

*Николай Владимирович ОСТРОВСКИЙ —  
преподаватель Вятского государственного  
университета (г. Киров), к. т. н*

УДК 521.11+521.174

## **ВЛИЯНИЕ СОЛНЦА НА ДВИЖЕНИЕ СПУТНИКА ЗЕМЛИ**

*АННОТАЦИЯ. В работе на основе анализа литературных данных показано, что система Солнце – Земля – Луна не может быть описана с использованием классических уравнений небесной механики. Для решения данной проблемы автором предложено оригинальное обобщенное уравнение гравитационного взаимодействия.*

*The author having analyzed several theoretical sources demonstrates that the system Sun – Earth – Moon can be not described with the use of classical equations of celestial mechanics, and offers an original generalized equation of gravitational interaction to solve this problem.*

### **1. Постановка задачи**

Движение Луны по околоземной орбите необъяснимо в рамках современной небесной механики, опирающейся на уравнение Ньютона [1; 54]:

$$F_m = GMm/r^2, \quad (1)$$

где:  $F_m$  — сила притяжения между телами,  
 $G$  — универсальная гравитационная постоянная,  
 $M$  и  $m$  — массы взаимодействующих тел,  
 $r$  — расстояние между телами.

Вычисленная согласно данному уравнению сила притяжения Луны к Земле оказывается почти вдвое меньше силы притяжения Луны к Солнцу. Для объяснения данного парадокса было использовано множество подходов, обзор которых дан в работе [2], но ни один из них нельзя признать удовлетворительным.

Уравнение (1) было предложено Ньютоном для взаимодействия двух тел. Оно вполне удовлетворительно описывает взаимодействие Земли и Солнца и относительно удовлетворительно — взаимодействие Земли и Луны (изолированно от Солнца).

Чтобы устранить это противоречие с реальностью, была предложена модель (см., например, [3]), согласно которой Земля и Луна обращаются вокруг общего центра инерции («концепция барицентра»), который, в свою очередь, обращается вокруг Солнца. Однако в этом случае угол между линией, соединяющей центры Земли и Луны, и осью собственного вращения Земли был бы величиной постоянной и продолжительность нахождения Луны над линией горизонта (для каждой широты) была бы постоянной, что противоречит данным наблюдений [4]. Таким образом, концепция барицентра оказывается несостоятельной.

Уравнение (1) описывает скалярную величину. Впрочем, И. Ньютон исходил из того, что оба тела действуют друг на друга с одинаковой силой [5; 130]. Такой подход для системы из двух тел был вполне приемлем. Но как быть в случае системы из трех тел? Как было указано выше, Луна находится в

сфере тяготения Солнца, но обращается вокруг Земли. В современной теории гравитации используется понятие **гравитационного потенциала** [6; 5]:

$$V=A/m=GM/\rho, \quad (2)$$

который связан с величиной работы  $A$ , необходимой для того, чтобы удалить тело с массой  $m$ , находящееся на расстоянии  $\rho$  от тела с массой  $M$ , на бесконечно большое расстояние. Если нам необходимо вычислить гравитационный потенциал от произвольного распределения массы в пространстве, то необходимо взять объемный интеграл [6; 9]:

$$V = G \int_T dm / \rho \quad (3)$$

Основываясь на понятии гравитационного потенциала, была предложена модель, согласно которой пробное тело в гравитационном поле двух тел может свободно перемещаться по эквипотенциальной поверхности без затраты энергии, свободно переходя из окрестности одной компоненты в окрестности другой. Такая поверхность получила название «критической поверхности Роша» [1; 92]. Однако орбита Луны вовсе не находится на поверхности Роша, хотя оказывается, что положение орбиты Луны на радиус-векторе Земли относительно Солнца приблизительно соответствует минимуму гравитационного потенциала (рис. 1).

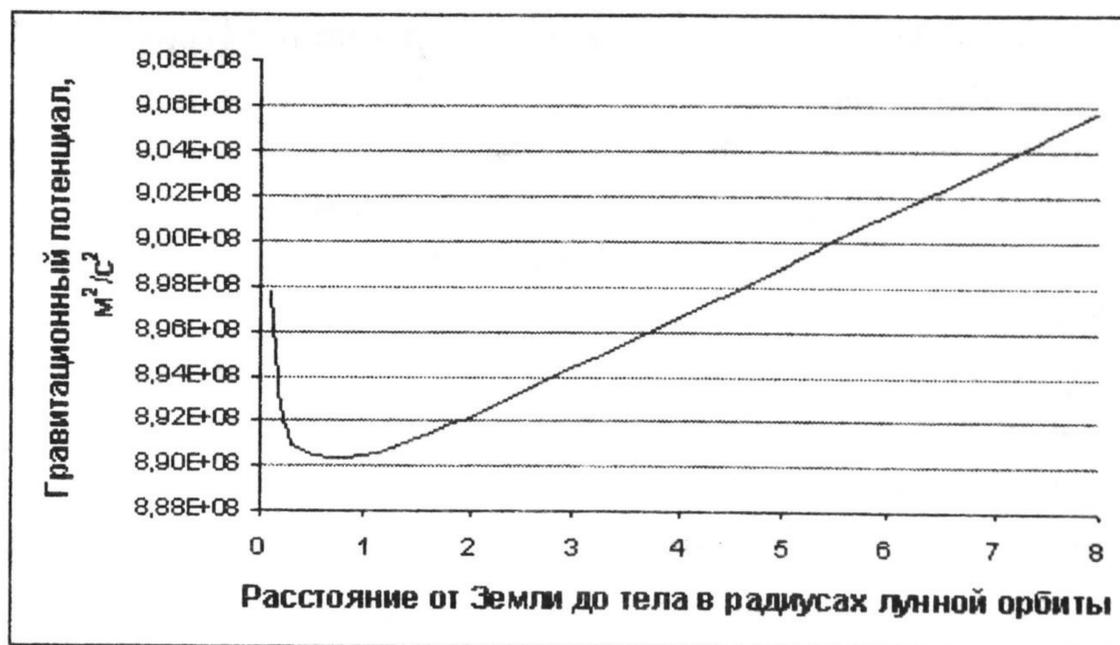


Рис. 1. Зависимость суммарного потенциала гравитационного поля Солнца и Земли от расстояния

## 2. Вывод обобщенного уравнения гравитационного взаимодействия

С использованием гравитационного потенциала может быть введена величина напряженности гравитационного поля (численно равной ускорению силы тяжести) [6; 17]:

$$g = \text{grad}V. \quad (4)$$

Тогда сила притяжения, описываемая уравнением (1), оказывается равной произведению напряженности гравитационного поля на массу пробного тела. В этом случае сила притяжения становится уже векторной величиной. Но мы установили выше, что подобное описание не объясняет поведение Луны в системе Солнце – Луна – Земля. Сила притяжения пробного тела к Солнцу равна силе притяжения пробного тела к Земле на расстоянии  $2,589 \cdot 10^8$  м от Земли (рис. 2).

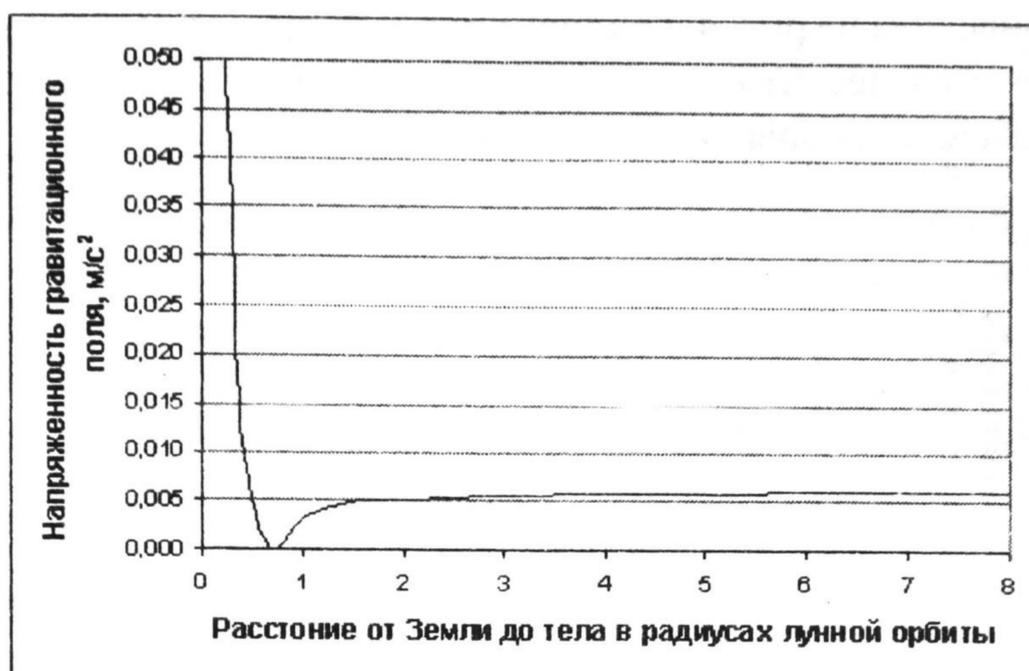


Рис. 2. Зависимость модуля напряженности суммарного гравитационного поля Земли и Солнца от расстояния

Если мы применим уравнение (4) к уравнению (3), то напряженность гравитационного поля будет равна [6; 17]:

$$g = G \int_T (r' - r) dm / \rho^3 \quad (5)$$

где:  $r'$  и  $r$  — радиус-векторы элемента объема и пробного тела.

В случае двух тел уравнение (5) дает следующий результат:

$$g^2 = G[(r_1 - r)m_2 / |r_1 - r|^3 + (r_2 - r)m_1 / |r_2 - r|^3] \quad (6)$$

В работе [7] автором было предложено при оценке гравитационного взаимодействия многих тел учитывать **градиент напряженности гравитационного поля**. Напряженность гравитационного поля, создаваемого Солнцем и Землей, можно выразить как:

$$g_{C3} = G[M_3/r_3^2 + (M_C/r_C^2)\cos\alpha], \quad (7)$$

где:  $\alpha$  — угол между  $r_3$  и  $r_C$  (рис. 3).

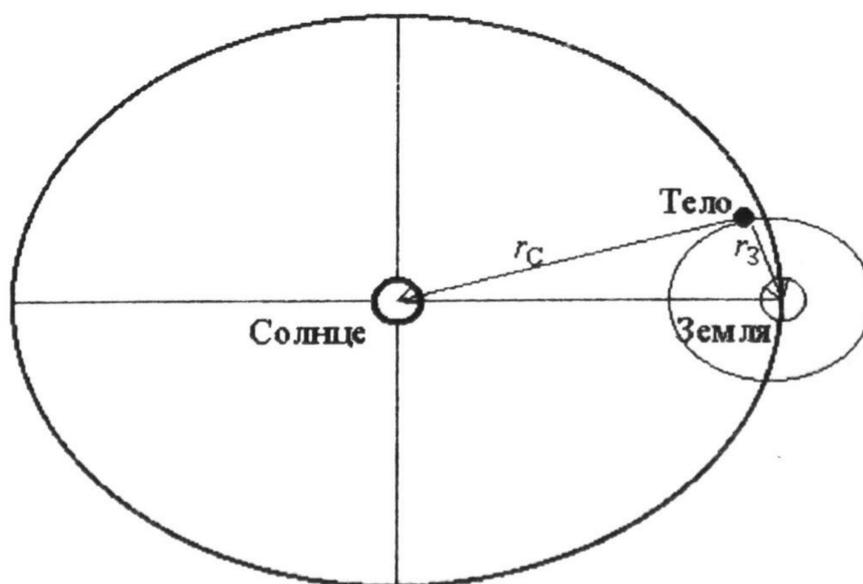


Рис. 3. Схема для описания взаимодействия в системе из трех тел.

Тогда градиент напряженности поля будет равен:

$$\text{grad}g_{C3} = d[G(M_C/(r_{C-r})^2 + M_3/r_3^2)]/dr = -2G(M_C/r_C^3 - M_3/r_3^3). \quad (8)$$

В данном случае речь идет о векторных значениях радиусов пробной точки. Зависимость градиента напряженности гравитационного поля системы Сол-

нце—Земля приведена на рис. 4. Градиент равен нулю на расстоянии  $2,161 \cdot 10^9$  м от Земли. Это означает, что на меньших расстояниях сила притяжения будет обращена к Земле, а на больших расстояниях — к Солнцу.

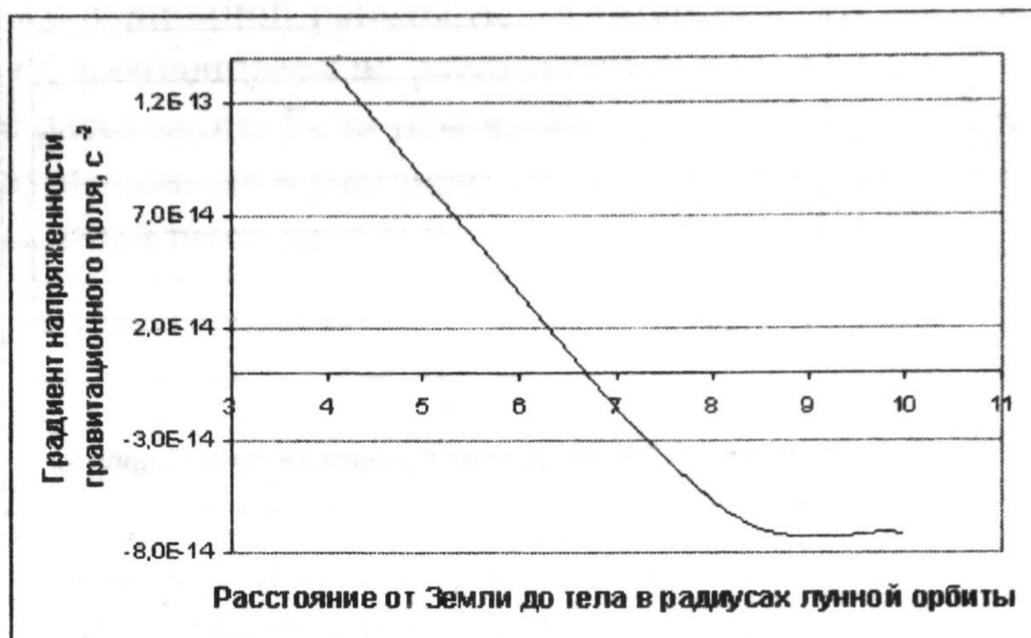


Рис. 4. Зависимость градиента напряженности суммарного гравитационного поля Солнца и Земли от расстояния

Итак, объяснить направленность силы тяготения в гравитационном поле многих тел можно, используя понятие «градиент напряженности гравитационного поля». Но тогда возникает вопрос: каким выражением должна описываться сила притяжения Луны к Земле? Мы уже отметили выше, что она не равна векторной сумме сил, описываемых уравнением (1). Логично предположить, что за основу для дальнейших рассуждений может быть принято уравнение (8). Произведение градиента напряженности гравитационного поля на массу имеет размерность Н/м. Получить искомую размерность силы можно, введя дополнительный множитель, имеющий размерность «расстояния». Дополнительным элементом должен быть также угол между направлениями от Луны к Солнцу и к Земле, который учитывает направленность гравитационного воздействия. В результате мы получаем уравнение:

$$F_3 = G m_{\text{Л}} r_3 [M_3 / r_3^3 + (M_{\text{С/С}})^3 \cos \alpha], \quad (9)$$

где:  $\alpha$  — угол между радиус-вектором Луны относительно Земли и радиус-вектором Луны относительно Солнца.

Если теперь уравнение (9) переписать в векторном виде и распространить на систему из  $n$  тел, то мы получим следующее выражение для силы взаимодействия между двумя телами (**обобщенное уравнение гравитационного взаимодействия**) [7]:

$$F_{12} = G * m_1 r_{12} * \sum_{i=2}^n m_i / r_{1i}^3, \text{ где } \sum_{i=2}^n m_i / r_{1i}^3 \text{ является векторной величиной.} \quad (10)$$

В случае системы из двух тел уравнение (10) сводится к уравнению Ньютона (1).

### 3. Использование обобщенного уравнения гравитационного взаимодействия в расчетах

Сила, вычисленная по уравнению (9), направлена в сторону Земли. Однако построение динамической модели для лунной орбиты связано с рядом сложностей.

Во-первых, необходимо учитывать наклон лунной орбиты к плоскости эклиптики, во-вторых — смещение линии узлов лунной орбиты, и, в-третьих, нельзя исключать из рассмотрения гравитационное поле самой Луны. Поэтому в данной работе будут рассмотрены результаты расчетов для модели, включающей обращение вокруг Земли тела с бесконечно малой массой, движущегося в плоскости эклиптики.

В работе [8] была представлена модель для расчета орбитальных параметров движения одного тела вокруг другого, обладающего значительно большей, по сравнению с первым, массой. Кроме силы притяжения, в модели используется центробежная сила [9; 844]:

$$F_{ц} = mv^2/r, \quad (11)$$

где:  $m$  — масса тела,

$v$  — его скорость,

$r$  — радиус кривизны,

и закон сохранения момента количества движения [3; 438]:

$$K = mvr = const. \quad (12)$$

Под действием равнодействующей силы притяжения и центробежной силы тело совершает ускоренное движение вдоль радиус-вектора. Изменения длины радиус-вектора приводят к изменению линейной скорости, входящей в уравнения (11) и (12). Пошаговые расчеты с интервалом времени в один час позволяют вычислить параметры околосолнечной орбиты Земли с точностью не хуже чем  $2 \cdot 10^{-5}$  (для одного оборота), что приемлемо для оценки адекватности физической модели.

В случае применения данной модели для системы Луна-Земля с использованием для описания силы притяжения уравнения (1) и табличных средних значений лунной орбиты угол поворота Луны за время, равное сидерическому периоду обращения, оказался равным всего  $352^\circ$ .

В настоящей работе рассматривается система из трех тел: Солнце, Земля и пробное тело (спутник). Расчеты выполнялись отдельно для движения Земли вокруг Солнца и для движения спутника вокруг Земли. В случае Земли ускорение силы тяжести вычислялось исходя из уравнения (1), а в случае спутника — исходя из уравнения (9). При этом была рассмотрена следующая задача. Телу, находящемуся на расстоянии  $r_0$  от Земли, придавали круговую скорость, определяемую равенством силы притяжения Ньютона (1) и центробежной силы (11) [1; 85]:

$$v_{кр.} = (GM_3/r_0)^{1/2} \quad (13)$$

Через период времени, равный периоду обращения по круговой орбите:

$$T = 2\pi r_0 / v_{кр.} = 2\pi (r_0^3 / GM_3)^{1/2}, \quad (14)$$

мы сравним параметры орбиты тела, приобретенные за счет учета влияния Солнца, по уравнению (9) с исходными значениями. Для каждого расчета Земля начинала свое движение из перигелия. Тело в начальном положении (нулевое значение угла поворота) находилось на радиус-векторе Земли относительно Солнца, между Солнцем и Землей (в соединении). Единичный интервал времени в шаговом расчете равен 1 минуте для значений  $r_0$  меньших, либо равных  $3,844 \cdot 10^8$  м (значение полуоси лунной орбиты) и 1 часу при больших значениях  $r_0$ . Результаты расчетов представлены в табл. 1.

Отличие времени расчета от периода обращения связано с дискретностью единичного интервала времени. Как мы видим из таблицы, влияние Солнца начинает ощущаться при  $r_0$ , составляющем всего 0,02 величины полуоси лунной орбиты.

Однако это влияние весьма незначительно, на уровне  $1 \cdot 10^{-6}$  за один оборот, так что даже для высоко летающих спутников Земли оно несущественно. На орбите Луны это влияние становится ярко выраженным. За период кругового обращения тело совершает поворот на  $362,2^\circ$ . К этому моменту тело уже прошло перигей и начало удаляться от Земли: радиальная скорость равна — 17,7 м/с. Длина радиус-вектора тела уменьшилась на 0,38%, линейная скорость увеличилась на 0,39%.

Таблица 1

Результаты расчетов орбитальных параметров пробного тела при различных начальных значениях радиуса

Начальные параметры									
$r_0, \text{ м} \cdot 10^8$	0,03844	0,07688	0,1538	0,3075	1,230	3,844	7,688	11,53	11,65
$v_{кр.}, \text{ м/с}$	10187,95	7203,97	5093,976	3601,985	1800,993	1018,795	720,397	588,202	585,170
$T, \text{ сут.}$	0,027439	0,077608	0,219509	0,620866	4,9669251	27,438642	77,6080	142,5750	144,7996
Конечные параметры									
$T_{рас.}, \text{ сут.}$	0,027778	0,077778	0,220139	0,621528	4,967361	27,438889	77,6250	142,5830	144,7920
$\delta T/T$	0,012360	0,002185	0,002869	0,001067	$8,776 \cdot 10^{-5}$	$9,002 \cdot 10^{-6}$	0,000219	$5,611 \cdot 10^{-5}$	$-5,25 \cdot 10^{-5}$
$w, \text{ град.}$	364,4495	360,7867	361,0312	360,3803	360,109	362,1924	372,5252	207,849	198,966
$r_k/r_0$	1,000000	0,999999	1,000007	1,000012	0,999994	0,996163	0,985490	1,639004	1,862786
$v_L/v_{кр.}$	1,000000	1,000001	0,999996	0,999996	1,000005	1,003892	1,062854	0,610127	0,536834
$v_R, \text{ м/с}$	0,00000	0,00312	-0,00587	-0,0176	-1,135	-17,693	-83,198	4,615	-76,08

Примечания:  $\delta T/T$  — отношения разницы между временем выполнения расчета и периодом обращения к периоду обращения;  $w$  — угол поворота тела относительно Земли;  $r_k/r_0$  — отношение конечного значения радиус-вектора тела относительно Земли к начальному значению;  $v_L/v_{кр.}$  — отношение конечного значения линейной скорости тела к начальному значению;  $v_R$  — радиальная скорость тела;  $r_0 = 3,844 \cdot 10^8$  м — гипотетический случай, когда вся масса Земли сосредоточена в теле меньшего диаметра.

Орбита тела при начальном радиусе  $3,844 \cdot 10^8$  м оказывается относительно устойчивой. За 100 периодов обращения средняя длина радиус-вектора устанавливается на значении близком к  $3,864 \cdot 10^8$ , а эксцентриситет орбиты меняется в пределах от 0,053 до 0,089 (см. рис. 5 и 6) (эксцентриситет лунной орбиты изменяется от 0,044 до 0,066 при среднем значении 0,055 [1; 97]). Но все же из рис. 6 видно, что эксцентриситет орбиты увеличивается от цикла к циклу, продолжительность которого составляет около 48 периодов обращения. Т. о., в долгосрочном плане орбита пробного тела, расположенная в плоскости эклиптики, неустойчива; а устойчивость орбиты Луны обеспечивается, вероятно, ее наклоном к плоскости эклиптики и вращением линии узлов.

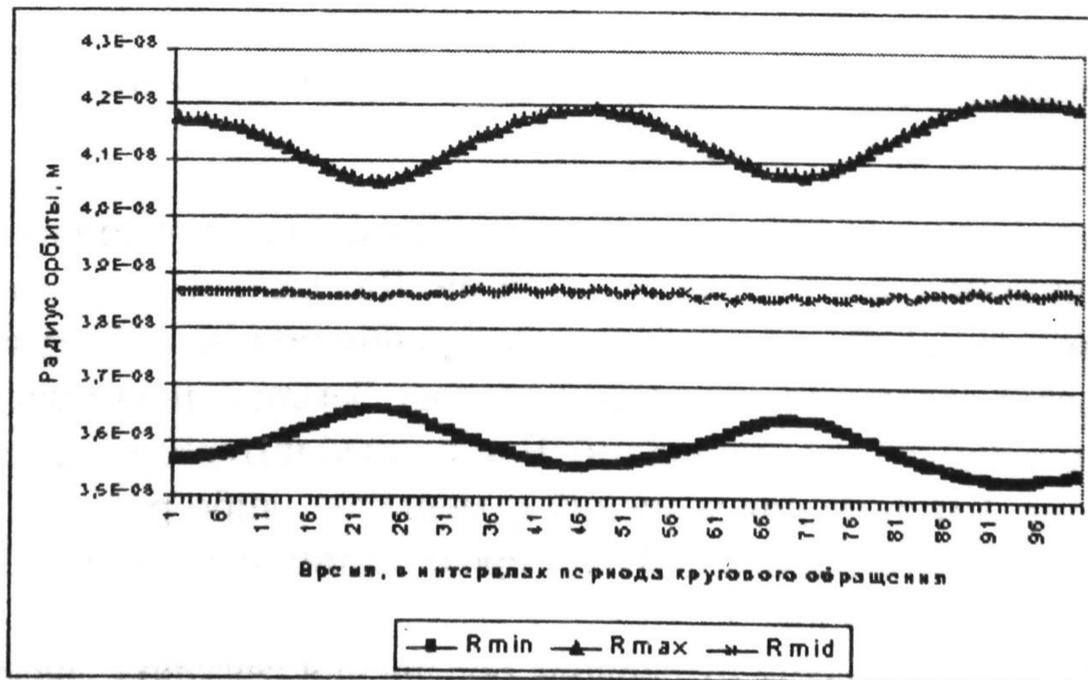


Рис. 5. Зависимость величины максимального, минимального и среднего (для текущего оборота) длины радиус-вектора тела от времени (в единицах периода обращения).



Рис. 6. Зависимость эксцентриситета орбиты тела от времени обращения (в единицах периода обращения)

Орбита тела сохраняет определенную устойчивость и при начальном радиусе, вдвое превосходящем радиус лунной орбиты. Но при начальном радиусе орбиты, превосходящем лунный в четыре раза, она полностью теряет устойчивость, хотя начальный радиус почти вдвое меньше критического значения, при котором градиент напряженности гравитационного поля становится равным нулю (рис. 4). При этом угол поворота за время, равное периоду обращения для круговой орбиты, составляет всего  $208^\circ$ , длина радиус-вектора увеличивается в 1,639 раза, а линейная скорость уменьшается в 1,610 раза. Наконец, если мы увеличим начальный радиус всего на 1%, до  $1,165 \cdot 10^9$  м, за период времени, равный периоду обращения по круговой орбите, тело приблизится к критической точке. Всего через час после этого оно перейдет с околоземной орбиты на орбиту околосолнечную (табл. 2).

Таблица 2

Орбитальные параметры тела на околоземной и околосолнечной орбите (начальный радиус околоземной орбиты  $1,165 \cdot 10^9$  м)

Наименование параметра	Околоземная орбита	Околосолнечная орбита
Момент времени, час.	3475	3476
Угол поворота тела, град.	199,0	143,3
Угол поворота Земли, град.	-	143,9
Расстояние до Земли, м	$2,1704 \cdot 10^9$	$2,1719 \cdot 10^9$
Расстояние до Солнца, м	$1,503710 \cdot 10^{11}$	$1,503697 \cdot 10^{11}$
Линейная скорость, м/с	314,1	29208
Радиальная скорость, м/с	-76,1	343
Ускорение силы тяжести, м/с <sup>2</sup>	$3,620 \cdot 10^{-5}$	$2,513 \cdot 10^{-3}$
Центробежное ускорение, м/с <sup>2</sup>	$4,547 \cdot 10^{-5}$	$5,673 \cdot 10^{-3}$
Радиальное ускорение, м/с <sup>2</sup>	$-9,227 \cdot 10^{-6}$	$-3,160 \cdot 10^{-3}$

Если мы попытаемся «запустить» тело вокруг Земли по круговой орбите при начальном значении радиуса, превосходящем критическое, то тело сразу перейдет на околосолнечную орбиту. В дальнейшем оно может быть на некоторое время «захвачено» Землей. Но спутником Земли стать не сможет.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Климишин И. А. *Астрономия наших дней*. М.: Наука, 1986. 560 с.
2. Холшевников К. В. Луна — спутник или планета? Интернет-сайт Astronet, 2003, 10 марта. URL: <http://www.astronet.ru/db/msg/1171221>

3. Куликов К. А., Сидоренков Н. С. Планета Земля. М.: Наука, 1972. С. 5-18.
4. Николай Островский об обращении Земли и Луны вокруг общего центра инерции. Интернет-журнал Membrana, 2002. 19 декабря. URL: <http://www.membrana.ru/articles/readers/2002/12/19/182600.html>
5. Вавилов С. И. Исаак Ньютон. М.: Наука, 1989. 271 с.
6. Антонов В. А., Тимошенкова Е. И., Холшевников К. В. Введение в теорию ньютоновского потенциала. М.: Наука, ГРФМЛ. 1988. 272 с.
7. Островский Н. В. Решение задачи трех тел на примере системы Солнце–Земля–Луна // Сб. мат. Всерос. науч.-практич. конф. «Наука–производство–технологии–экология». Киров: Вятский гос. ун-т, 2003. Т. 4. С. 74-75.
8. Островский Н. В. Модель орбитального движения небесных тел. //Естественные и технические науки. 2003. № 2. С. 22-25.
9. Физический энциклопедический словарь. М.: Советская энциклопедия, 1983. 928 с.

**Бронислав Петрович РУДАКОВ** —  
доцент кафедры высшей математики  
Тюменского государственного  
архитектурно-строительного  
университета, к. физ.-мат. н.

УДК 517.518.32, 517.518.43, 519.674, 519.675

### **О ПРИВЕДЕНИИ УРАВНЕНИЙ С ЧЕТЫРЬМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ К НЕКОТОРЫМ КАНОНИЧЕСКИМ ФОРМАМ, ДОПУСКАЮЩИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СОСТАВНЫМИ ШКАЛЬНЫМИ НОМОГРАММАМИ ПЕРВОГО ЖАНРА**

*АННОТАЦИЯ. Найдены условия приведения уравнений с четырьмя переменными к некоторым каноническим уравнениям, указаны эффективные методы отыскания их элементов, исследован вопрос о единственности, полноте и несовместности рассмотренных канонических уравнений.*

*The conditions for the reduction of the equations with the four variables to some canonical equations are found, the effective methods of search of their elements are specified, the question on uniqueness, completeness and incompatibility of the considered canonical equations is investigated.*

Рассматривается уравнение

$$t_4 = f(t_1, t_2, t_3) \quad (1)$$

в предположении достаточной гладкости функции  $f$ , причем частные производные ( $i=1-3$ ) отличны от нуля в некотором параллелепипеде  $G$ :

$$\alpha_i < t_i < \beta_i \quad (i=1-3).$$

Вопросу приведения уравнений с четырьмя переменными к некоторым каноническим формам посвящены работы многих авторов ([1-7] и др.).

В данной работе найдем условия и укажем методы приведения уравнений (1) к следующим каноническим формам: