Для вычисления максимального потока в сети $\Gamma_1(C)$ применим алгоритм Гольдберга и Рао [4], основанный на нахождении тупиковых потоков; время его работы $O\left(\left|E_1\right|^{1,5}\ \log\left(\left|V_1^2\right|/\left|E_1\right|\right)\ \log U\right)$, где U — наибольшая пропускная способность дуги. Коль скоро

$$\left|E_1\right| < 14n+1,\ \left|V_1\right| \leq 4n+4,$$

алгоритм Гольдберга и Рао завершается за время $O(n^{1,5}\ \log(n))$.

Лемма доказана.

Замечание. Вычислительные исследования различных методов нахождения максимального потока см. в [5].

Доказательство теоремы 1.

Поиск получередующейся цепи волновым алгоритмом потребует не более $|E| = 6n$ операций. Так как величина потока в сети $\Gamma(C)$ равна $2n$, то $f_D \leq 2n$; поэтому итерация в приведенном выше алгоритме выполняется не более n раз. Следовательно, для удаления дефектных вершин достаточно $O(n^2)$ операций. Т.к., согласно лемме, проверка существования допустимого потока потребует не более чем $O(n^{1,5}\ \log(n))$ операций, то задача о непрерывном расписании может быть решена для рассматриваемого класса за время $O(n^2)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Магомедов А.М. О вычислительной сложности частного случая задачи построения расписания // Тез. докл. X Белорусской математической конференции. Ч. 5. Институт математики НАН Беларуси. Минск, 2008. С. 92.
2. Магомедов А.М. О модификации характеризации Бержа // Тез. докл. XV международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики». Казань: Отечество, 2008. С. 77.
3. Форд Л.Р., Фалкерсон Д.Р. Потоки в сетях. М.: Мир, 1966. 276 с.
4. Andrew, V. Goldberg and Satish Rao. Beyond the Flow Decomposition Barrier // Journal of the ACM, 1998. 45. P. 783-797.
5. Ahuja, R.K., Kodialam, M., Mishra, A.K. Computational investigation of maximum flow algorithms // European Journal on Operational Research. 1997. 97. P. 509-542.

Василий Александрович БАРИНОВ —
доцент кафедры математического моделирования,
кандидат физико-математических наук
vbarinov@utmn.ru

Константин Юрьевич БАСИНСКИЙ —
аспирант кафедры математического моделирования
kbasinsky@mail.ru

Институт математики и компьютерных наук
Тюменский государственный университет

УДК 532.59:532.13

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ДВИЖЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

MODELLING OF WAVE MOVEMENTS OF THE VISCOUS LIQUID

АННОТАЦИЯ. Приведено точное вихревое решение линейной задачи о распространении волн по свободной поверхности вязкой жидкости. Получены точные дисперсионные соотношения. Определены условия, при которых возможны волновые движения жидкости.

SUMMARY. The article describes the exact vortical decision of a linear problem on distribution of waves on a free surface of a viscous liquid. Exact dispersive parities are received. Conditions which make wave movements of a liquid possible are determined.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА. Поверхностные волны, вязкость, частота, декремент затухания.

KEY WORDS. Superficial waves, viscosity, frequency, decrement of attenuation.

Изучение влияния вязкости жидкости на волновые движения проводится достаточно давно [1–3]. Но математическая сложность уравнений Навье-Стокса и граничных условий не позволила в достаточной мере исследовать этот процесс до настоящего времени. Решение линейной задачи для бесконечно глубокого слоя жидкости приведено в работе [4]. В случае слоя конечной глубины решение получено в [5]. В этих работах проблема определения частоты и декремента затухания (дисперсионных соотношений) сведена к системам нелинейных алгебраических уравнений, аналитических решений которых не получено. Для потенциальных волновых движений (слабовязкий случай) приближенное решение приведено в [1–3]. Цель настоящей работы — получить точное аналитическое решение линейной задачи, а также выражения для фазовой скорости и декремента затухания волны. Кроме того, что решение должно быть точным, при пренебрежении вязкостью оно должно непрерывно переходить в известные решения для идеальной жидкости [6, 7]. Существование такого перехода доказано в работе [8].

1. Нелинейная задача. Рассматривается бесконечно глубокий слой вязкой несжимаемой жидкости, ограниченный сверху свободной поверхностью $z=\xi(t,x)$. Движение жидкости плоскопараллельное в плоскости xz. Оси x и z направлены так, что ось x совпадает со свободной поверхностью в ее невозмущенном состоянии, а ось z направлена вертикально вверх.

В области, занятой жидкостью, выполняется уравнение неразрывности и уравнения движения [3]:

$$div\mathrm{v}=0,\quad \rho\frac{d\mathrm{v}}{dt}=\eta\Delta\mathrm{v}-\nabla P+\rho\mathrm{g}\,, \tag{1.1}$$

где $\mathrm{v}=(u,0,v)$ – вектор скорости, ρ — плотность, P — давление, η — коэффициент динамической вязкости, g — вектор силы тяжести.

При бесконечном заглублении скорость жидкости должна затухать, то есть выполнено условие

$$u=0,\quad v=0,\quad z\to-\infty. \tag{1.2}$$

На свободной поверхности $z=\xi\,(t,x)$ задаются кинематическое и динамическое условия. Первое состоит в том, что частица жидкости не сходит со свободной поверхности

$$v=\frac{\partial\xi}{\partial t}+u\frac{\partial\xi}{\partial x}. \tag{1.3}$$

Динамическое условие в случае, когда к свободной поверхности приложено только постоянное (например, атмосферное) давление P_a, имеет вид [3]

$$(-P\delta_{ij}+\tau_{ij})n_j=-P_a n_i, \tag{1.4}$$

где n_i — компоненты вектора внешней нормали к свободной поверхности, τ_{ij} — тензор вязких напряжений, δ_{ij} — символ Кронекера.

По свободной поверхности жидкости $z=\xi(t,x)$ в положительном направлении оси x распространяется волна длиной λ и фазовой скоростью c (частотой $\omega=ck$). Длина волны много больше ее высоты $\lambda>>\xi_{max}$. В этом случае все волновые возмущения являются величинами одного порядка малости $\varepsilon=k\xi_{max}$ ($k=2\pi/\lambda$ — волновое число).

Введем следующие безразмерные переменные и величины:

$$\mathrm{v}'=\mathrm{v}/\varepsilon c\,,\ p'=p/\varepsilon\rho c^2,$$

$$p=P+\rho gz-P_a\,,\ \xi'=k\xi/\varepsilon\,,\ \nu'=\eta k/\rho c\,, \tag{1.5}$$

$$z'=kz\,,\ x'=kx\,,\ t'=kct\,,\ \alpha=c/c_0=\omega/\omega_0\,,$$

$$c_0^2=g/k\,,\ \omega_0^2=gk\,.$$

Там, где это необходимо, штрихом обозначены безразмерные величины. В дальнейшем штрих будем опускать. Величины c_0^2 и ω_0^2 — соответственно квадраты фазовой скорости и частоты гравитационной волны для идеальной жидкости. Параметр α должен удовлетворять естественному ограничению

$$0\le\alpha^2\le1\,. \tag{1.6}$$

После обезразмеривания исходная нелинейная задача (1.1) — (1.4) примет вид

$$div\mathrm{v}=0,\ \ \frac{\partial\mathrm{v}}{\partial t}+\varepsilon(\mathrm{v}\nabla)\mathrm{v}=-\nabla p+\nu\Delta\mathrm{v}, \tag{1.7}$$

$$\mathrm{v}-\varepsilon\mathrm{u}\frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{\partial\xi}{\partial t},\ \ 4\nu\varepsilon\frac{\partial\mathrm{v}}{\partial z}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial\mathrm{v}}{\partial x}+\frac{\partial\mathrm{u}}{\partial z}\right)\left(1-\varepsilon^2\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2\right)=0,\ \ z=\varepsilon\xi,$$

$$\left(-p+\frac{1}{\alpha^2}\xi\right)\left(1+\varepsilon^2\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2\right)+2\nu\frac{\partial\mathrm{v}}{\partial z}\left(1-\varepsilon^2\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2\right)-2\nu\varepsilon\left(\frac{\partial\mathrm{u}}{\partial z}+\frac{\partial\mathrm{v}}{\partial x}\right)\frac{\partial\xi}{\partial x}=0,\ \ z=\varepsilon\xi,$$

$$\mathrm{v}=0,\ \ \mathrm{u}=0,\ \ z\to-\infty.$$

2. Линейная задача. Линеаризуем задачу (1.7). В гидродинамике идеальных жидкостей ($\nu=0,\ \alpha=1$) линеаризация проводится только по волновому параметру ε. В уравнениях же (1.7) кроме ε присутствует обусловленный вязкостью параметр ν. Этот параметр может существенно влиять на выбор модели движения. Например, в предельном случае $\nu=0$ получаем модель идеальной жидкости, при $\nu>>1$ — Стоксово приближение. Поскольку рассматривается волновая задача, то линеаризацию будем проводить по параметру ε. При этом полученные результаты должны учитывать произвольность параметра ν и для предельных значений ν должны соответствовать предельным моделям.

Полагая в (1.7) $\varepsilon=0$, получаем линейную задачу.

$$div\mathrm{v}=0,\ \ \ \frac{\partial\mathrm{v}}{\partial t}-\nu\Delta\mathrm{v}=-\nabla p, \tag{2.1}$$

$$\mathrm{v}=\frac{\partial\xi}{\partial t},\ \ p-\frac{1}{\alpha^2}\xi-2\nu\frac{\partial\mathrm{v}}{\partial z}=0,\ \ \nu\left(\frac{\partial\mathrm{v}}{\partial x}+\frac{\partial\mathrm{u}}{\partial z}\right)=0,\ \ z=0 \tag{2.2}$$

Применив оператор ∇ к обеим частям уравнения движения (2.1), получим линеаризованное уравнение Фридмана [9] $\Delta p = 0$, из которого следует, что давление — гармоническая функция по пространственным переменным. Поэтому, хотя бы часть поля скоростей, создающего это возмущение давления, должна быть потенциальной. В то же время второму динамическому условию (условию зануления касательных напряжений на свободной поверхности [4]) гармонические функции не удовлетворяют. Следовательно, поле скоростей помимо потенциальной составляющей должно содержать и вихревую. Исходя из этого, представим скорость в виде

$$\mathrm{v} = \mathrm{v}_0 + \mathrm{v}_1, \ \ \mathrm{v}_0 = \nabla\varphi, \ \ \mathrm{v}_1 = rot\psi, \ \ \psi = \psi(t,x,z)\mathrm{e}_y, \tag{2.3}$$

где e_y — единичный вектор оси y, φ — потенциал, ψ — функция тока.

Тогда, учитывая линейность системы (2.1), ее можно записать в виде:

$$\Delta\varphi = 0, \ \ p = -\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \ \ \frac{\partial\psi}{\partial t} - \nu\Delta\psi = 0. \tag{2.4}$$

Будем искать решение этой системы в виде затухающих со временем бегущих волн

$$\varphi = e^{-\beta t}(A_1 \cos\overline{x} + A_2 \sin\overline{x})e^z, \tag{2.5}$$

$$\psi = e^{-\beta t}(V_1(z)\sin\overline{x} - V_2(z)\cos\overline{x}), \ \ \overline{x} = x - t,$$

где β — безразмерный декремент затухания волны (βkc — размерный), A_i — постоянные, определяемые из начальных условий, $V_i(z)$ — неизвестные функции, подлежащие определению.

Подставляя (2.5) в (2.4), для давления получаем

$$p = e^{-\beta t}[(A_2 + \beta A_1)\cos\overline{x} + (\beta A_2 - A_1)\sin\overline{x}]e^z. \tag{2.6}$$

Для $V_i(z)$ из последнего уравнения (2.4) получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

$$\begin{cases} \nu(V_2'' - V_2) + \beta V_2 - V_1 = 0, \\ \nu(V_1'' - V_1) + \beta V_1 + V_2 = 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

Решение этой системы, удовлетворяющее условию затухания движения при $z \to -\infty$, имеет вид

$$V_1 = (B_1 \cos az - B_2 \sin az)e^{bz}, \ \ V_2 = (B_2 \cos az + B_1 \sin az)e^{bz}, \tag{2.8}$$

где $B_i = const$. Параметры a и b удовлетворяют уравнениям

$$a^2 - b^2 = \delta/\nu, \ \ 2ab = 1/\nu, \ \ \delta = \beta - \nu. \tag{2.9}$$

Второе динамическое условие (2.2) при подстановке в него выражений (2.5) примет вид

$$V_i'' + V_i = -2A_i, \ \ i = 1,2, \ \ z = 0.$$

Из этой системы, при подстановке выражений (2.8), следует система для определения коэффициентов B_i

$$\begin{cases} sB_1 + B_2 = 2\nu A_1, \\ -B_1 + sB_2 = 2\nu A_2. \end{cases}$$

Здесь $s = \beta - 2\nu$. Решение системы имеет вид

$$B_1 = \frac{2\nu}{1+s^2}(sA_1 - A_2), \quad B_2 = \frac{2\nu}{1+s^2}(A_1 + sA_2). \tag{2.10}$$

Подставляя найденные выражения в кинематическое условие и интегрируя его по t, получим выражение для формы свободной поверхности

$$\xi(t,x) = -\frac{e^{-\beta t}}{1+s^2}\left[(sA_1 - A_2)\cos\overline{x} + (A_1 + sA_2)\sin\overline{x}\right]. \tag{2.11}$$

Из первого динамического условия следует условие нетривиальности коэффициентов A_1, A_2. Оно сводится к выполнению системы равенств

$$\begin{cases} s_0 b - \alpha a = \dfrac{s_0}{4\nu_0^2}(1 + \alpha^2 + s_0^2), \\ \alpha b + s_0 a = \dfrac{\alpha}{4\nu_0^2}(1 - \alpha^2 - s_0^2). \end{cases}$$

Здесь и ниже введены новые безразмерные величины: $\nu_0 = \alpha\nu$, $\beta_0 = \alpha\beta$, $s_0 = \alpha s$, $\delta_0 = \alpha\delta$. Из этой системы получаем выражения для a и b:

$$a = -\alpha s_0 / (2\nu_0^2), \quad b = (1 + s_0^2 - \alpha^2) / (4\nu_0^2). \tag{2.12}$$

3. Дисперсионные соотношения. Подставляя выражения (2.12) в (2.9), получим уравнения для нахождения дисперсионных соотношений. Из второго уравнения (2.9) следует равенство

$$\alpha^2 = 1 + s_0^2 + \frac{4\nu_0^3}{s_0}. \tag{3.1}$$

Это выражение задает безразмерную фазовую скорость (частоту) как функцию $\alpha(\beta_0, \nu_0)$. Найдем область определения этой функции. В силу верхней оценки $\alpha^2 \le 1$ (1.6) из (3.1) получаем ограничения для декремента затухания волны

$$-\sqrt[3]{4}\nu_0 \le s_0 < 0, \quad (2 - \sqrt[3]{4})\nu_0 \le \beta_0 < 2\nu_0$$

Чтобы получить точную верхнюю границу для $\beta_0(\nu_0)$ используем второе неравенство (1.6) $\alpha^2 \ge 0$. Тогда из (3.1) следует

$$s_0^3 + s_0 + 4\nu_0^3 \le 0.$$

Решая это неравенство, получаем

$$s_0 \le -D, \quad \beta_0 \le 2\nu_0 - D,$$

$$D = (\sqrt{Q} + 2\nu_0^3)^{1/3} - (\sqrt{Q} - 2\nu_0^3)^{1/3}, \quad Q = 4\nu_0^6 + 1/27.$$

Таким образом, получаем точные границы для s_0 и β_0

$$-\sqrt[3]{4}\nu_0 \le s_0 \le -D, \quad \beta_1 \le \beta_0 \le \beta_2, \tag{3.2}$$

$$\beta_1 = (2-\sqrt[3]{4})\nu_0 \approx 0{,}4\nu_0, \quad \beta_2 = 2\nu_0 - D.$$

Предельное значение $\beta_0 = \beta_2 \quad (s_0 = -D)$ соответствует полному затуханию волны, т.е $\alpha = 0$.

Используя равенство (3.1), можно упростить второе выражение (2.12)

$$a = -\alpha s_0 / (2\nu_0^2), \; b = -\nu_0 / s_0. \tag{3.3}$$

Из этих выражений и ограничений (3.2) следует положительность параметров a и b.

Для определения точной зависимости $s_0(\nu_0)$, а следовательно и $\beta_0(\nu_0)$, используем первое уравнение (2.9). Подставляя в него (3.1) и (3.3), находим

$$s_0^6 + s_0^4 - 4\nu_0^4 s_0^2 - 4\nu_0^6 = 0.$$

Заменяя переменную, получаем неполное кубическое уравнение

$$\tau^3 + n\tau + m = 0, \quad \tau = s_0^2 + \frac{1}{3}, \quad \tau > 0, \tag{3.4}$$

$$n = -4\nu_0^4 - \frac{1}{3}, \quad m = 2\left(\frac{1}{27} + \frac{2}{3}\nu_0^4 - 2\nu_0^6\right),$$

$$Q_1 = \left(\frac{n}{3}\right)^3 + \left(\frac{m}{2}\right)^2 = \frac{4\nu_0^6}{27}(11\nu_0^6 - 18\nu_0^4 - \nu_0^2 - 1).$$

Решение этого уравнения определяется по формуле Кардано

$$\tau = \left(\sqrt{Q_1} - \frac{m}{2}\right)^{1/3} - \left(\sqrt{Q_1} + \frac{m}{2}\right)^{1/3}.$$

Нас интересуют только действительные корни уравнения (3.4), которые зависят от знака величины Q_1. При $Q_1 < 0$ имеем три действительных корня, причем два из них не удовлетворяют условию $\tau > 0$. При $Q_1 > 0$ — один. Уравнение $Q_1 = 0$ имеет только один положительный действительный корень $\nu_0^* = 1{,}31146872...(\nu_0^* \approx 1{,}31)$, $Q_1 < 0$ при $\nu_0 < \nu_0^*$, $Q_1 > 0$ при $\nu_0 > \nu_0^*$. Если $\nu_0 = \nu_0$, то выполняется равенство $s_0^2(\nu_0^*) = D_0^2(\nu_0^*)$, а если $\nu_0 > \nu_0^*$ – неравенство $s_0^2(\nu_0^*) < D_0^2(\nu_0^*)$. Последнее неравенство не может выполняться в силу найденной области значений функции $s_0(\nu_0)$ (3.2). Поэтому достаточно найти τ при $0 \le \nu_0 \le \nu_0^*$, то есть при $Q_1 \le 0$. Для этого интервала значений ν_0 выражение для декремента имеет вид

$$\text{При } 0 \le \nu_0 < 0{,}66: \; \beta_0 = 2\nu_0 - \sqrt{\frac{1}{3}\left(2\sqrt{12\nu_0^4 + 1}\cos\frac{\theta - \pi}{3} - 1\right)}, \tag{3.5}$$

$$\text{При } 0{,}66 \le \nu_0 < 1{,}31: \; \beta_0 = 2\nu_0 - \sqrt{\frac{1}{3}\left(2\sqrt{12\nu_0^4 + 1}\cos\frac{\theta}{3} - 1\right)},$$

$$\theta = arctg\left[\frac{6\sqrt{3}\nu_0^3\sqrt{1+\nu_0^2(1+18\nu_0^2-11\nu_0^4)}}{1+18\nu_0^4-54\nu_0^6}\right].$$

Графики зависимости $\beta_0(\nu_0)$, $\beta_1(\nu_0)$, $\beta_2(\nu_0)$ приведены на рис. 1. При подстановке (3.5) в (3.1) получаем зависимость безразмерной фазовой скорости (частоты) от ν_0, причем выполняются равенства $\alpha(0)=1$, $\alpha(\nu_0^*)=0$. График этой зависимости представлен на рис. 2.

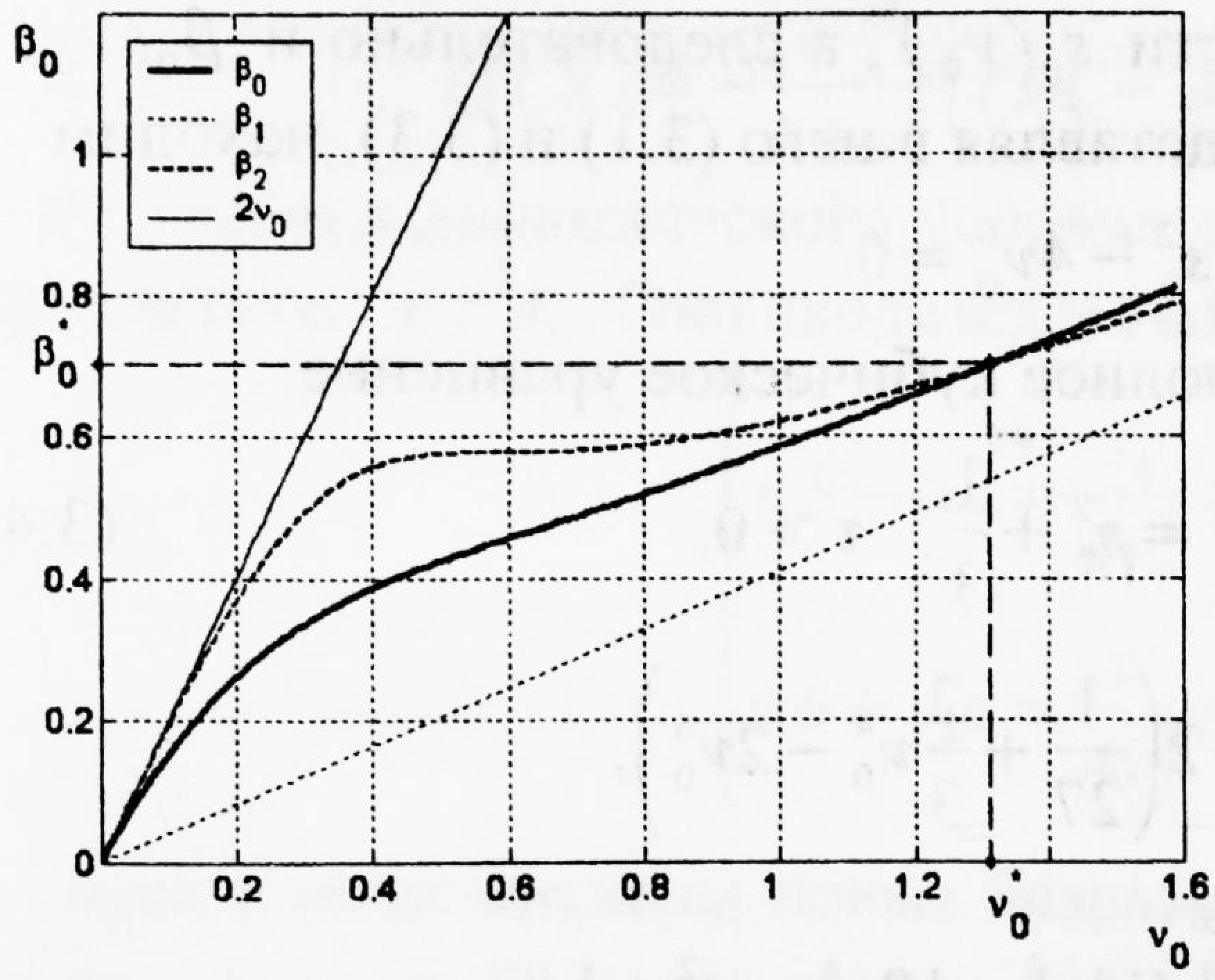

Рис. 1. График зависимости $\beta_0(\nu_0)$

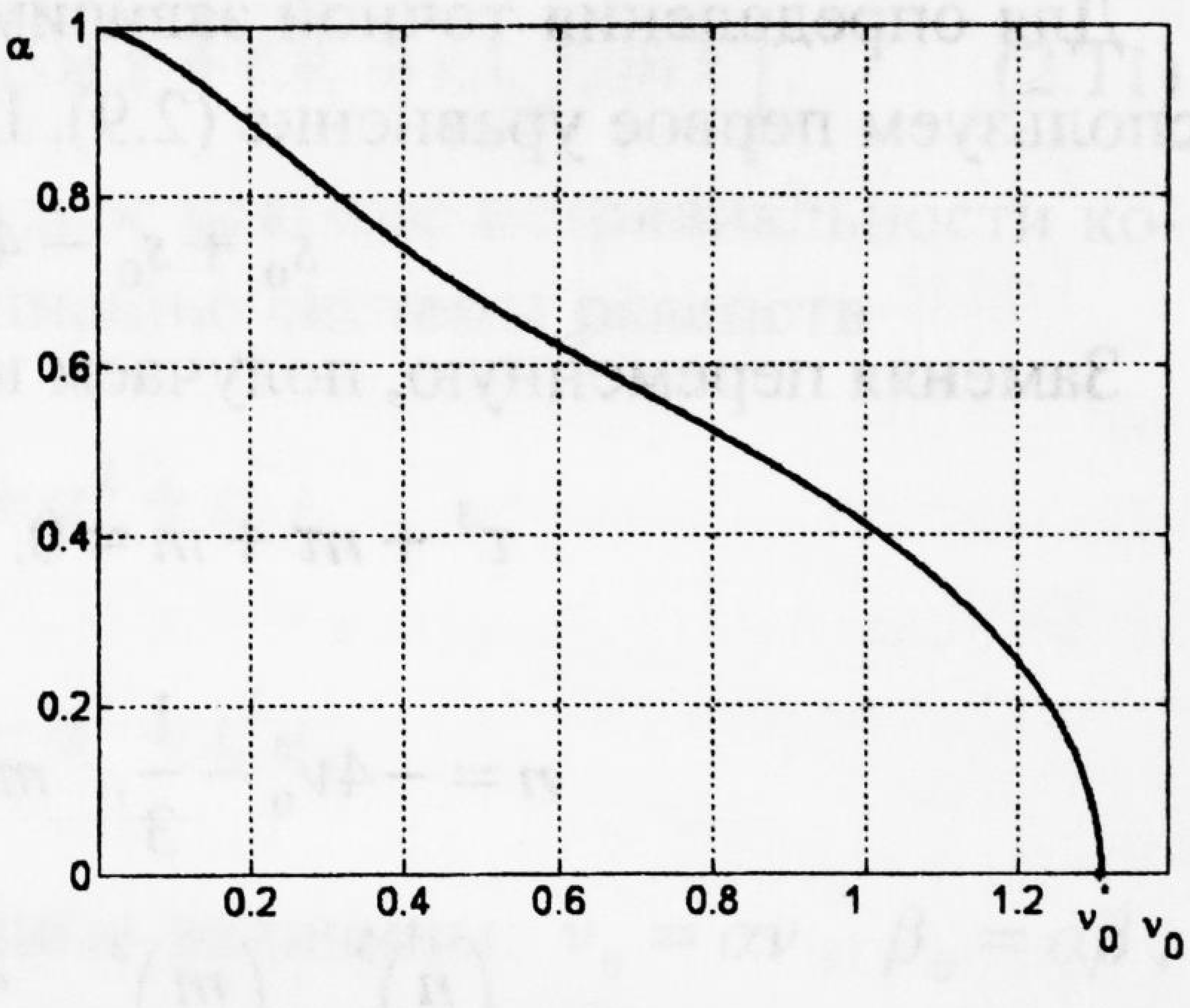

Рис. 2. График зависимости $\alpha(\nu_0)$

4. Заключение. Из полученных выражений нетрудно получить предельные случаи:

1) при $\nu_0 \to 0$: $\varphi \to \varphi e^{\beta t}$, $\psi \to 0$, $\alpha \to 1$,

2) при $\nu_0 \to \infty$: $\varphi \to 0$, $\psi \to 0$, $\alpha \to 0$,

то есть найденные решения справедливы для всего диапазона изменения вязкости.

Движение вязкой жидкости может быть только вихревым, иначе не выполняется граничное условие для касательных напряжений.

Волновое движение возможно, если коэффициент кинематической вязкости лежит в пределах: $0 \le \nu_0 \le \nu_0^*$. В физических величинах это условие запишется как $0 \le \nu \le 1{,}31\frac{c_0}{k}$.

В области существования бегущих волн декремент затухания принадлежит интервалу: $0 \le \beta_0 \le \beta_0^*$, $0 \le \beta \le \beta_0^*\omega_0$, $\beta_0^* \approx 0{,}7$. При $\beta_0 = \beta_0^*$ происходит полное затухание волнового движения жидкости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ламб Г. Гидродинамика. Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.

2. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 700 с.

3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 735 с.

4. Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. Нелинейные движения вязкой жидкости со свободной поверхностью // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2003. № 2. С. 184-192.

5. Баринов В.А., Бутакова Н.Н. Поверхностные волны на слое вязкой жидкости ограниченной глубины // Вестник ТюмГУ. 2007. № 5. С. 118-122.

6. Алешков Ю.З. Теория волн на поверхности тяжелой жидкости. Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1981. 196 с.
7. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 816 с.
8. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970. 288 с.
9. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Физматгиз, 1963. 728 с.

Ольга Владимировна НИССЕНБАУМ —
ст. преподаватель кафедры информационной безопасности,
кандидат физико-математических наук
onissenbaum@rambler.ru
Алексей Геннадьевич ЗАХАРЧЕНКО —
студент 6 курса
phenomen_21@mail.ru
Институт математики и компьютерных наук
Тюменский государственный университет

УДК 519.875

ОПТИМАЛЬНАЯ ОЦЕНКА СОСТОЯНИЙ АЛЬТЕРНИРУЮЩЕГО ПОТОКА С МЕРТВЫМ ВРЕМЕНЕМ

OPTIMAL ESTIMATION OF CONDITION IN ASYNCHRONOUS ALTERNATING PROCESS WITH UNPROLONGED DEAD TIME

АННОТАЦИЯ. Рассмотрена задача оптимальной оценки состояний дважды стохастического асинхронного альтернирующего потока с непродлевающимся мертвым временем фиксированной длительности, являющегося математической моделью информационных потоков, в телекоммуникационных сетях. Приведены численные результаты, полученные с использованием расчетных формул и имитационного моделирования.

SUMMARY. The article considers the optimal evaluation problem of states of asynchronous alternating double stochastic flow with unprolonging dead time, which appears to be mathematical model of informational flows circulating in telecommunication networks. The numerical results of experiments obtained with the help of calculation expressions and imitation modelling are given.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА. Асинхронный альтернирующий поток, мертвое время, лишние события, коррелированный поток, рекуррентный поток, апостериорная вероятность, состояние процесса, оптимальная оценка.

KEY WORDS. Asynchronous alternating process, dead time, extra event, correlated flow, recurrent flow, posterior probability, stochastic process condition, optimal estimation.

Развитие теории массового обслуживания насчитывает более 100 лет. Первые работы в этой области, опубликованные датским ученым А.К. Эрлангом в 1908-22 гг., были посвящены оптимизации обслуживания заявок, поступающих на телефонную станцию. Хотя впоследствии область приложения теории массового обслуживания существенно расширилась в сторону транспортных систем, управления запасами, управления производственными процессами, все же важной областью приложения были и остаются сети связи и задачи обслуживания трафика.

До середины 80-х гг. XX в. трафик сети связи аппроксимировали одной из трех моделей, применявшихся еще А.К. Эрлангом — моделями простейшего (пуассоновского), регулярного либо эрланговского (прореженного пуассо-