3. Куликов К. А., Сидоренков Н. С. Планета Земля. М.: Наука, 1972. С. 5-18.
4. Николай Островский об обращении Земли и Луны вокруг общего центра инерции. Интернет-журнал Membrana, 2002. 19 декабря. URL: http://www. membrana. ru/articles/readers/2002/12/19/182600. html
5. Вавилов С. И. Исаак Ньютон. М.: Наука, 1989. 271 с.
6. Антонов В. А., Тимошенкова Е. И., Холшевников К. В. Введение в теорию ньютоновского потенциала. М.: Наука, ГРФМЛ. 1988. 272 с.
7. Островский Н. В. Решение задачи трех тел на примере системы Солнце–Земля– Луна // Сб. мат. Всерос. науч.-практич. конф. «Наука–производство–технологии–экология». Киров: Вятский гос. ун-т, 2003. Т. 4. С. 74-75.
8. Островский Н. В. Модель орбитального движения небесных тел. //Естественные и технические науки. 2003. № 2. С. 22-25.
9. Физический энциклопедический словарь. М.: Советская энциклопедия, 1983. 928 с.

Бронислав Петрович РУДАКОВ — доцент кафедры высшей математики Тюменского государственного архитектурно-строительного университета, к. физ.-мат. н.

УДК 517.518.32, 517.518.43, 519.674, 519.675

О ПРИВЕДЕНИИ УРАВНЕНИЙ С ЧЕТЫРЬМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ К НЕКОТОРЫМ КАНОНИЧЕСКИМ ФОРМАМ, ДОПУСКАЮЩИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СОСТАВНЫМИ ШКАЛЬНЫМИ НОМОГРАММАМИ ПЕРВОГО ЖАНРА

АННОТАЦИЯ. Найдены условия приведения уравнений с четырьмя переменными к некоторым каноническим уравнениям, указаны эффективные методы отыскания их элементов, исследован вопрос о единственности, полноте и несовместности рассмотренных канонических уравнений.

. The conditions for the reduction of the equations with the four variables to some canonical equations are found, the effective methods of search of their elements are specified, the question on uniqueness, completeness and incompatibility of the considered canonical equations is investigated.

Рассматривается уравнение

$$t_4 = f(t_1, t_2, t_3) \qquad (1)$$

в предположении достаточной гладкости функции f, причем частные производные $(i = 1 - 3)$ отличны от нуля в некотором параллелепипеде G:

$$\alpha_i < t_i < \beta_i \qquad (i = 1 - 3).$$

Вопросу приведения уравнений с четырьмя переменными к некоторым каноническим формам посвящены работы многих авторов ([1-7] и др.).

В данной работе найдем условия и укажем методы приведения уравнений (1) к следующим каноническим формам:

$$F_1 \cdot F_2 + \Phi_2 = F_3 + F_4, \qquad I_{(2)}$$

$$F_1 \cdot F_2 + \Phi_2 = F_3 \cdot F_4, \qquad II_{(2)}$$

$$(F_1 \cdot F_2 + \Phi_2) \cdot (F_3 + F_4) = 1, \qquad III_{(2)}$$

$$(F_1 \cdot F_2 + \Phi_2) \cdot (F_3 \cdot F_4 + 1) = 1, \qquad IV_{(2)}$$

(где $F_i \equiv F_i(t_i)$, $\Phi_2 \equiv \Phi_2(t_2)$), допускающих, в частности, представление составными шкальными номограммами из выравненных точек [8-10] с криволинейной шкалой переменной t_2 и остальными прямолинейными шкалами, причем шкалы переменных t_1, t_2 лежат в одной плоскости, в другой плоскости лежат шкалы переменных t_3, t_4. Относительно неизвестных функций F_i, Φ_2 $(i=1-4)$ полагаем, что они обладают производными необходимого порядка.

При решении поставленной задачи используем метод, предложенный для уравнений с тремя переменными П. В. Николаевым [11,12]. Найдем, например, условия и укажем метод приведения уравнения (1) к канонической форме $IV_{(2)}$.

Уравнение $IV_{(2)}$ можно записать в виде уравнения Массо

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & f_1 & 1 \\ f_{21} & 0 & f_{22} & 1 \\ f_3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & f_4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad (2)$$

где функции $f_i \equiv f_{ij}(t_i)$, $f_{2j} \equiv f_{2j}(t_2)$ $(i=1,3,4;\ j=1,2)$ таковы, что

$$F_1 = \frac{1}{f_1},\ F_2 = \frac{f_{22}}{f_{21}},\ F_3 = \frac{1}{1-f_3},\ \Phi_2 = \frac{f_{21}-1}{f_{21}},\ F_4 = \frac{1}{f_4} - 1. \qquad (3)$$

Укажем предварительное условие номографируемости.

Лемма. *Для приведения уравнения (1) к канонической форме $IV_{(2)}$ необходимо и достаточно, чтобы при заданных функциях*

$$M = -\frac{(t_4)'_2}{(t_4)'_1}, \quad \overline{M} = -\frac{(t_4)'_3}{(t_4)'_1} \qquad (4)$$

существовало в области G решение относительно функций f_i, f_{2j} системы дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} M &= \frac{f_1 \cdot \left[(f_1 - f_{22}) \cdot (f_{21})'_2 + f_{21} \cdot (f_{22})'_2\right]}{(f_1)'_1 \cdot f_{21} \cdot f_{22}}, \\ \overline{M} &= -\frac{(f_1 - f_{22})(f_1 f_{21} - f_1 + f_{22}) \cdot (f_3)'_3}{(f_1)'_1 \cdot f_{21} \cdot f_{22} \cdot (f_3 - 1)}. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Если уравнение (1) приводимо к форме $IV_{(2)}$, то из (2) имеем:

$$f_4 = \frac{f_1(1-f_{21})-f_{22}}{f_3(f_1-f_{22})-f_1 f_{21}} \tag{6}$$

Дифференцируя это уравнение по $t_j\ (j=1-3)$ и составляя функции (4), найдем, что уравнения (5) имеют место.

Обратно, дано, что система уравнений (5) допускает решение относительно функций $f_i, f_{2j}\ (i=1,3;\ j=1,2)$, т. е. имеет решение система дифференциальных уравнений

$$-\frac{(t_4)'_2}{(t_4)'_1} = M\ , \quad -\frac{(t_4)'_3}{(t_4)'_1} = \overline{M}\ , \tag{7}$$

где вместо $M, \overline{M}$ стоят их выражения (5). Преобразованием правых частей каждого из этих уравнений система (7) приводится к виду

$$(t_4)'_i - \frac{V'_i}{V'_1}(t_4)'_1 = 0 \qquad (i=2,3), \tag{8}$$

$$\text{где } V = \frac{f_1(1-f_{21})-f_{22}}{f_3(f_1-f_{22})-f_1 f_{21}}. \tag{9}$$

Составляя уравнение в полных дифференциалах, соответствующее якобиевой системе (8), и интегрируя его, найдем, что $V = const$. Следовательно, общим решением системы уравнений (7) будет $t_4 = \omega(V)$, где ω- произвольная функция; отсюда получаем (6) и, следовательно, каноническую форму $IV_{(2)}$.

Для дальнейшего введем следующие сокращенные обозначения:

$$A \equiv \left(\ln \frac{M}{\overline{\overline{M}}}\right)'_1,\ B \equiv (\ln MA)'_1,\ D \equiv +\sqrt{B(\ln M\overline{M}AB)'_1}\ ,\ P \equiv \frac{1}{2}\left[1 + \frac{(M\overline{M}AB)'_1 + (\overline{M}AB)'_2}{\overline{M}D \cdot (\ln M)''_{12}}\right] \tag{10}$$

Теорема 1. *Если уравнение (1) приводится к форме $IV_{(2)}$, то функции $M, \overline{M}$ (4) удовлетворяют в области G условиям:*

$$M'_3 = 0\ ,\ (\ln \overline{M})''_{13} = 0,\ (\ln M)''_{12} \neq 0, \tag{11}$$

$$(\ln M)''_{12} \neq 0, \tag{12}$$

$$P^2 - P \cdot \frac{D+A}{D} + \frac{A(D+B)}{2D^2} = 0, \tag{13}$$

$$[\ln(P-1)]'_1 = -DP, [\ln(P-1)]'_2 = MDP. \tag{14}$$

Выполнимость условий (11) следует из теоремы 2.2.1 [10].

Далее, записав систему (5) в виде системы уравнений в частных производных и использовав ее условия интегрируемости $(f_3)''_{3j} = 0\ (j = 1,2\ )$, получим следующую каноническую систему, в которой слева стоят производные всех функций, стоящих справа [13]:

$$\left.\begin{aligned}&(f_i)'_j=\delta_i^j\cdot y_i,\ (f_{2k})'_j=\delta_i^j\cdot y_{2k},\left(i=1,\ 3;\ \mathrm{k}=1,\ 2\ ;\mathrm{j}=1-3\right)\\&(y_1)'_1=\frac{y_1^2\left(2f_1f_{21}-2f_1+2f_{22}-f_{21}f_{22}\right)}{(f_1-f_{22})(f_1f_{21}-f_1+f_{22})}-y_1\left(\ln\overline{M}\right)'_1,\end{aligned}\right\}\quad(15)$$

где $$y_{21}=\frac{y_1f_{21}f_{22}\cdot\left(f_1^2f_{21}-f_1^2+f_{22}^2\right)}{f_1^2(f_1-f_{22})(f_1f_{21}-f_1+f_{22})}\cdot M+\frac{f_{21}f_{22}}{f_1}MA,\quad(16)$$

$$y_{22}=\frac{y_1(f_1-f_{22})f_{22}^2}{f_1^2(f_1f_{21}-f_1+f_{22})}M-\frac{f_{22}(f_1-f_{22})}{f_1}MA\ ,\quad(17)$$

$$y_3=-\frac{y_1f_{21}f_{22}(f_3-1)}{(f_1-f_{22})(f_1f_{21}-f_1+f_{22})}\overline{M}\ ;\quad(18)$$

δ_i^j - символ Кронекера.

Из условия интегрируемости $(y_1)''_{12}=0$ системы (15), найдем новое уравнение, устанавливающее условие на ее неизвестные функции:

$$\frac{2y_1^2f_{22}^2}{f_1^2(f_1-f_{22})(f_1f_{21}-f_1+f_{22})}-\frac{y_1f_{22}(f_1f_{21}+2f_{22}-2f_1)}{f_1(f_1-f_{22})(f_1f_{21}-f_1+f_{22})}A-AB=0\quad(19)$$

Дифференцируя это уравнение по t_1 и используя уравнения (15), (19) и условия (11), найдем новое уравнение, связывающее неизвестные функции системы (15):,

$$\frac{y_1f_{21}f_{22}}{(f_1-f_{22})(f_1f_{21}-f_1+f_{22})}=\pm D\ .\quad(20)$$

Дифференцируя уравнение (20) отдельно по t_j $(j=1,2)$ и используя уравнения (15), (20), нетрудно получить условия (12).

Выражая из уравнения (20) функцию и подставляя в уравнение (19), получим:

$$\left[\frac{f_1-f_{22}}{f_1f_{21}}\right]^2-\frac{f_1-f_{22}}{f_1f_{21}}\cdot\frac{A\pm D}{\pm D}+\frac{A(B\pm D)}{2D^2}=0,\quad(21)$$

где пишется знак «плюс» или «минус» в зависимости от того, берется знак «плюс» или «минус» в уравнении (20).

Дифференцируя уравнение (21) по t_2 и используя уравнения (15), (20), (21),

получим: $$\frac{f_1-f_{22}}{f_1f_{21}}=P\quad(22)$$

в случае, если в (20) берется знак «плюс», и

$$\frac{f_1-f_{22}}{f_1f_{21}}=1-P\quad(23)$$

в случае, если в (20) берется знак «минус».

Уравнения (21, 22), так же как и уравнения (21, 23), зависимые; условием их зависимости, что нетрудно получить, является условие (13).

Дифференцируя каждое из уравнений (22), (23) по t_j $(j = 1,2)$ и используя, соответственно, уравнения (15), (22); (15), (23), а также условия (11), найдем, что условия (14) действительно имеют место.

Теорема 2. *Условия (11-14) являются не только необходимыми, но и достаточными для приведения уравнения (2) к канонической форме* $IV_{(2)}$ *При этом существуют две системы элементов* F_i, Φ_2 $(i=1-3)$, *однозначно определяющиеся (с точностью до проективных преобразований пространства) с помощью лишь квадратур.*

В работах [8, 10] при рассмотрении вопроса о номографировании уравнений (1) было показано, что система дифференциальных уравнений (5) допускает трехпараметрическую группу преобразований

$$\bar{f}_1 = \frac{a_{33} f_1}{a_{43} f_1 + 1}, \ \bar{f}_{21} = \frac{f_{21}}{a_{43} f_{22} + 1}, \ \bar{f}_{22} = \frac{a_{33} f_{22}}{a_{43} f_{22} + 1}, \ \bar{f}_3 = \frac{f_3 + a_{22} - 1}{a_{22}}. \qquad (24)$$

Эта группа является подгруппой проективных преобразований пространства, автоморфных относительно плоскостей $y=0$, $z=0$

и прямых $\left.\begin{matrix} x=0, \\ y=0 \end{matrix}\right\}, \left.\begin{matrix} y=1, \\ z=0 \end{matrix}\right\}, \left.\begin{matrix} x=1, \\ z=0 \end{matrix}\right\}$ – носителей шкал переменных t_j $(j = 1,3,4)$ номограмм с уравнением (2).

Группа позволяет присоединить к системе (5) начальные условия; возьмем их в виде:

$$\text{при } t_i = t_{i1}: \quad f_1 = -1, \ f_{22} = 1, \ f_3 = 0 \ (i=1-3), \qquad (25)$$

где $t_i = t_{i1}$ — любая точка области G.

Нетрудно проверить, что эти начальные условия совместны и полны, т. е. они вполне определяют значения параметров в преобразовании (24).

С помощью уравнений (20) (со знаком «плюс») и (22), а также с помощью уравнений (20) (со знаком «минус») и (23) можно перейти от системы (5), соответственно, к системам:

$$f_{21} = \frac{f_1 - f_{22}}{f_1 \cdot P}, \qquad (22^*)$$

$$(f_i)'_j = \delta_i^j \cdot y_i, \ (f_{22})'_j = \delta_i^j \cdot y_{22}, (i=1, 3; \ j=1-3) \qquad (26)$$

где

$$y_1 = \frac{f_1 \cdot (f_1 - f_{22})}{f_{22}} \cdot D \cdot (1-P), \qquad (27)$$

$$y_{22} = \frac{f_{22}(f_1 - f_{22})}{f_1} M(DP - A), \qquad (28)$$

$$y_3 = -(f_3 - 1) \cdot \overline{M}D; \qquad (29)$$

и

$$f_{21} = \frac{f_1 - f_{22}}{f_1 \cdot (1-P)}, \qquad (23^*)$$

$$(f_i)'_j = \delta^j_i \cdot y_i,\ (f_{22})'_j = \delta^j_i \cdot y_{22},\ (i=1,\ 3;\ j=1-3) \tag{30}$$

где
$$y_1 = -\frac{f_1 \cdot (f_1 - f_{22})}{f_{22}} \cdot D \cdot P, \tag{31}$$

$$y_{22} = -\frac{f_{22}(f_1 - f_{22})}{f_1} M[A + D(1-P)], \tag{32}$$

$$y_3 = (f_3 - 1) \cdot \overline{M}D. \tag{33}$$

Таким образом, исходная система (5) распалась на две самостоятельные системы. Обе вместе они эквивалентны исходной системе в силу условия (14), что нетрудно было бы показать [10].

При условиях (11-14) тождественно выполняются все условия интегрируемости систем (26) и (30). Для уравнений (27-29), (31-33) это означает, что правые части зависят только от той одной переменной, от которой зависят их левые части. Помимо этого, в силу условий (12), (14) и уравнений (27) и (31) правые части уравнений (22*) и (23*) не зависят от t_1, t_3.

Из сказанного ясно, что системы уравнений Пфаффа, соответствующие системам (26) и (30), являются вполне интегрируемыми. При заданных начальных условиях они имеют решение, и оно единственное [14]. Таким образом, имеют решения системы уравнений (26) и (30), причем при известных функциях f_1 и f_{22} из уравнений (22*) и (23*) найдутся функции f_{21}. Следовательно, имеет решение система уравнений (5). Тем самым, в силу леммы, доказана достаточность условий.

Нетрудно видеть, что функции f_i, f_{2j} $(i=1,3,\ j=1,2)$ как из системы (22*), (26), так и из системы (23*), (30), при начальных условиях (25) находятся однозначно и с помощью лишь квадратур. Формулы помещены в прилагаемой таблице, причем решения системы (23*), (30) обозначены $f_i^{(2)}$, $f_{2j}^{(2)}$ в отличие от решений f_i, f_{2j} системы (22*), (26).

Зная функции f_i, f_{2j} $(i=1,3,\ j=1,2)$, по формулам (3) найдем функции F_k, Φ_2 $(k=1-3)$, причем получены две системы таких функций.

Теорема доказана.

Заметим, что функцию F_4 нередко удается определить непосредственно из уравнений (1) по известным функциям F_k, Φ_2 $(k=1-3)$ уравнения $IV_{(2)}$: $(F_1 \cdot F_2 + \Phi_2) \cdot (F_3 \cdot F_4 + 1) = 1$. В общем же случае функция задается таблично, при этом используются уравнения (1) и F_4 с известными функциями F_k, Φ_2 $(k=1-3)$.

Из формул (3) имеем:

$$f_1=\frac{1}{F_1},\ f_{21}=\frac{1}{1-\Phi_2},\ f_{22}=\frac{F_2}{1-\Phi_2},\ f_3=\frac{F_3-1}{F_3}. \qquad (34)$$

Подставляя эти выражения функций f_i, f_{2j} $(i=1,3,\ j=1,2)$ в формулы (24) и используя (3), найдем, что функции F_k, Φ_2 $(k=1-3)$ допускают преобразования

$$\overline{F}_1=\frac{a_{43}+F_1}{a_{33}},$$

$$\overline{F}_2=a_{33}F_2,\ \overline{\Phi}_2=\Phi_2-a_{43}F_2,\ \overline{F}_3=a_{22}F_3,. \qquad (35)$$

Покажем теперь, что две системы функций F_k, Φ_2 и $F_k^{(2)}$, $\Phi_2^{(2)}$ $(k=1-3)$, соответствующие системам функций f_i, f_{2j} и $f_i^{(2)}$, $f_{2j}^{(2)}$ $(i=1,3,\ j=1,2)$, различны, т. е. не могут быть получены одна из другой с помощью преобразований (35).

Действительно, при начальном условии (25) (при $t_3=t_{31}: f_3=0$) из уравнений (29), (33) получим, соответственно:

$$f_3=1-\ell^{-\int_{t_{31}}^{t_3}\overline{M}D\cdot dt_3},\ f_3^{(2)}=1-\ell^{\int_{t_{31}}^{t_3}\overline{M}D\cdot dt_3}.$$

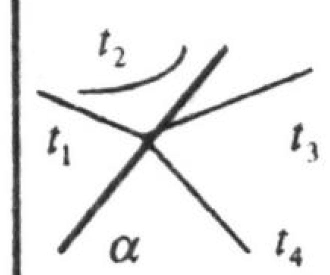
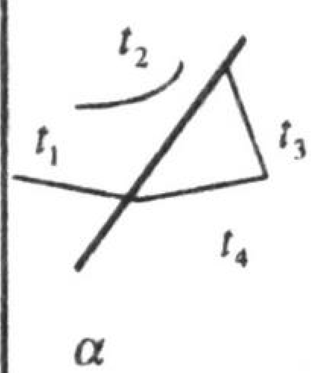
Отсюда имеем $f_3^{(2)}=\frac{f_3}{f_3-1}$. Но тогда из формул (3) и (34) получим $F_3^{(2)}=\frac{1}{F_3}$.

Из формулы (35) видно, что не существует такого значения параметра a_{22}, при котором бы получилась эта зависимость, что и доказывает предложение.

Аналогичными исследованиями можно получить условия и указать методы приведения уравнения (1) к каноническим формам $I_{(2)}-III_{(2)}$. В каждом из этих случаев (в отличие от формы $IV_{(2)}$) существует единственная система функций f_i, f_{2j} $(i=1,3,\ j=1,2)$. Результаты исследований приведены в таблице.

Из сравнения условий приводимости видно, что формы $I_{(2)}-IV_{(2)}$ несовместны, т. е. уравнение (1) может допускать только одну из этих форм.

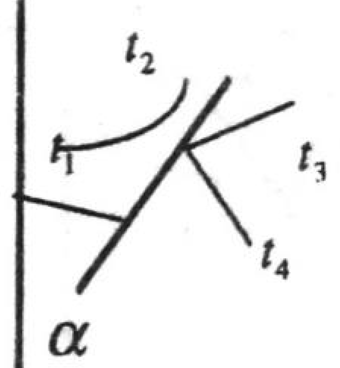
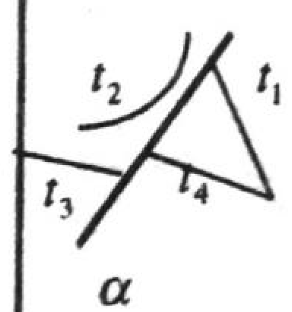
Таблица

№/ №	Каноническая форма	Допускаемый тип номограмм $T_{(2)}$	Необходимые и достаточные условия приведения к каноническим формам		Формулы, определяющие функции f_i, f_{2k}	Вид функций F_j, Φ_2	Допустимые преобразования функций F_j, Φ_2
$I_{(2)}$	$F_1 \cdot F_2 + \Phi_2 = F_3 + F_4$		$M_3' = 0$, $(\ln\overline{M})''_{13} = 0$, $(\ln M)''_{12} \neq 0$	$B = 0$	$f_1 = \int\limits_{t_{11}}^{t_1} \frac{M^{01}}{M} dt_1$, $f_{22} = \frac{2}{1 + \ell^{\int_{t_{21}}^{t_2} MA dt_2}}$, $f_3 = \frac{2(f_1)'_1 f_{22}}{f_{22} - 2} \int\limits_{t_{31}}^{t_3} \overline{M} dt_3$, $f_{21} = \ell^{\frac{1}{2}\int_{t_{21}}^{t_2} f_{22}(\ln\overline{M})'_2 dt_2} \cdot \left[1 + \frac{1}{2}\int\limits_{t_{21}}^{t_2} f_{22} M\left[(f_1)'_1 - f_1 A\right] \cdot \ell^{-\frac{1}{2}\int_{t_{21}}^{t_2} f_{22} MA dt_2} \cdot dt_2\right]$	$F_1 = f_1$, $F_2 = \frac{2f_{22}}{f_{22} - 2}$, $F_3 = f_3$, $\Phi_2 = \frac{4f_{21}}{2 - f_{22}}$	$\overline{F}_1 = \frac{a_{11}F_1 + 2a_{13} + a_{14}}{a_{33}}$, $\overline{F}_2 = a_{33}F_2$, $\overline{F}_3 = a_{11}F_3 + a_{12} + a_{14}$, $\overline{\Phi}_2 = a_{11}\Phi_2 -$ $-(2a_{13} + a_{14})F_2 + 2a_{14}$
$II_{(2)}$	$F_1 \cdot F_2 + \Phi_2 = F_3 \cdot F_4$			$(\ln\overline{M}B)'_j = 0$ $(j = 1,2)$	$f_1 = \frac{2}{1 + \ell^{-\int_{t_{11}}^{t_1} B^{02} dt_1}}$, $f_{22} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\ell^{\int_{t_{21}}^{t_2} (MA)^{01} dt_2}}$, $f_{21} = \ell^{\int_{t_{21}}^{t_2} M\left(\frac{f_{22}}{f_1}A - B\right) dt_2}$, $f_3 = \ell^{\int_{t_{31}}^{t_3} \overline{M}B \cdot dt_3}$	$F_1 = \frac{1}{f_1}$, $F_2 = \frac{f_{22}}{f_{21}}$, $F_3 = \frac{1}{f_3}$, $\Phi_2 = -\frac{1}{f_{21}}$	$\overline{F}_1 = \frac{a_{43} + F_1}{a_{33}}$, $\overline{F}_2 = \frac{a_{33}}{a_{11}}F_2$, $\overline{F}_3 = \frac{a_{22}}{a_{11}}F_3$, $\overline{\Phi}_2 = \frac{\Phi_2 - a_{43}F_2}{a_{11}}$

Здесь: $M = -\frac{(t_4)'_2}{(t_4)'_1}$, $\overline{M} = -\frac{(t_4)'_3}{(t_4)'_1}$, $A \equiv \left(\ln\frac{M}{\overline{M}}\right)'_1$, $B \equiv (\ln MA)'_1$ $D \equiv +\sqrt{B(\ln M\overline{M}AB)'_1}$, $F = \frac{(\overline{M}AB)'_2}{2\overline{M}(\ln M)''_{12}}$, $P \equiv \frac{1}{2}\left[1 + \frac{(M\overline{M}AB)'_1 + (\overline{M}AB)'_2}{\overline{M}D \cdot (\ln M)''_{12}}\right]$,

W^{0i} — частное значение функции $W(t_i, t_j, t_k)$ при $t_i = t_{i1}$

Таблица (продолжение)

<table>
<tr><th>№/№</th><th>Каноническая форма</th><th>Допускаемый тип номограмм $T_{(2)}$</th><th colspan="2">Необходимые и достаточные условия приведения к каноническим формам</th><th>Формулы, определяющие функции f_i, f_{2k}</th><th>Вид функций F_j, Φ_2</th><th>Допустимые преобразования функций F_j, Φ_2</th></tr>
<tr><td>$III_{(2)}$</td><td>$F_1 \cdot F_2 + \Phi_2 = \frac{1}{F_3 + F_4}$,</td><td></td><td rowspan="2">$M_3' = 0$,
$\left(\ln \overline{M}\right)_{13}'' = 0$,
$\left(\ln M\right)_{12}'' \neq 0$</td><td>$F^2 - AF + \frac{1}{2}AB = 0$
$\left(\ln \overline{M}F\right)_1' = -F$,
$\left(\ln \overline{M}F\right)_2' = MF$</td><td>$f_1 = \frac{1}{2\ell^{-\int_{t_{11}}^{t_1} F^{02} dt_1} - 1}$, $f_{22} = \frac{1}{1 - 2\ell^{-\int_{t_{21}}^{t_2} (M(F-A))^{01} dt_2}}$,
$f_{21} = \ell^{\int_{t_{21}}^{t_2} \left(\frac{f_{22}}{f_1} M(A-F) - MF\right) dt_2}$, $f_3 = \frac{2 f_1 f_{21}}{f_1 - f_{22}} \int_{t_{31}}^{t_3} \overline{M} F dt_3$,</td><td>$F_1 = \frac{1}{f_1}$,
$F_2 = -\frac{f_{22}}{f_{21}}$,
$F_3 = \frac{f_3}{2}$,
$\Phi_2 = \frac{1}{f_{21}}$</td><td>$\overline{F}_1 = \frac{a_{43} + F_1}{a_{33}}$
$\overline{F}_2 = \frac{a_{33}}{a_{11}} F_2$,
$\overline{F}_3 = a_{11} F_3 + \frac{1}{2} u_{12}$,
$\overline{\Phi}_2 = \frac{\Phi_2 - a_{43} F_2}{a_{11}}$</td></tr>
<tr><td>$IV_{(2)}$</td><td>$F_1 \cdot F_2 + \Phi_2 = \frac{1}{F_3 \cdot F_4 + 1}$</td><td></td><td>$\left(\ln \overline{M}D\right)_j' = 0$ $(j = 1,2)$
$P^2 - P\frac{D+A}{D} + \frac{A(D+B)}{2D^2} = 0$,
$\left[\ln(P-1)\right]_1' = -DP$,
$\left[\ln(P-1)\right]_2' = MDP$</td><td>$f_1 = \frac{1}{1 - 2\ell^{\int_{t_{11}}^{t_1} [(1-P)D]^{02} dt_1}}$, $f_{22} = \frac{1}{-1 + 2\ell^{-\int_{t_{21}}^{t_2} [M(DP-A)]^{01} dt_2}}$,
$f_{21} = \frac{f_1 - f_{22}}{f_1 P}$, $f_3 = 1 - \ell^{-\int_{t_{31}}^{t_3} \overline{M} D dt_3}$ …
―――
$f_1^{(2)} = \frac{1}{1 - 2\ell^{-\int_{t_{11}}^{t_1} [DP]^{02} dt_1}}$, $f_{22}^{(2)} = \frac{1}{-1 + 2\ell^{\int_{t_{21}}^{t_2} [M(D-DP+A)]^{01} dt_2}}$,
$f_{21}^{(2)} = \frac{f_1^{(2)} - f_{22}^{(2)}}{f_1^{(2)}(1-P)}$, $f_3^{(2)} = 1 - \ell^{\int_{t_{31}}^{t_3} \overline{M} D dt_3}$.</td><td>$F_1 = \frac{1}{f_1}$,
$F_2 = \frac{f_{22}}{f_{21}}$,
$F_3 = \frac{1}{1 - f_3}$,
$\Phi_2 = \frac{f_{21} - 1}{f_{21}}$</td><td>$\overline{F}_1 = \frac{a_{43} + F_1}{a_{33}}$,
$\overline{F}_2 = a_{33} F_2$,
$\overline{F}_3 = a_{22} F_3$,
$\overline{\Phi}_2 = \Phi_2 - a_{43} F_2$</td></tr>
</table>

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хованский Г. С. Методы номографирования. М.: Изд. ВЦ АН СССР, 1964/

2. Wojtowicz J. O czynniku anamorfozujacym, sprawadzajacym równanie f(x,y,z,w)=0 do postaci kanonicznych równania czwartego rzedu nomograficznego z czterema zmiennymi. // Zastosow. mat., 1963. 6, № 4, P. 363-375.

3. Матеева Л. Върху номографируемостта на уравнения с повече от три променливи. // Научни тр. Висш. лесотехн. ин-т, 12 , 1964. С. 323-327.

4. Ласку Бал. Канонические формы для уравнений с четырьмя и пятью переменными // Mathematica, I, № 2, С. 103-197. 1959.

5. Бухвалов А. М. Два варианта элементарного метода разъединения переменных по два в уравнениях с четырьмя переменными // Номографич. сб. № 4/ С. 171-178. М.: ВЦ АН СССР, 1964.

6. Петров Р. Върху номографируемостта на уравнения с четири, с пет и със седем променливи величини // Научни тр. Висш. лесотехн. ин-т., 12. 1964/ С. 307-316.

7. Mihoc Maria. Sur une classification des functions nomographiqes d`ahres les genres de nomogrammes associes // Mathematica/ 1995. 37, № 1-2. C. 155-163. (Fr.).

8. Рудаков (Дураков) Б. П. Составные номограммы первого жанра с четырьмя переменными. // Уч. зап. Свердл. гос. пед. ин-та. Вып. 31. 1965. С. 50-72.

9. Рудаков (Дураков) Б. П. О приведении уравнений с четырьмя переменными к каноническим формам пятого номографического порядка // Номографич. сб. № 6. М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1969. С. 190-199.

10. Рудаков. Б. П. Условия и методы спрямляемости некоторых пространственных тканей, номографирования уравнений и приведения их к каноническим формам. Тюмень: Изд-во «Вектор Бук», 2003. 246 с.

11. Николаев П. В. О представлении уравнений номограммами второго жанра. ДАН СССР, т. 157. 1964. № 6,

12. Николаев П. В. О представлении уравнений номограммами второго жанра // Тез. докл. I межвуз. номографич. конф. М., 1965. С. 38-39.

13. Эйзенхарт Л. П. Непрерывные группы преобразований. М., 1947

14. Рашевский П. К. Геометрическая теория уравнений с частными производными. М.: ВЦ АН СССР, 1964.

Бронислав Петрович РУДАКОВ — доцент кафедры высшей математики Тюменского государственного архитектурно-строительного университета, к. физ.-мат. н.

УДК 519.675, 514.763.7, 517.518.32, 517.518.43

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ УРАВНЕНИЙ С ЧЕТЫРЬМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ НЕКОТОРЫМИ ВИДАМИ СОСТАВНЫХ НОМОГРАММ ВТОРОГО И ЧЕТВЕРТОГО ЖАНРОВ

АННОТАЦИЯ. В статье рассматриваются составные шкальные номограммы второго и четвертого жанров для уравнений с четырьмя переменными, эквивалентные номограммам нулевого жанра. В терминах геометрии тканей изучены специальные классы шестиугольных тканей, указаны условия их спрямляемости, определены соответствующие им канонические формы, образующие полную и несовместную группу.