

Покажем, что $g, (\alpha, \beta), T_i$ удовлетворяют условиям а), б) из I). Пусть $(\alpha, \beta) \cap f(T_i) = \emptyset$. Так как $F \subset f^{-1}((\alpha, \beta))$, то $f \cap T_i = \emptyset$ и $g|_{T_i} = f|_{T_i}$, следовательно, $(\alpha, \beta) \cap g(T_i) = \emptyset$. Если $x \in (a, b)$, то $f^{-1}(x) \subset \text{Int}F \subset \overline{\text{Int}F}$, и $g|_{f^{-1}(x)} \equiv \frac{b+\beta}{2} \notin (a, b)$. Из этого и определения g следует, что $g(X) \cap (a, b) = \emptyset$. Известно, что $f(T_j) \supset (\alpha, \beta)$ и так как $f|_{f^{-1}((\alpha, a))} = g|_{f^{-1}((\alpha, a))}$, то $g(T_i) \supset (\alpha, a) \subset V_j$. Итак, $g(T_i) \cap V_j$ — бесконечное множество, не совпадающее с V_j . В силу I) $\overline{O(f)}$ не компактно. Противоречие. Теорема доказана.

Следствие. Пусть λ — π -сеть топологического пространства X . Пространство $C_\lambda(X)$ локально счетно компактно тогда и только тогда, когда X конечно, а λ состоит из всех подмножеств X .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. McCoy, R.A., Ntantu, I. Topological Properties of Spaces of Continuous Functions. Berlin: Springer-Verlag. Lect. Notes in. Math. Ser. 1315, 1988. 124 pp.
2. Нохрин С.Э. Пространство непрерывных функций в множественно-открытых топологиях: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Екатеринбург, 1997. 90 с.
3. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986. 754 с.

Владислав Владимирович МАЧУЛИС —
доцент кафедры математического моделирования
marelirks@gmail.com

Татьяна Евгеньевна НАДЕЖКИНА —
аспирант кафедры математического моделирования
pinacolada87@rambler.ru

*Институт математики и компьютерных наук
Тюменский государственный университет*

УДК 517.91

КАЧЕСТВЕННОЕ ПОВЕДЕНИЕ ОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ ПАРАМЕТРАМИ

QUALITATIVE BEHAVIOUR OF ONE DYNAMICAL SYSTEM WITH TWO PARAMETRES

АННОТАЦИЯ. Методами качественной теории исследуется поведение одной динамической системы с двумя параметрами. Проведен предварительный анализ бифуркаций, получены бифуркационные кривые на плоскости параметров системы.

SUMMARY. The article shows how methods of the qualitative theory investigate the behaviour of one dynamical system with two parameters. The preliminary analysis of bifurcations is carried out; bifurcation curves on a plane of system parameters are received.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА. Предельный цикл, бифуркация Андронова–Хопфа, бифуркационная кривая.

KEY WORDS. A limit cycle, bifurcation of Andronov-Hopf, a bifurcation curve.

В работе представлено исследование автономной динамической системы

$$\begin{cases} x' = -y + x \left(1 - \frac{f(x, y)}{a} \right) \\ y' = x + y \left(1 - \frac{f(x, y)}{a} \right) - \frac{\mu}{\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}}, \end{cases} \quad (1)$$

где $f(x, y) = 1 + \frac{1}{1 + (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2}$ — непрерывная функция, $x = x(t)$ и $y = y(t)$ — неизвестные функции, μ и a — действительные параметры, причем $a > 0$, а $\mu \in [0; 1)$.

Если $\mu = 0$, то система принимает вид

$$\begin{cases} x' = -y + x \left(1 - \frac{f(x, y)}{a} \right) \\ y' = x + y \left(1 - \frac{f(x, y)}{a} \right) \end{cases}. \quad (2)$$

Система (2) упоминалась в книге [1]. Анализ ее поведения представляется несложным.

Целью работы является исследование поведения системы (1) в зависимости от допустимых значений параметров. При этом ставились следующие задачи:

- выяснить, происходят ли в системе бифуркации, и если происходят, то какие именно;
- при наличии бифуркаций — найти бифуркационные кривые на плоскости параметров.

Систему (1) можно трактовать как систему (2) с воздействием, определяемым слагаемым $-\frac{\mu}{\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}}$. Это слагаемое изменяется по абсолютной ве-

личине от 0 до μ , причем воздействие достигает наибольшего значения (равного по модулю μ) при $y = 0$, и наименьшего, равного 0, при $x = 0$.

Легко видеть, что система (2) имеет единственное состояние равновесия $(0; 0)$. Линеаризуем систему в окрестности $(0; 0)$. Характеристический многочлен в начале координат имеет вид

$$\lambda^2 + 2 \left(\frac{f(0; 0)}{a} - 1 \right) \lambda + \left(1 - \frac{f(0; 0)}{a} \right)^2 + 1 \quad (3)$$

и характеристические значения $\lambda_1 = 1 - \frac{f(0; 0)}{a} - i$, $\lambda_2 = 1 - \frac{f(0; 0)}{a} + i$. Решение устойчиво, если $f(0; 0) > a$, и неустойчиво, если $f(0; 0) < a$. Ясно, что при $f(0; 0) = a$ корни становятся чисто мнимыми, значит, судить о поведении системы по линеаризации в окрестности начала координат нельзя. Для точного определения типа состояния равновесия необходимы дополнитель-

ные исследования. Однако очевидно, что при переходе характеристических корней через мнимую ось качественное поведение системы меняется. Необходимо выяснить характер этого изменения.

Используя указанный выше вид функции $f(x, y)$, приведем систему (2) к виду

$$\begin{cases} x' = -y + x \left(1 - \frac{1}{a} \left(1 + \frac{1}{1 + (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2} \right) \right) \\ y' = x + y \left(1 - \frac{1}{a} \left(1 + \frac{1}{1 + (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2} \right) \right) \end{cases} \quad (4)$$

Затем, переходя к полярным координатам, получаем

$$\begin{cases} r' = \left(1 - \frac{1}{a} \left(1 + \frac{1}{1 + (r - 1)^2} \right) \right) r \\ \theta' = 1 \end{cases} \quad (5)$$

Система (5) распадается, поэтому анализ ее поведения не вызывает трудностей. Кратко рассмотрим, что происходит с системой при возрастании значения параметра a .

1. $0 < a < 1$. Характеристические корни в этом случае имеют вид $\lambda_{1,2} = 1 - \frac{3}{2a} \pm i$, причем действительная их часть отрицательна, то есть $O(0; 0)$ является устойчивым фокусом. Система не имеет особых траекторий, помимо тривиального решения.

2. $a = 1$. По-прежнему неподвижная точка $O(0; 0)$ — устойчивый фокус. Но, тем не менее, это значение является бифуркационным, т.к. при переходе через него происходит рождение предельного цикла из бесконечности. Дей-

ствительно, разрешая уравнение $\left(1 - \frac{1}{a} \left(1 + \frac{1}{1 + (r - 1)^2} \right) \right) = 0$ относительно r ,

мы получаем

$$r_1 = \frac{a - 1 + \sqrt{-2 + 3a - a^2}}{a - 1} \quad \text{и} \quad r_2 = \frac{a - 1 - \sqrt{-2 + 3a - a^2}}{a - 1}.$$

Оба корня действительны при $a \in [1; 2]$, причем первый неотрицателен на этом отрезке и монотонно убывает от $+\infty$ до 1. Второй корень неотрицателен при $a \in \left[\frac{3}{2}; 2 \right]$ и монотонно возрастает от 0 до 1. Таким образом, при $a = 1$ в системе (4) возникает замкнутая изолированная траектория (окружность) радиуса r_1 . Этот предельный цикл неустойчив, т.к. $r' < 0$ при $0 < r < r_1$ и $r' > 0$ при $r > r_1$. Также можно доказать, что цикл является простым.

3. $1 < a < \frac{3}{2}$. Фокус в начале координат по прежнему устойчив. На этом

промежутке изменения параметра происходит уменьшение радиуса неустойчивого предельного цикла (до значения 2), появившегося из бесконечности.

4. $a = \frac{3}{2}$. Характеристические корни чисто мнимые. Фокус становится

сложным, а система — негрубой. Докажем, что здесь происходит бифуркация Андронова-Хопфа.

Теорема 1. Пусть для системы класса C^∞

$$\begin{cases} x' = f(x, y, a) \\ y' = g(x, y, a) \end{cases} \quad (6)$$

определенной в некоторой окрестности начала координат, которое к тому же является неподвижной точкой, выполнены следующие условия:

1. Линеаризация системы (6) в начале координат и при $a = a_0$ имеет собственные значения $\alpha(a) \pm i\beta(a)$, причем $\alpha(a_0) = 0$, $\beta(a_0) = \beta_0 \neq 0$.

2. $\alpha'(a_0) \neq 0$ (условие трансверсальности).

3. $Re(C_1) \neq 0$, где C_1 — комплекснозначный коэффициент нормальной формы $\omega' = i\beta_0\omega + C_1\omega^2\bar{\omega} + C_2\omega^3\bar{\omega}^2 + \dots + O(|\omega|^{2k+3})$ при $a = a_0$ системы (6).

Тогда найдутся такое $\sigma > 0$ и такая окрестность $U(0;0)$, что:

1) если $|a - a_0| < \sigma$ и $Re(C_1)\alpha'(a_0)(a - a_0) < 0$, то система (5) имеет в точности один предельный цикл внутри U ;

2) если $|a - a_0| < \sigma$ и $Re(C_1)\alpha'(a_0)(a - a_0) \geq 0$, то система (6) не имеет периодических орбит внутри U .

Кроме того, возникающий в случае (1) предельный цикл устойчив (неустойчив) при $Re(C_1) < 0$ ($Re(C_1) > 0$), и стягивается к неподвижной точке $(0;0)$ при $|a - a_0| \rightarrow 0$.

Доказательство этой теоремы приведено в [3].

В нашем случае условия (1) и (2) выполнены. Требуется проверить выполнение условия (3).

Нетрудно показать, что нормальная форма системы (4) имеет вид

$$z' = iz - \frac{1}{6}z|z|^2$$

Так как $Re\left(-\frac{1}{6}\right) \neq 0$, то можем использовать приведенную теорему, что-

бы выяснить, происходит бифуркация Хопфа или нет. В силу того, что $\alpha'\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{3} \neq 0$, а $Re\left(-\frac{1}{6}\right) < 0$, реализуется случай (1) теоремы:

$Re\left(-\frac{1}{6}\right)\alpha'\left(\frac{3}{2}\right)(a - a_0) < 0$ при $a > a_0$. Значит, при переходе через $a = a_0 = \frac{3}{2}$

происходит бифуркация Андронова-Хопфа (осуществляется мягкий ее ре-

жим). Причем рождающийся при этом предельный цикл устойчив, т.к. $Re\left(-\frac{1}{6}\right) < 0$, и стягивается к $O(0;0)$ при $a \rightarrow \frac{3}{2} + 0$.

5. $\frac{3}{2} < a < 2$. Действительная часть характеристических корней положительна, поэтому фокус в $O(0;0)$ вновь становится простым и меняет устойчивость на неустойчивость. В данном диапазоне изменения параметра система (5) имеет два периодических решения, определяющихся двумя простыми предельными циклами: неустойчивым внешним и устойчивым внутренним. С увеличением a внешний цикл уменьшает радиус, а внутренний увеличивает, причем $r_1, r_2 \rightarrow 1$ при $a \rightarrow 2$.

6. $a = 2$. Фокус в $O(0;0)$ — простой неустойчивый. Два предельных цикла сливаются в один. Непосредственно по уравнению видно, что он будет сложным и полуустойчивым. Существование сложного предельного цикла означает, что система при данном значении a негрубая. Таким образом, $a = 2$ — еще одно бифуркационное значение.

7. $a > 2$. Система имеет единственное состояние равновесия — простой неустойчивый фокус в начале координат. Предельных циклов нет.

Все приведенные рассуждения подтверждаются численными расчетами.

Таким образом, рассматриваемая система (2) испытывает три бифуркации, и, следовательно, имеет три бифуркационных значения управляющего параметра a .

Перейдем к рассмотрению системы (1) при $\mu \in (0;1)$. Теперь (2) подвергается внешним возмущениям, силу которых определяет параметр μ . Система по-прежнему имеет одну неподвижную точку. Но с введением ненулевого параметра μ задача сразу усложняется. Во-первых, каждой паре значений (μ, a) соответствуют свои координаты неподвижной точки, то есть при изменении хотя бы одного из параметров неподвижная точка начинает перемещаться по фазовой плоскости. Перемещения происходят вблизи начала координат. Во-вторых, найти зависимость координат особой точки от параметров аналитически не представляется возможным. Также чрезвычайно громоздки являются выражения для характеристических корней. В-третьих, при переходе к полярным координатам в системе (1) получаем

$$\begin{cases} r' = -r \left(\frac{f(r \cos \theta, r \sin \theta)}{a} - 1 \right) - \mu \sin \theta \cos^2 \theta \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta}} \\ \theta' = 1 - \frac{\mu}{r} \cos^3 \theta \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta}} \end{cases} \quad (7)$$

Эта система не распадающаяся, значит, получить простое выражение для вычисления радиуса особых траекторий, как в случае с невозмущенной системой, не удастся.

Поэтому для доказательства рождения предельного цикла из бесконечности применим следующие рассуждения. Рассмотрим на фазовой плоскости окружность достаточно большого радиуса

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (8)$$

Условие касания траектории $x = x(t)$, $y = y(t)$ системы (1) с этой окружностью имеет вид

$$\frac{1}{2} \frac{dr^2}{dt} = x'x + y'y = 0 \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2}). \quad (9)$$

Подставляя в (9) выражения для производных из (1), получим

$$r \left(\left(1 - \frac{1}{a} \left(1 + \frac{1}{1 + (r-1)^2} \right) \right) r - \mu \sin \theta \sqrt{\cos^2 \theta} \right) = 0. \quad (10)$$

Так как мы предполагаем, что радиус R достаточно велик, нетрудно показать, что при $0 < a < 1$ левая часть (10) отрицательна, а при $a > 1$ — положительна. Это означает, что в первом случае все траектории, пересекающие окружности (8), с возрастанием t входят внутрь их, то есть бесконечность неустойчива. Когда значение a становится больше единицы, бесконечность становится устойчивой. Неподвижная точка при $0 < a < 1,5$ и при любом μ является простым устойчивым фокусом. А это означает, что $a_1(\mu) = 1$ является бифуркационной кривой, при переходе через которую из бесконечности рождается неустойчивый предельный цикл большого радиуса. Это первая бифуркационная кривая.

Для отыскания второй бифуркационной кривой используем численные расчеты. Для каждого фиксированного $\mu_k \in (0; 1)$, $k = 0..20$, с шагом $h_k = \mu_{k+1} - \mu_k = 0,05$, будем анализировать поведение системы при изменении a , опираясь на уже установленные факты. На каждом шаге определялись координаты особой точки $M(x_k, y_k)$, а также характеристические корни. Как и в предыдущем исследовании, они имеют вид

$$\alpha(\mu, a) \pm i\beta(\mu, a),$$

что соответствует особой точке типа фокус. В силу очевидной непрерывности при каждом заданном μ существует такое значение a , при переходе через которое характеристические корни меняют знак действительной части с минуса на плюс, то есть происходит бифуркация. Бифуркационные значения соответствуют паре чисто мнимых характеристических корней $\pm i\beta(\mu, a)$, причем β очень близко к единице. Логично предполагать, что, как и в случае невозмущенной системы, при таких a происходит бифуркация Андронова-Хопфа.

Для доказательства наличия бифуркации Андронова-Хопфа используем теорему, эквивалентную теореме 1.

Теорема 2. Пусть для системы класса C^∞ выполнены условия 1 и 2 Теоремы 1. Пусть также линеаризация системы в изолированной неподвижной точке:

1) не имеет других характеристических корней, целочисленно кратных $\pm i\beta(a)$;

2) $\alpha(a) \pm i\beta(a)$ являются продолжением $\pm i\beta(a)$ по параметру.

Тогда существуют непрерывные функции $a = a(\varepsilon)$ и $T = T(\varepsilon)$, зависящие от параметра ε , $a(0) = a^*$ (бифуркационное значение a), $T(0) = 2\pi\beta^{-1}$

и такие, что система имеет периодические решения периода $T(\varepsilon)$, которые влипают в неподвижную точку при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Нетрудно показать, что для рассматриваемой системы (1) при каждом μ_k все условия приведенной теоремы выполняются. Это означает, что система претерпевает бифуркацию Андронова — Хопфа. Далее, методом интерполяции получена зависимость $a = a_2(\mu)$ в виде многочлена

$$\begin{aligned} a_2(\mu) = & -16022.42905\mu^{20} + 145261.6032\mu^{19} - 610448.0085\mu^{18} + 1578188.894\mu^{17} - \\ & -2809181.572\mu^{16} + 3650737.789\mu^{15} - 3583919.917\mu^{14} + 2712388.753\mu^{13} - \\ & -1600788.127\mu^{12} + 740285.9039\mu^{11} - 268030.4173\mu^{10} + 75489.78413\mu^9 - \\ & -16327.35474\mu^8 + 2654.587419\mu^7 - 313.5305647\mu^6 + 24.99606694\mu^5 - \\ & -1.559311184\mu^4 + 0.01807939172\mu^3 + 0.4170242686\mu^2 + 0.6666473804\mu + 1.5 \end{aligned}$$

График этой зависимости при $\mu \in (0;1)$ представляет вторую бифуркационную кривую.

В теореме не говорится о единственности предельного цикла, рождающегося из фокуса. И действительно, анализ построенных фазовых портретов показывает, что внутри устойчивого цикла существует еще один предельный цикл — неустойчивый. Но при переходе через бифуркационное значение особая точка становится неустойчивым фокусом, следовательно, внутри этого неустойчивого цикла должен существовать как минимум еще один (устойчивый). Это подтверждается численными расчетами (рис. 1).

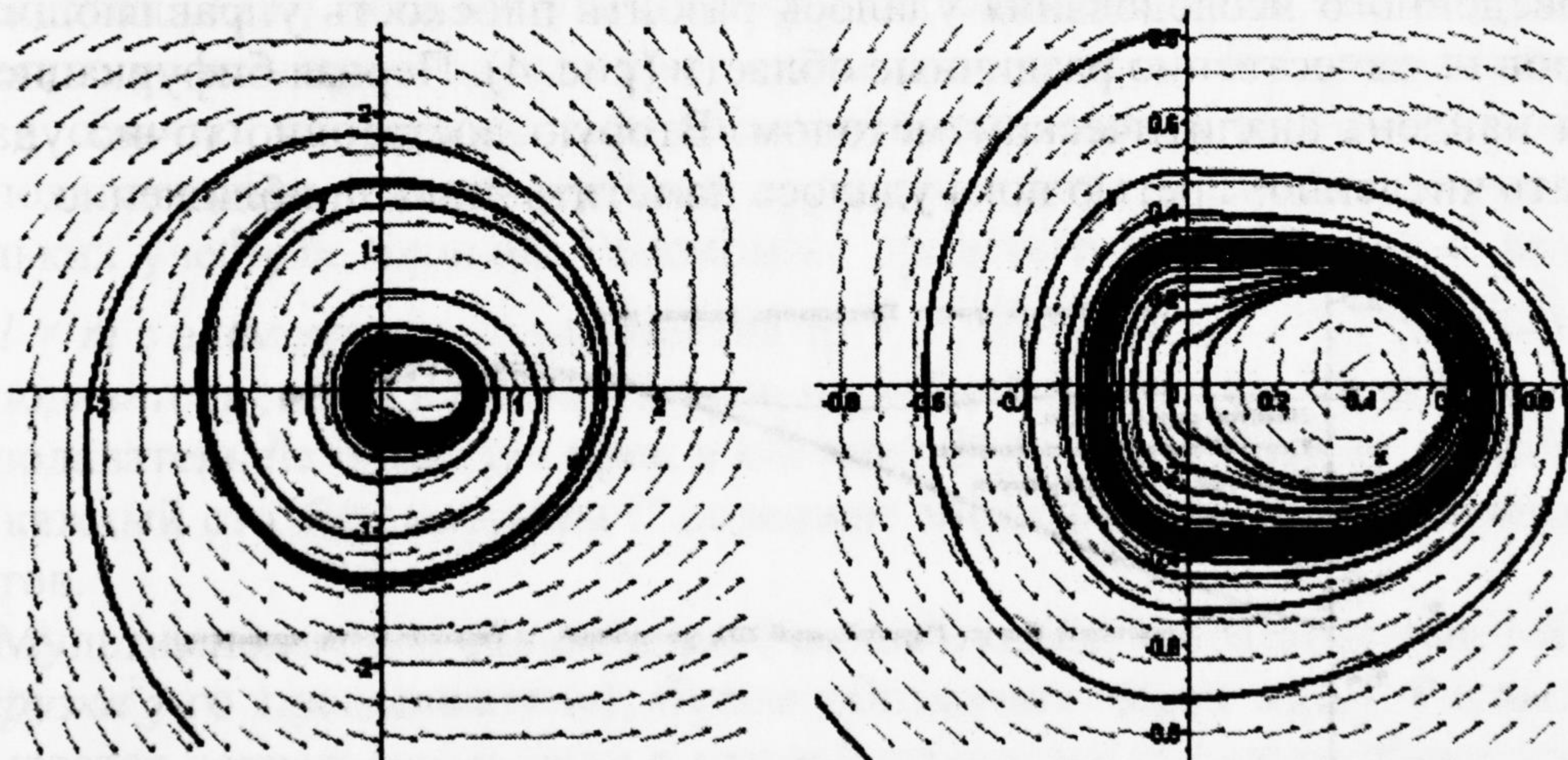


Рис. 1

Возможно, возникает даже больше предельных циклов, чем два устойчивых и один неустойчивый. Но определить их количество пока не удалось.

При $a_2(\mu) < a < a_3(\mu)$ все неустойчивые предельные циклы сжимаются, а устойчивые расширяются. В итоге при $a = a_3(\mu)$ неустойчивые предельные циклы сливаются с устойчивыми и образуют сложные полуустойчивые циклы (рис. 2). Таких циклов как минимум два, и за их счет система становится негрубой. То есть происходит бифуркация, и пары значений $(\mu, a_3(\mu))$ определяют третью бифуркационную кривую. К сожалению, эти пары значений

можно на данном этапе определить только по фазовым портретам, и полученные результаты недостаточно точны.

При $a > a_3(\mu)$, как видно по фазовым портретам (рис. 3), неподвижная точка по-прежнему остается неустойчивым фокусом, предельных циклов нет.

Таким образом, удалось выяснить, что возмущенная система так же, как и невозмущенная, претерпевает три бифуркации: бифуркацию рождения цикла из бесконечности, бифуркацию рождения циклов из сложного фокуса и бифуркацию, при которой возникнувшие предельные циклы исчезают. Основное отличие от невозмущенной системы состоит в том, что из сложного фокуса рождается не один, а как минимум три предельных цикла.

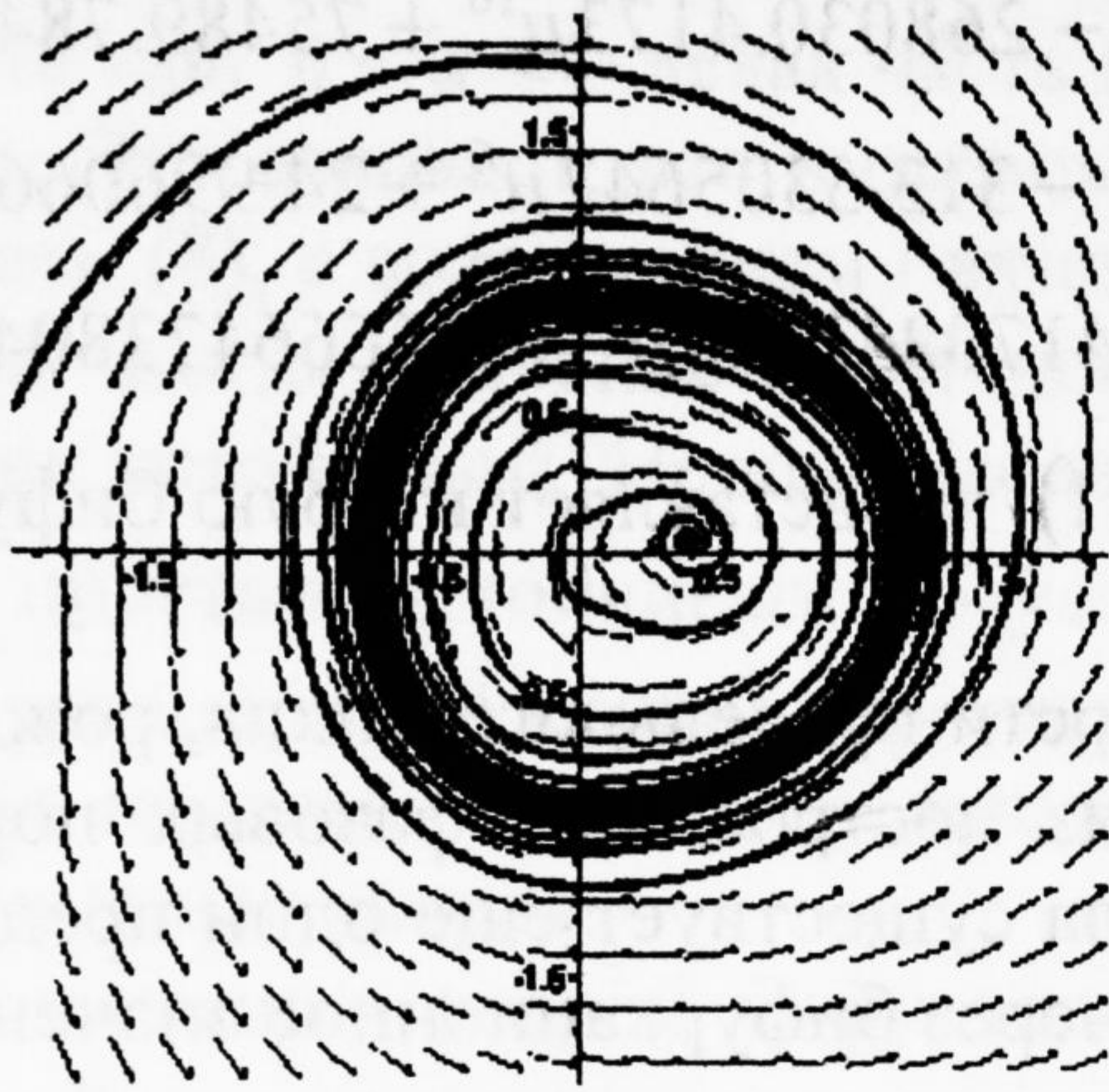


Рис. 2

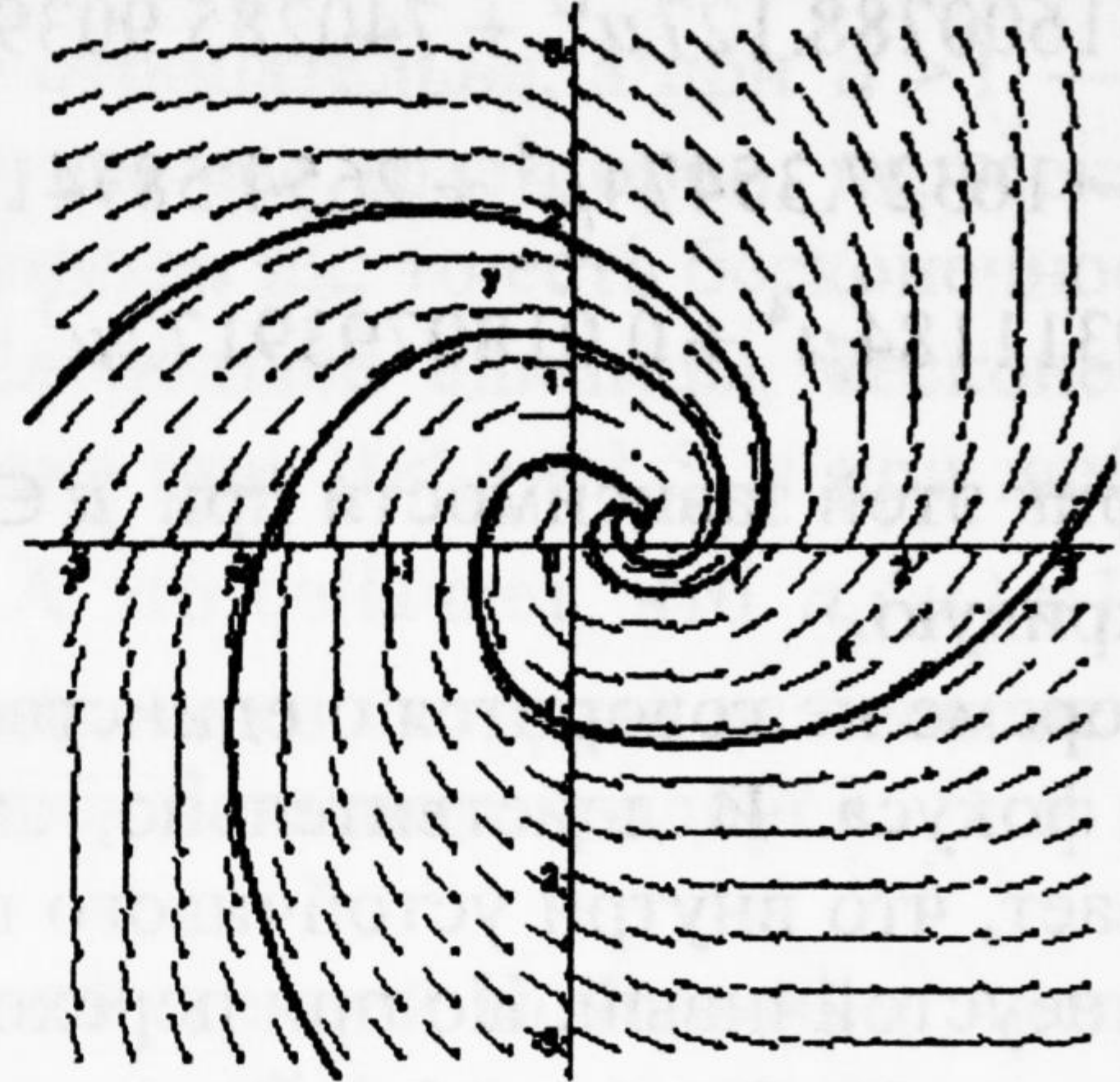


Рис. 3

Несмотря на то, что некоторые вопросы остались нерешенными, на основе проведенного исследования удалось разбить плоскость управляющих параметров на качественно различные области (рис. 4). Первая бифуркационная кривая найдена аналитическим методом. Вторую достаточно точно удалось отыскать численно. Третью пока удалось наметить лишь приближенно.

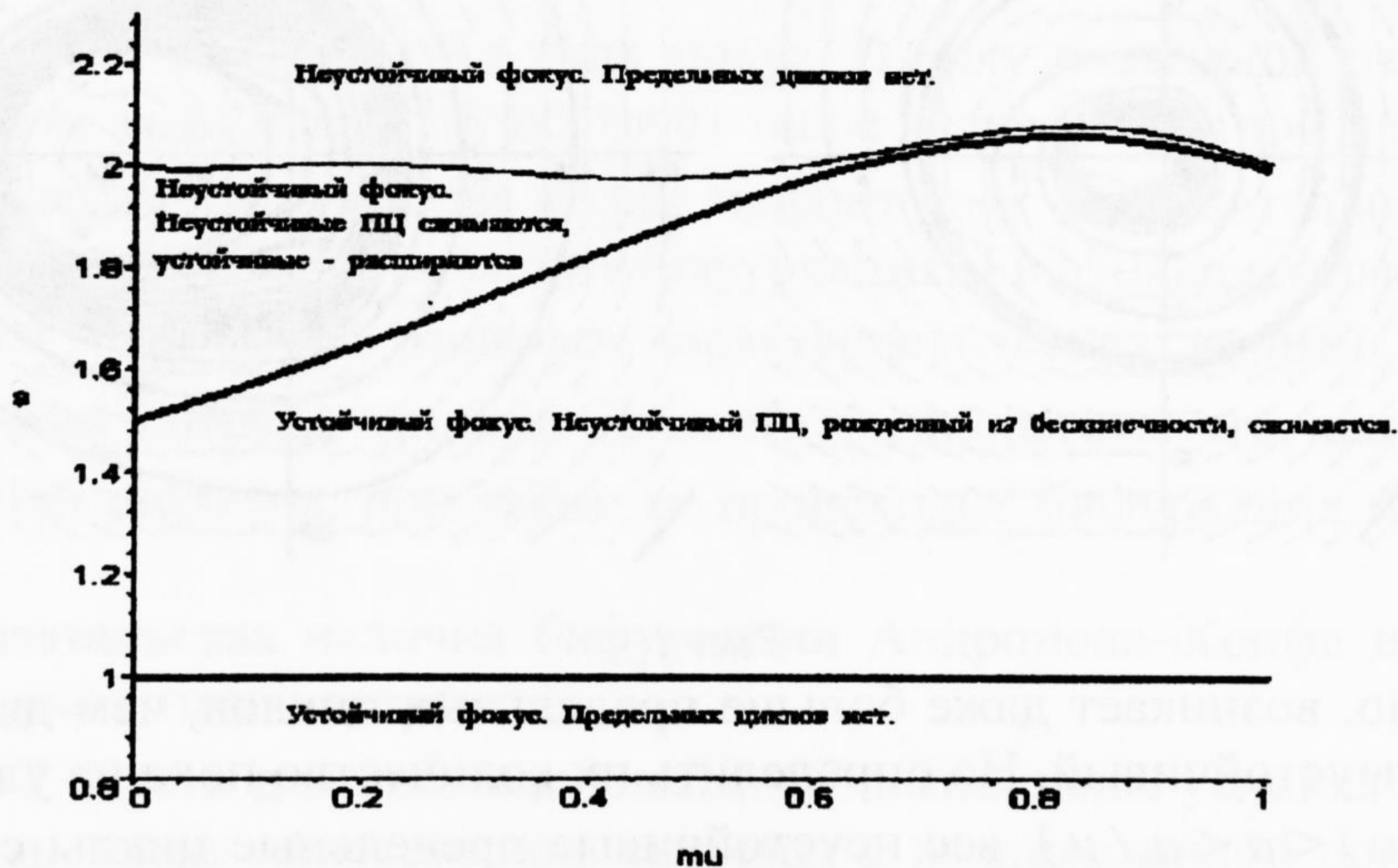


Рис. 4

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Drazin, P.G. Nonlinear Systems. Cambridge University Press, 1992. 333 p.
2. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1967.
3. Ван Д., Ли Ч., Чоу Ш.-Н. Нормальные формы и бифуркации векторных полей на плоскости / Пер. с англ. М.: МЦНМО, 2005. 416 с.