МАТЕМАТИКА ИНФОРМАТИКА

Евгений Георгиевич ПЫТКЕЕВ —
ведущий научный сотрудник
Института математики и механики УрО РАН,
профессор кафедры математического анализа и теории функций,
доктор физико-математических наук
pytkeev.e.g.@mail.ru

Алексей Григорьевич ХОХЛОВ —
доцент кафедры математического анализа,
кандидат физико-математических наук
Hohlov.A.G@mail.ru

Институт математики и компьютерных наук
Тюменский государственный университет

УДК 517.982.272

О ЛОКАЛЬНОЙ КОМПАКТНОСТИ ПРОСТРАНСТВ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ, НАДЕЛЕННЫХ МНОЖЕСТВЕННО-ОТКРЫТОЙ ТОПОЛОГИЕЙ*

ABOUT LOCAL COMPACTNESS OF SPACES OF THE CONTINUOUS FUNCTIONS ALLOCATED WITH SET-OPENED TOPOLOGY

АННОТАЦИЯ. Получен критерий локальной компактности пространства непрерывных функций, наделенного множественно-открытой топологией.

SUMMARY. The criterion of local space compactness of continious functions, provided with set-opened topology, is received.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА. Множественно-открытая топология, компактно-открытая топология, топология поточечной сходимости.

KEY WORDS. The set-opened topology, compactly open topology, topology pointwise convergence.

Пусть λ — некоторое семейство непустых подмножеств топологического пространства X и $C(X)$ — пространство непрерывных вещественнозначных функций, определенных на X. Через $C_\lambda(X)$ обозначается пространство $C(X)$, наделенное множественно-открытой топологией, предбазу которой образуют

* Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 09-01-00139а и Программы фундаментальных исследований Отделения математических наук РАН.

всевозможные множества вида $W(T,V)=\{f : f \in C(X)$ и $f(T) \subset V\}$, где $T \in \lambda$, V — открытое подмножество R.

Множественно-открытые топологии включают в себя наиболее распространенные топологии на $C(X)$ — топологию поточечной сходимости (при λ, состоящем из всех конечных подмножеств X) и компактно открытую топологию (λ — семейство всех компактных подмножеств X). Подробнее об этих топологиях см. в [1]. Пространства X в работе предполагаются тихоновскими. В работе рассматривается случай, когда пространство $C_\lambda(X)$ хаусдорфово. Как доказано в [2], это эквивалентно тому, что λ является π-сетью пространства X (то есть для всякого непустого открытого множества $U \subset X$ найдется $T \in \lambda$, $T \subset U$).

Напомним, что топологическое пространство Y называется локально компактным (локально счетно компактным) в точке $y \in Y$, если найдется окрестность $O(y)$ такая, что ее замыкание $\overline{O(y)}$ компактно (счетно компактно). Если пространство Y локально компактно (локально счетно компактно) во всякой точке $y \in Y$, то пространство Y называется локально компактным (локально счетно компактным). Для однородного пространства Y локальная компактность его эквивалентна локальной компактности Y в какой-нибудь (произвольной) точке $y \in Y$. В [2] приведены примеры, показывающие, что пространство $C_\lambda(X)$ может быть неоднородным.

С.Э. Нохрин в [2] доказал, что пространство $C_\lambda(X)$ локально компактно тогда и только тогда, когда пространство X конечно и λ состоит из всех его (конечных) подмножеств. На семинаре Н.В. Величко в ИММ УрО РАН был сформулирован естественный вопрос: будет ли пространство $C_\lambda(X)$ локально компактно, если оно локально компактно в какой-нибудь точке?

В работе получен положительный ответ на этот вопрос. Точнее, справедлив более общий результат.

Теорема. *Пусть λ — π-сеть топологического пространства X. Пространство $C_\lambda(X)$ локально счетно компактно в какой-нибудь точке тогда и только тогда, когда пространство X конечно, а λ состоит из всех подмножеств X.*

Доказательство. Пусть пространство $C_\lambda(X)$ локально счетно компактно в точке f и $O(f)$ — окрестность, замыкание которой счетно компактно. Так как замкнутое подмножество счетно компактного пространства — счетно компактно, то считаем, что $O(f)=\bigcap_{i=1}^{n} W(T_i,V_i)$ — базисная окрестность, где $T_i \in \lambda, V_i \subset R$ открытые множества, $i \in \overline{1,n}$. Предположим противное, то есть пространство X бесконечно. Покажем, что множество $C=\bigcup_{i=1}^{n} T_i$ плотно в X. Иначе (пространство X — тихоновское) найдется непустое открытое множество $U \subset X$ и непрерывная функция $g : X \to [0,1]$ такие, что $g(C)=0$, $g(U)=1$. Рассмотрим последовательность функций $f_k = f + kg, k \in N$, так как $f|C = f_k|C$ для всех $k \in N$ то $f_k \in O(f)$ для всех $k \in N$. По условию найдется φ — предельная функция последовательности $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$. Пусть $x_0 \in U$ — произвольна. В силу непрерывности функций f и φ найдется окрестность $O(x_0) \subset U$ такая, что $f(O(x_0)) \subset (f(x_0)-1, f(x_0)+1)$, $\varphi(O(x_0)) \subset (\varphi(x_0)-1, \varphi(x_0)+1)$. Так как $\lambda - \pi$ сеть X, то выберем $T \in \lambda, T \subset O(x_0)$. Выберем $k_0 \in N$ такое, что $k_0 + f(x_0) - 1 > \varphi(x_0) + 1$.

Тогда $W(T,(\varphi(x_0)-1, \varphi(x_0)+1))$ — окрестность φ, не содержащая ни одной функции f_k при $k > k_0$, противоречие.

Обозначим $A_i = f(T_i),\ i = \overline{1,n},\ A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Возможны следующие случаи:

1) A — конечное множество;
2) A содержит бесконечное множество изолированных точек — D;
3) A — бесконечное множество, содержащее конечное множество изолированных точек — D.

Покажем, что каждый из этих случаев приводит к противоречию.

Начнем со второго случая. Пусть $D \subset A$ бесконечное множество изолированных точек. Тогда найдется бесконечное множество $D_1 \subset D$, такое, что для всякого $A_i,\ i \in \overline{1,n}$, либо $A_i \supset D_1$, либо $A_i \bigcap D_1 = \varnothing$, где $\varnothing$ — пустое множество. Занумеруем $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$, содержащие D_1. Пусть $D_1 = \{t_k\}_{k=1}^{\infty}$. Выберем последовательность непересекающихся интервалов $(\alpha_j, \beta_j) \ni t_j$; таких, что $(\alpha_j, \beta_j) \bigcap A = \{t_j\}$ для всех $j \in N$. Так как множество $\bigcup_{i=1}^{n} T_i$ плотно в X, то $f(\bigcup_{i=1}^{n} T_i) = A$ плотно в $f(X)$. Тогда $(\alpha_j, \beta_j) \bigcap f(X) = \{t_j\}$ для всех $j \in N$. Таким образом, множества $f^{-1}(t_j)$ открыто-замкнуты в X для всех $j \in N$. Пусть $a \in (\alpha_1, \beta_1) \bigcap \bigcap_{j=1}^{k} V_{i_j},\ a \neq f(x_1)$. Тогда $a \notin f(X)$. Рассмотрим последовательность функций f_n

$$f_n(x) = \begin{cases} a : x \in f^{-1}(t_n), \\ f(x) : x \notin f^{-1}(t_n), \end{cases}$$

В силу того, что все множества $f^{-1}(t_j),\ j \in N$, открыто-замкнуты, функции f_n непрерывны для всех $n \in N$. Покажем, что $f_n \in O(f)$ для всех $n \in N$.

Действительно, если $x \in T_i, i \neq i_e, e \in \overline{1,k}$, то $x \notin \bigcup_{j=1}^{\infty} f^{-1}(t_j)$ и $f_n(x) = f(x)$ для всех $n \in N$. Тогда $f_n(x) = a \in V_{i_e}$. Таким образом $f_n \in O(f)$ для всех $n \in N$. Выберем ϕ — предельную функцию последовательности $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, тогда φ совпадает с f на любом из множеств $f^{-1}(t_j), j \in N$, следовательно, и на $\overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} f(t_j)}$. Кроме того, f_n совпадает с f

на множестве $X\setminus\overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} f(t_j)}$ для всех $n\in N$. Таким образом $\varphi = f$. Но $W(T_{i_1}, V_{i_1}\setminus\{a\})$ окрестность f, не содержащая ни одной функции f_n, $n\in N$. ***Противоречие***.

Для рассмотрения первого и третьего случая потребуется следующий факт.

1. Предположим, что найдутся непрерывная функция $\varphi\in O(f)$ и интервал $(\alpha,\beta)\subset R$ такие, что

a) для всякого $i_0\in\overline{1,n}$ или $(\alpha,\beta)\subset V_i$, или $(\alpha,\beta)\bigcap\overline{\varphi(T_i)}=\varnothing$

b) для некоторого $i_0\in\overline{1,n}$ множество $(\alpha,\beta)\bigcap\varphi(T_{i_0})$ бесконечно и $(\alpha,\beta)\not\subseteq\varphi(T_{i_0})$.

Тогда множество $O(f)$ не счетно компактно.

Доказательство. Пусть $y_0\in(\alpha,\beta)\setminus\varphi(T_{i_0})$. Выберем дизъюнктную последовательность отрезков $[\alpha_n,\beta_n]\subset(\alpha,\beta)\setminus\{y_0\}, n\in N$, такую, что $(\alpha_n,\beta_n)\bigcap\phi(T_{i_0})\neq\varnothing$ для всех $n\in N$

c) $(\alpha_n,\beta_n)\bigcap\varphi(T_{i_0})\neq\varnothing$ для всех $n\in N$

Пусть $z_n\in(\alpha_n,\beta_n)\bigcap\varphi(T_{i_0})$ для всех $n\in N$. Рассмотрим непрерывные функции $h_n: R\to R, n\in N$.

$$h_n(x)=\begin{cases} x,\ если\ x\le\alpha_n, \\ a_n x+b_n,\ если\ \alpha_n\le x\le z_n, \\ c_n x+d_n,\ если\ z_n\le x\le b_n, \\ x,\ если\ x\ge b_n \end{cases}$$

Коэффициенты a_n, b_n, c_n, d_n, $n\in N$ подобраны из условия непрерывности функции h_n, а также условия $h_n(z_n)=y_0$ для всех $n\in N$. Покажем, что непрерывная функция $h_n\varphi\in O(f)$, то есть $h_n(\varphi(T_i))\subset V_i$ для всех $n\in N$, $i\in\overline{1,n}$. Пусть $(\alpha,\beta)\subset V_i$. Если $x\in T_i, \varphi(x)\notin(\alpha,\beta)$, то $h_n(\varphi(x))=\varphi(x)\in V_i$ если $x\in T_i, \varphi(x)\in(\alpha,\beta)$, то $h_n(\varphi(x))\in(\alpha,\beta)\subset V_i$. Остается рассмотреть случай $(\alpha,\beta)\bigcap\overline{\varphi(T_{i_0})}\neq\varnothing$. Если $x\in T_i$, то $\varphi(x)\notin(\alpha,\beta)$, следовательно, $h_n(\varphi(x))=\varphi(x)\in V_i$. Таким образом $h_n\varphi\in O(f)$ для всех $n\in N$. Кроме того

d) $y_0\in h_n(\varphi(T_{i_0}))$ для всех $n\in N$.

Покажем, что последовательность всех $\{h_n\varphi\}_{n=1}^{\infty}$ не имеет предельной точки в $C_\lambda(X)$. Предположим противное: пусть ψ — предельная функция последовательности $\{h_n\phi\}_{n=1}^{\infty}$. Покажем, что $\psi=\varphi$. Действительно, если $\varphi(x)\in(\alpha_n,\beta_n)$, то $\varphi(x)\notin\bigcup_{m\neq n}(\alpha_m,\beta_m)$ и тогда $h_m(\varphi(x))=\varphi(x)$ для всех $m\in N, m\neq n$, следовательно, $\psi(x)=\varphi(x)$ для $\varphi(x)\in(\alpha_n,\beta_n)$, где $n\in N$ произвольно. Таким образом, $\psi(x)=\varphi(x)$ для всех x, таких, что

$\varphi(x)\in\bigcup_{n=1}^{\infty}(\alpha_n,\beta_n)$. Если $\varphi(x)\notin\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}(\alpha_n,\beta_n)}$, то $h_n(\varphi(x))=\varphi(x)$ для всех $n\in N$, тогда $\psi(x)=\varphi(x)$. Таким образом, $\psi=\varphi$. Но $W(T_{i_0},R\setminus\{y_0\})$ — окрестность φ, не содержащая $h_n\varphi$ для всех $n\in N$. Противоречие этим I доказано.

Рассмотрим теперь первый случай: множество $A=\bigcup_{i=1}^{n}f(T_i)$ — конечно. Так как $\bigcup_{i=1}^{n}T_i$ плотно в бесконечном пространстве X, то оно бесконечно. Таким образом, найдется точка $t\in A$, такая, что $f^{-1}(t)$ — бесконечное множество. Так как множество A конечно, то выберем интервал $(\alpha,\beta)\subset R$, такой, что $(\alpha,\beta)\subset V_i$, для всякого $V_i\ni t, i\in\overline{1,n}$, и $(\alpha,\beta)\cap A=\{t\}$. Выбираем интервал $(a,b)\ni t,(a,b)\subseteq(\alpha,\beta)$.

Зафиксируем T_{i_0}, такое, что $T_{i_0}\cap f^{-1}(t)$ — бесконечное множество. Так как пространство X — тихоновское, то найдется непрерывная функция $g:f^{-1}(t)\to(a,b)$ такая, что множество $g(T_{i_0}\cap f^{-1}(t))$ — бесконечно. Определим функцию $\varphi:X\to R$

$$\varphi(x)=\begin{cases}f(x):x\notin f^{-1}(t),\\ g(x):x\in f^{-1}(t),\end{cases}$$

Так как множество $f^{-1}(t)$ открыто-замкнуто, то φ — непрерывная функция. Нетрудно проверить, что $\varphi,(\alpha,\beta)$ и T_{i_0} удовлетворяют условиям a), b), из I. Таким образом, рассмотрен первый случай.

Итак, остается рассмотреть третий случай. Пусть $D\subset A$ конечное множество изолированных точек и A — бесконечно. Покажем, что найдется интервал $(\alpha,\beta)\subset R$, такой что для всякого $i\in\overline{1,n}$, либо $(\alpha,\beta)\subseteq V_i$, либо $(\alpha,\beta)\cap A_i=\varnothing$ и $(\alpha,\beta)\cap(A\setminus D)\neq\varnothing$. Пусть $x_1\in(A\setminus D)$ — произвольная точка и интервал $(\alpha_1,\beta_1)\ni x_1, j\in\overline{1,n}$. Обозначим $\gamma_1=\{V_j:x_1\in V_j\}$. Предположим, что найдется множество A_m, такое, что $V_m\notin\gamma_1$ и $A_m\cap(\alpha_1,\beta_1)\neq\varnothing$ (если такого множества не найдется, то интервал $(\alpha,\beta)=(\alpha_1,\beta_1)$ - искомый). Выберем $x_2\in A_m\cap(\alpha_1,\beta_1)$. Тогда $\gamma_2=\{V_i:x_2\in V_i\}\supset\gamma_1$. Пусть интервал $(\alpha_2,\beta_2)\subset(\alpha_1,\beta_1), x_2\in(\alpha_2,\beta_2)$ и $(\alpha_2,\beta_2)\subset V_j$ для всякого $V_j\in\gamma_2$. Рассуждая таким образом, получим убывающую последовательность интервалов (α_i,β_i) и строго возрастающую последовательность множеств γ_j. В силу конечности множества $\{V_i\}_{i=1}^{n}$ этот процесс остановится на m шаге, $m\leq n$. Тогда интервал $(\alpha,\beta)=(\alpha_m,\beta_m)$ — искомый. Так как $(\alpha,\beta)\cap(A\setminus D)\neq\varnothing$, и $A\setminus D$ не имеет изолированных точек, то множество $(\alpha,\beta)\cap(A\setminus D)$ — бесконечно и поэтому найдется $i_0\in\overline{1,n}$ такое, что $(\alpha,\beta)\cap f(T_j)$ — бесконечно и $(\alpha,\beta)\not\subset f(T_j)$, то f, (α,β) и T_j удовлетворяют условиям a), b) из I и, следовательно, приходим к противоречию. Таким образом, остается рассмотреть случай, когда $f(T_j) \supset (\alpha,\beta)$. Пусть $[a,b] \subset (\alpha,\beta)$ — произвольный отрезок. Выберем числовые последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ такие, что $\alpha < a_n < a_{n+1} < \beta$, для всякого $n \in N$, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Зафиксируем последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ таких, что $b_n + \varepsilon_n < \beta$ для всех $n \in N$, $b + \varepsilon < \beta$, где $\varepsilon = \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n$. Положим, $F = f^{-1}([a,b])$ — непустое нуль-множество. Выберем последовательность конуль-множеств $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ таких, что $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ и $\overline{G_{n+1}} \subset G_n \subset f^{-1}(a_n,b_n)$ для всех $n \in N$. Зафиксируем непрерывные функции $\varphi_n, n \in N$ такие, что:

e) $\varphi_n | (X \setminus G_n) \equiv 0$, для всех $n \in N$

f) $\varphi_n | \overline{G_{n+1}} \equiv \varepsilon_n$, для всех $n \in N$

g) $\varphi_n : X \to [0,\varepsilon_n]$, для всех $n \in N$

Рассмотрим последовательность непрерывных функций $\{f + \varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$. Покажем, что $f + \varphi_n \in O(f)$ для всех $n \in N$. Пусть $x \in T_j, i \in \overline{1,n}$. Тогда $f(x) \in V_i$. Возможны два случая: 1) $(\alpha,\beta) \cap A_i = \varnothing$, $(\alpha,\beta) \subset V_i$. В первом случае $x \notin f^{-1}(\alpha,\beta)$, следовательно $x \notin G_n$ и в силу e) $\varphi_n(x) = 0$ и $f(x) + \varphi_n(x) = f(x) \in V_i$. Пусть $(\alpha,\beta) \subset V_i$. Достаточно рассмотреть случай, когда $x \in G_n \subset f^{-1}(a_n,b_n)$. Тогда $f(x) \in (a_n,b_n)$. Так как в силу g) $\varphi_n \le \varepsilon_n$ и $b_n + \varepsilon_n < \beta$, то $f(x) + \varphi_n(x) < b_n + \varepsilon_n < \beta$, то есть $f(x) + \varphi_n(x) \in (\alpha,\beta) \subset V_i$. Таким образом, $f + \varphi_n \in O(f)$ для всех $n \in N$. Пусть h — предельная функция для последовательности $\{f + \varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда справедливо

k) $h = f$ на $X \setminus F$ в силу e)

l) $h = f + \varepsilon$ на множестве $int\, F$.

Пусть точка $z \in Fr(F)$. Тогда $z \in \overline{X \setminus F}$, следовательно, в силу k) $h(z) = f(z)$. С другой стороны, так как F — замкнуто, то $z \in F$, и в силу *l*) $z \notin \overline{(IntF)}$ так как $Fr(F) \subset \overline{X \setminus F}$, то $X = \overline{(IntF)} \cup \overline{(X \setminus F)}$, где слагаемые дизъюнктны и непусты, следовательно, открыто-замкнуты. Кроме того, $f^{-1}(a,b) \subset \overline{(IntF)} \subset f^{-1}[a,b] = F$. Рассмотрим функцию $g \in C(X)$

$$g(x) = \begin{cases} g(x) = f(x) : x \notin \overline{IntF} \\ \dfrac{b+\beta}{2} : x \in \overline{IntF} \end{cases}$$

Проверим, что $g \in O(f)$. Пусть $x \in T_j, i \in \overline{1,n}$. Если $x \notin \overline{IntF}$, то $g(x) = f(x) \in V_i$. Пусть $x \in \overline{IntF}$. Так как $\overline{IntF} \subset F$, то $f(x) \in [a,b] \subset (\alpha,\beta)$. Таким образом, $A_i = f(T_i)$ пересекается с интервалом (α,β) и потому $(\alpha,\beta) \subset V_i$. Но $g(x) = \dfrac{b+\beta}{2} < \beta, g(x) > a$, то есть $g(x) \in V_i$. Следовательно, $g \in O(f)$.

Покажем, что $g,(\alpha,\beta),T_i$ удовлетворяют условиям a), b) из I). Пусть $(\alpha,\beta)\cap f(T_i)=\varnothing$. Так как $F\subset f^{-1}((\alpha,\beta))$, то $f\cap T_i=\varnothing$ и $g|T_i=f|T_i$, следовательно, $(\alpha,\beta)\cap g(T_i)=\varnothing$. Если $x\in(a,b)$, то $f^{-1}(x)\subset IntF\subset\overline{IntF}$, и $g\big|f^{-1}(x)\equiv\dfrac{b+\beta}{2}\notin(a,b)$. Из этого и определения g следует, что $g(X)\bigcap(a,b)=\varnothing$. Известно, что $f(T_j)\supset(\alpha,\beta)$ и так как $f\big|f^{-1}((\alpha,a))=g\big|f^{-1}((\alpha,a))$, то $g(T_i)\supset(\alpha,a)\subset V_j$. Итак, $g(T_i)\bigcap V_j$ — бесконечное множество, не совпадающее с V_j. В силу I) $\overline{O(f)}$ не компактно. Противоречие. Теорема доказана.

Следствие. Пусть λ — π-сеть топологического пространства X. Пространство $C_\lambda(X)$ локально счетно компактно тогда и только тогда, когда X конечно, а λ состоит из всех подмножеств X.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. McCoy, R.A., Ntantu, I. Topological Properties of Spaces of Continuous Functions. Berlin: Springer-Verlag. Lect. Notes in. Math. Ser. 1315, 1988. 124 pp.
2. Нохрин С.Э. Пространство непрерывных функций в множественно-открытых топологиях: дис. … канд. физ.-мат. наук. Екатеринбург, 1997. 90 с.
3. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986. 754 с.

Владислав Владимирович МАЧУЛИС —
доцент кафедры математического моделирования
mareliks@gmail.com
Татьяна Евгеньевна НАДЕЖКИНА —
аспирант кафедры математического моделирования
pinacolada87@rambler.ru

Институт математики и компьютерных наук
Тюменский государственный университет

УДК 517.91

КАЧЕСТВЕННОЕ ПОВЕДЕНИЕ ОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ ПАРАМЕТРАМИ
QUALITATIVE BEHAVIOUR OF ONE DYNAMICAL SYSTEM WITH TWO PARAMETRES

АННОТАЦИЯ. Методами качественной теории исследуется поведение одной динамической системы с двумя параметрами. Проведен предварительный анализ бифуркаций, получены бифуркационные кривые на плоскости параметров системы.

SUMMARY. The article shows how methods of the qualitative theory investigate the behaviour of one dynamical system with two parameters. The preliminary analysis of bifurcations is carried out; bifurcation curves on a plane of system parameters are received.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА. Предельный цикл, бифуркация Андронова–Хопфа, бифуркационная кривая.

KEY WORDS. A limit cycle, bifurcation of Andronov-Hopf, a bifurcation curve.