_1)g \frac{\partial h_2}{\partial x} + \tau_1 - \tau_2 = 0. \quad (1.5)$$

Условия неразрывности обоих потоков:

$$\frac{\partial s_1}{\partial t} + s_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial s_1}{\partial x} = 0, \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial s_2}{\partial t} + s_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2 \frac{\partial s_2}{\partial x} = 0. \quad (1.7)$$

Связь геометрических параметров зададим в дифференциальной форме:

$$d(s_1 + s_2) = 0, \quad (1.8)$$

$$ds_2 = 2\sqrt{Dh_2 - h_2^2} dh_2. \quad (1.9)$$

Уравнения (1.6) — (1.9) имеют интегралы:

$$s_1 + s_2 = s, \quad s_1 u_1 + s_2 u_2 = 0, \quad s_2 = s_2(h_2).$$



Силу трения в (1.5) аппроксимируем согласно [2]:

$$\tau_1 - \tau_2 = \frac{s_2 u_2}{s^2} \mu(\theta), \quad (1.10)$$

$$\mu(\theta) = 3 \frac{c_1 \theta^4 \mu_1^2 + \theta(1-\theta) \{ \theta [c_1(1+\theta) + 2] + (1-\theta) [2 + c_2(2-\theta)] \} \mu_1 \mu_2 + c_2 (1-\theta)^4 \mu_2^2}{\theta^3 (1-\theta)^3 [\theta \mu_1 + (1-\theta) \mu_2]}.$$

Здесь:  $\mu(\theta)$  — эффективная вязкость,  $\theta = s_2/s$ ,  $c_1 = 3 - 2\theta$ ,  $c_2 = 1 + 2\theta$ .

Система уравнений движения дополняется заданием краевых условий. На срезе трубы:  $h_2 = h_0$  при  $x=0$ ; на носике волны:  $h_2 = 0$  при  $x=L(t)$ , если вытекает легкая жидкость и  $h_2 = D$  при  $x=L(t)$ , если вытекает тяжелая жидкость. В данной задаче потребуем максимальной скорости вытеснения жидкости.

## 2. Автомоделное движение

Будем искать решение уравнений (1.5)-(1.10) в виде:

$$h_2(x,t) = t^p H^* H_2(\xi), s_1(x,t) = t^q S^* S_1(\xi), s_2(x,t) = t^q S^* S_2(\xi),$$

$$u_1(x,t) = t^r U^* U_1(\xi), u_2(x,t) = t^r U^* U_2(\xi), \xi = \frac{x}{E^* t^m}. \quad (2.1)$$

Здесь:  $H_2, S_1, S_2, U_1, U_2$  — безразмерные функции автомоделной переменной  $\xi$ ;  $H^*, S^*, U^*, E^*$  — размерные постоянные.

Подставляя решение в виде (2.1) в уравнения (1.5)-(1.10), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно автомоделной переменной  $\xi$ :

$$\begin{aligned} \frac{dH_2}{d\xi} + \bar{\mu} S_2 U_2 &= 0, \\ -m\xi \frac{dS_1}{d\xi} + S_1 \frac{dU_1}{d\xi} + U_1 \frac{dS_1}{d\xi} &= 0, \\ -m\xi \frac{dS_2}{d\xi} + S_2 \frac{dU_2}{d\xi} + U_2 \frac{dS_2}{d\xi} &= 0, \\ \frac{dS_1}{d\xi} + \frac{dS_2}{d\xi} = 0, \frac{dS_2}{d\xi} &= \frac{8}{\pi} \sqrt{H_2 - H_2^2} \frac{dH_2}{d\xi}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $\bar{\mu}$  — «безразмерная вязкость», определяемая равенством

$$\bar{\mu} = 3 \frac{a_1 S_2^4 \frac{\mu_1}{\mu_2} + S_1 S_2 \{ S_2 [a_1(1+S_2) + 2] + S_1 [a_2(1+S_1) + 2] \} + a_2 S_1^4 \frac{\mu_2}{\mu_1}}{S_1^3 S_2^3 \left[ S_2 \frac{\mu_1}{\mu_2} + S_1 \right]}$$

$$a_1 = 1 + 2S_1, a_2 = 1 + 2S_2;$$

найдем значения безразмерных параметров:

$$p = q = 0, r = -\frac{1}{2}, m = \frac{1}{2};$$



и размерных постоянных:

$$H^* = D, S^* = \frac{\pi D^2}{4}, U^* = E^* = \sqrt{\frac{\pi (\rho_2 - \rho_1) g D^3}{4 \mu_1}}$$

Уравнения (2. 2) имеют интегралы:

$$S_1 + S_2 = 1, S_1 U_1 + S_2 U_2 = 0, S_2 = S_2(H_2).$$

Система уравнений (2.2) дополняется краевыми условиями, соответствующими постановке задачи

$$\xi = 0: H_2 = H_0; \xi = \xi_0: H_2 = 0 \text{ — вытекает легкая жидкость,}$$

$$\xi = 0: H_2 = H_0; \xi = \xi_0: H_2 = 1 \text{ — вытекает тяжелая жидкость.}$$

Здесь:  $\xi_0$  — неопределенный параметр.

*Анализ расчетов.* Распределение безразмерных функций по длине трубы ищем, решая численно краевую задачу. Решение существенно зависит от отношения динамических вязкостей жидкостей. В дальнейшем, если особо не оговаривается, будем считать  $\mu_1/\mu_2=8. 2$ . Такая пропорция соответствует системе нефть-вода.

Пусть труба первоначально заполнена легкой жидкостью. На рис. 2 показана форма и скорость волны вытеснения, распространяющейся в положительном направлении. Граничное условие на входе принято:  $H_2=0.85$  при  $\xi_0=0$ . В реальной картине течения толщина слоя вытекающей из трубы жидкости  $h_1$  должна непрерывно уменьшаться, ввиду замедления потока. В пределе, при  $t \rightarrow \infty$ , скорости жидкостей  $u_1, u_2 \rightarrow 0$  и, следовательно,  $h_1 \rightarrow 0, h_2 \rightarrow D$ . Реальное движение жидкости приближается к автомодельному виду лишь асимптотически. Таким образом, определить толщину слоев во входном сечении канала в рамках данной модели невозможно.

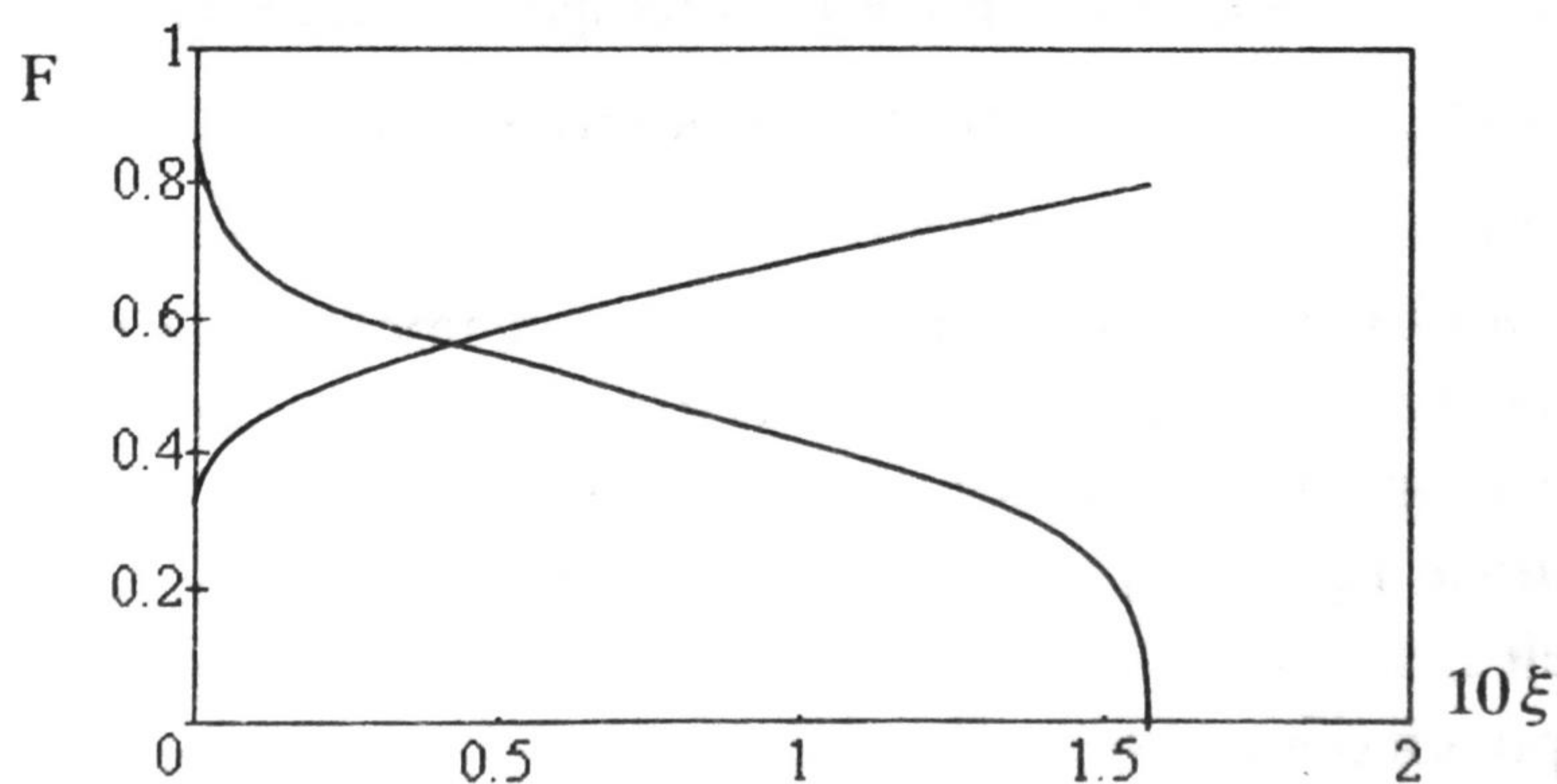


Рис. 2. Распределение безразмерных функций автомодельной переменной вдоль трубы. Кривые 1, 2 — соответственно высота слоя и скорость тяжелой жидкости.

Увеличение  $H_2$  приводит к монотонному росту расхода  $S_2 U_2$  на срезе трубы. Однако расчеты показали, изменение доли вытесненной жидкости:

$$\omega = \frac{1}{\xi_0} \int_0^{\xi_0} S_2(\xi) d\xi = \frac{1}{sL} \int_0^L s_2(x) dx$$

не превосходит  $\delta=0.005$ , на интервале значений  $0.85 < H_2 < 1$ . Примечательно



также, что форма передней части и положение фронта волны при этом не испытывают видимых изменений.

Объем вытесненной жидкости определяется как

$$V(t) = s\omega L(t), \quad L(t) = \xi_0 U^* \sqrt{t}. \quad (2.3)$$

На рис. 3 дано сравнение расчетных и экспериментальных данных объема вытекшей жидкости при гильотинном разрыве подводного нефтепровода, указанных в [2]. Численные значения параметров нефти и воды в СИ:  $\rho_1=844$ ,  $\rho_2=999$ ,  $10^6\nu_1=10.2$ ,  $10^6\nu_2=1.05$ ; диаметр трубы:  $D=0.103$ ; для волны вытеснения имеем:  $\xi_0 \approx 0.162$ ,  $\omega \approx 0.405$ . В отмеченной работе указана также теоретическая зависимость объема вытекшей нефти от времени, совпадающая по форме с (2.3). Однако само уравнение импульсов совместного движения, хоть и незначительно, но отличается от уравнения предложенного в данной работе. Возможно, этим и объясняется расхождение теоретических кривых.

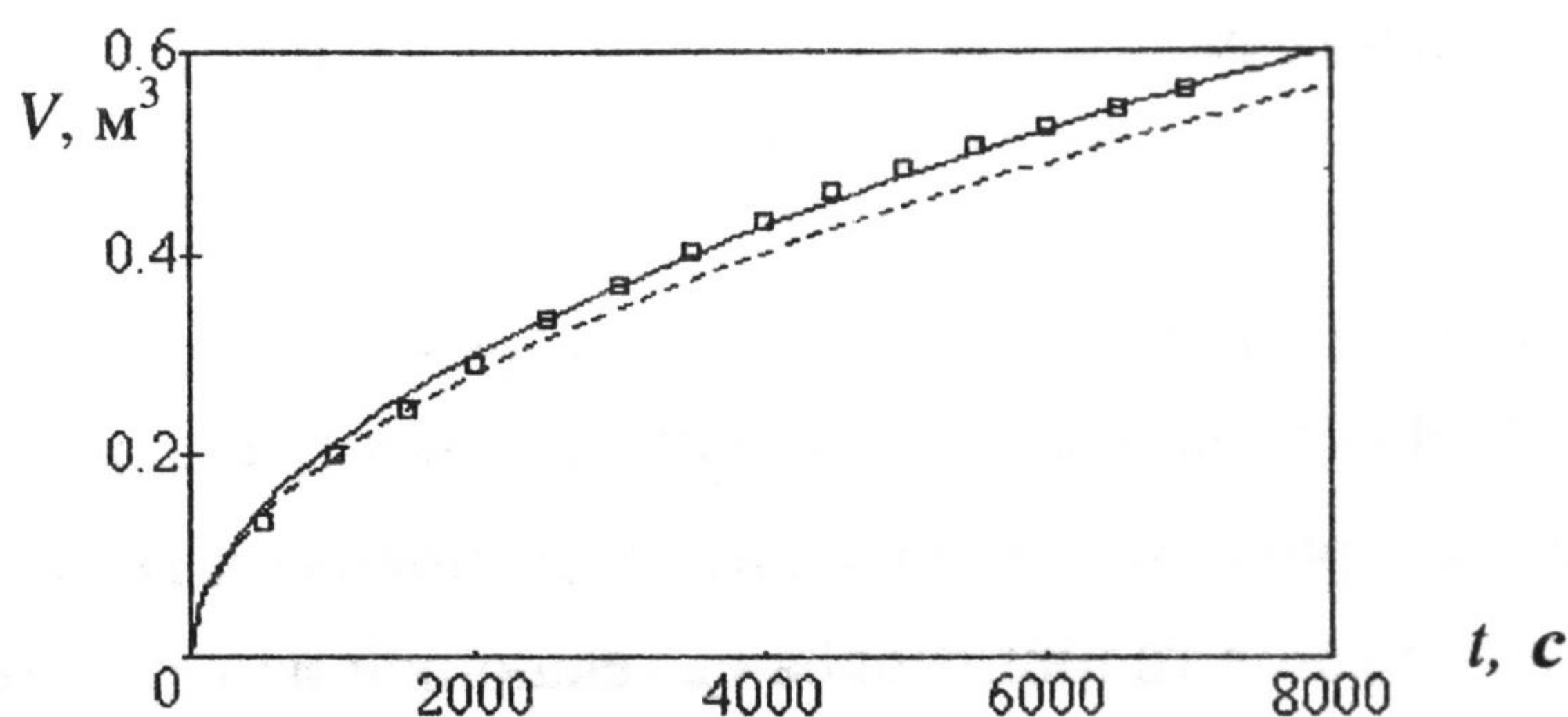


Рис. 3. Сравнение теоретических кривых и экспериментальных данных объема вытесненной нефти от времени: точки — эксперимент [2], пунктир — теоретическая кривая [2], сплошная линия — соответствует приведенному расчету.

Аналогично решается задача об истечении тяжелой жидкости в затопленное пространство. Скорость продвижения фронта волны в трубе несколько меньше:  $\xi_0 \approx 0.145$ , доля вытесненной жидкости больше:  $\omega \approx 0.48$ .

### Заключение

При численном моделировании указанных процессов движения вязких сред выявлены следующие особенности. Изменение уравнения импульсов дало несколько иную теоретическую кривую, на которую лучше ложатся экспериментальные данные при больших временах. Увеличение отношения динамических вязкостей легкой и тяжелой сред ведет к уменьшению доли вытеснения. При смене ролей обеих жидкостей (истечение тяжелой жидкости) скорость волны уменьшается, а доля вытеснения увеличивается.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kranenburg, C. Exchange flow of oil and sea-water in a ruptured submarine pipeline // Applied Ocean Research. 1984. Vol. 6, No. 1. P. 23-30.
2. Kranenburg, C., Vegt E. Leakage from ruptured submarine oil pipeline // Journal of Transportation Engineering. 1985. Vol. 111, No. 5. P. 570-579.
3. Зоненко В. И., Ким Б. И., Минаев В. И. Моделирование утечки нефти при разрыве подводного трубопровода // Нефтепромышленное дело и транспорт нефти. 1985, № 11. С. 24-26.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988.