

6. Алешков Ю.З. Теория волн на поверхности тяжелой жидкости. Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1981. 196 с.
7. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 816 с.
8. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970. 288 с.
9. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Физматгиз, 1963. 728 с.

*Ольга Владимировна НИССЕНБАУМ —
ст. преподаватель кафедры информационной безопасности,
кандидат физико-математических наук
onissenbaum@rambler.ru*

*Алексей Геннадьевич ЗАХАРЧЕНКО —
студент 6 курса
phenomen_21@mail.ru*

*Институт математики и компьютерных наук
Тюменский государственный университет*

УДК 519.875

ОПТИМАЛЬНАЯ ОЦЕНКА СОСТОЯНИЙ АЛЬТЕРНИРУЮЩЕГО ПОТОКА С МЕРТВЫМ ВРЕМЕНЕМ

OPTIMAL ESTIMATION OF CONDITION IN ASYNCHRONOUS ALTERNATING PROCESS WITH UNPROLONGED DEAD TIME

АННОТАЦИЯ. Рассмотрена задача оптимальной оценки состояний дважды стохастического асинхронного альтернирующего потока с непродлевающимся мертвым временем фиксированной длительности, являющегося математической моделью информационных потоков, в телекоммуникационных сетях. Приведены численные результаты, полученные с использованием расчетных формул и имитационного моделирования.

SUMMARY. The article considers the optimal evaluation problem of states of asynchronous alternating double stochastic flow with unprolonging dead time, which appears to be mathematical model of informational flows circulating in telecommunication networks. The numerical results of experiments obtained with the help of calculation expressions and imitation modelling are given.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА. Асинхронный альтернирующий поток, мертвое время, лишние события, коррелированный поток, рекуррентный поток, апостериорная вероятность, состояние процесса, оптимальная оценка.

KEY WORDS. Asynchronous alternating process, dead time, extra event, correlated flow, recurrent flow, posterior probability, stochastic process condition, optimal estimation.

Развитие теории массового обслуживания насчитывает более 100 лет. Первые работы в этой области, опубликованные датским ученым А.К. Эрлангом в 1908-22 гг., были посвящены оптимизации обслуживания заявок, поступающих на телефонную станцию. Хотя впоследствии область приложения теории массового обслуживания существенно расширилась в сторону транспортных систем, управления запасами, управления производственными процессами, все же важной областью приложения были и остаются сети связи и задачи обслуживания трафика.

До середины 80-х гг. XX в. трафик сети связи аппроксимировали одной из трех моделей, применявшихся еще А.К. Эрлангом — моделями простейшего (пуассоновского), регулярного либо эрланговского (прореженного пуассо-

новского) потока событий. С середины 1980-х гг. началось бурное развитие различного рода сетей связи, что привело к созданию цифровых сетей интегрального обслуживания (Integrated Service Digital Networks — ISDN), особенностью которых является передача по единым аппаратным средствам разнообразных видов информации (речевых сигналов в цифровой форме, интерактивных данных, видеосигналов и т.п.). Классические математические модели входящих потоков событий оказались, в той или иной степени, непригодны для описания информационных потоков в ISDN. Это привело к построению новых математических моделей входящих потоков событий — дважды стохастических потоков. Одними из первых работ в этой области были [1–3]. В [1, 2] введены в рассмотрение так называемые МС (Markov chain)-потоки, в [3] — MVP (Markov versatile processes)-потоки. Интенсивность МС-потоков представляет собой кусочно-постоянный процесс с конечным числом состояний. Подклассом МС-потоков являются так называемые асинхронные потоки событий [4] — потоки с интенсивностью, для которой переход из состояния в состояние происходит в случайные моменты времени и не зависит от моментов наступления событий.

Исследования [5–7] показывают, что различные модели дважды стохастических потоков с достаточной степенью достоверности соответствуют потокам информационных пакетов в ISDN, в том числе в компьютерных сетях, в то время как простейший поток может моделировать такие потоки лишь на отдельных, относительно небольших, отрезках времени. Однако условия функционирования реальных систем и сетей связи таковы, что параметры входящих потоков, такие как текущая интенсивность потока, параметры управляющей цепи Маркова и т.п., являются ненаблюдаемыми, а наблюдаются лишь моменты наступления событий (поступление пакета данных на обработку). Ввиду данного обстоятельства существенный интерес представляет решение задач оценки параметров и состояний дважды стохастического потока по наблюдениям за моментами наступления событий.

В данной статье рассмотрены четыре варианта асинхронного альтернирующего дважды стохастического потока: без лишних событий и со схемой инициирования лишних событий 3-х типов в условиях непродлевающегося мертвого времени фиксированной длительности. Для рассматриваемого потока решена задача оптимальной оценки состояния (по наблюдениям за моментами наступления событий) в любой момент времени на интервале наблюдения. Находятся выражения для апостериорных вероятностей состояний. Решение о состоянии потока выносится по критерию максимума апостериорной вероятности, представляющей наиболее полную характеристику состояния потока и обеспечивающей минимум полной вероятности ошибки вынесения решения [8]. Задача оценивания параметров альтернирующего потока без мертвого времени и в условиях непродлевающегося мертвого времени решена в [9], для альтернирующего потока с инициированием лишних событий — в [10,11]. Задача оптимальной оценки состояний альтернирующего потока без мертвого времени решена в [12].

1. Постановка задачи. Рассматривается асинхронный альтернирующий поток (далее — поток событий), интенсивность которого есть кусочно-постоянный стационарный случайный процесс с двумя состояниями $\lambda_1=\lambda$ и $\lambda_2=0$. В течение временного интервала, когда $\lambda(t)=\lambda$, имеет место пуассоновский поток событий с интенсивностью λ . В течение временного интервала,

когда $\lambda(t)=0$, поток событий отсутствует. Переход из первого состояния процесса $\lambda(t)$ во второе (из второго в первое) может осуществляться в произвольный момент времени. При этом длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в i -м состоянии распределена по экспоненциальному закону с параметром α_i , $i=1,2$. После каждого наблюдаемого события потока наступает период мертвого времени фиксированной длительности T , в течение которого другие события потока недоступны наблюдению. События, произошедшие в течение мертвого времени, не вызывают продления его периода. Первое событие, произошедшее по окончании мертвого времени, наблюдается и вызывает наступление следующего периода мертвого времени.

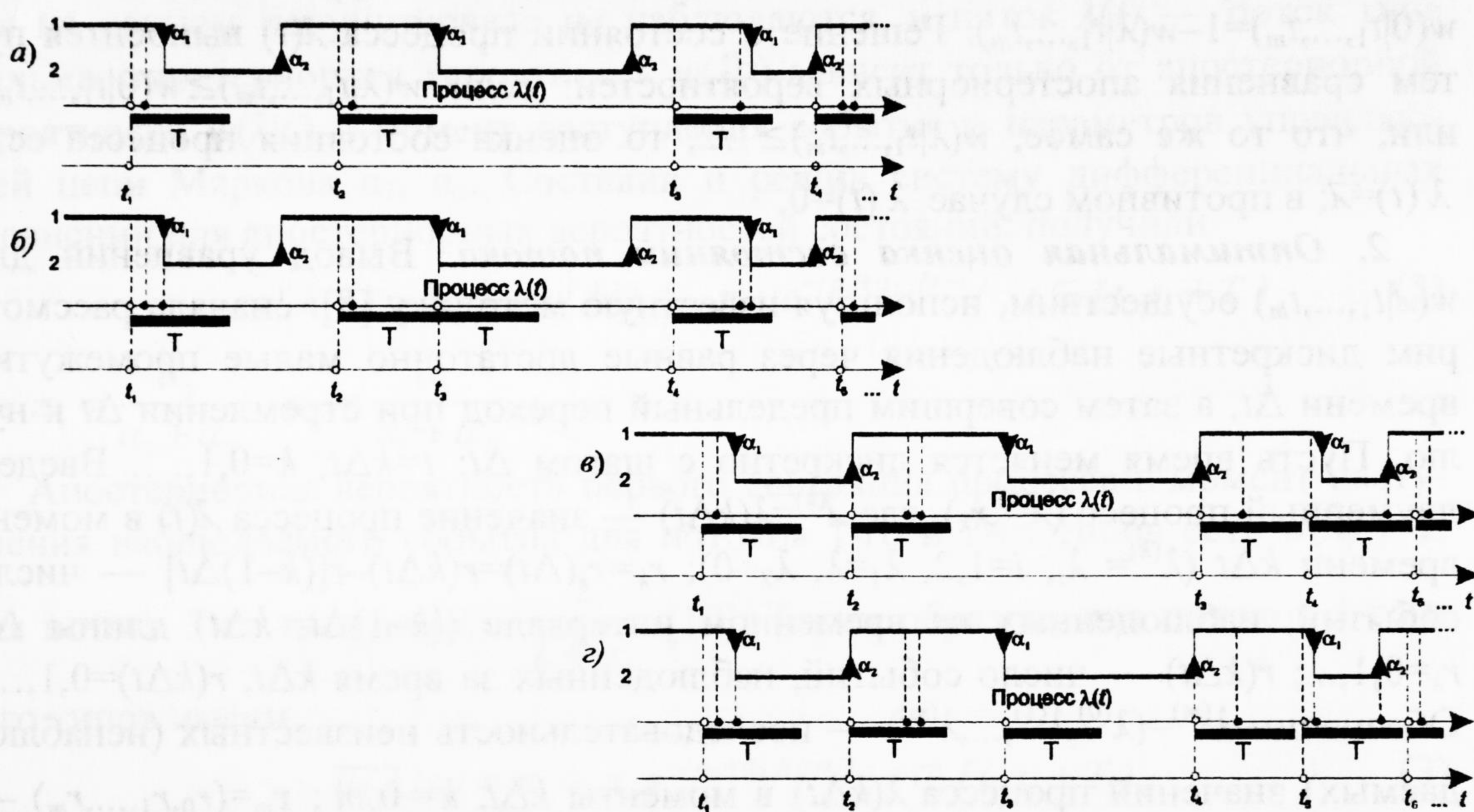


Рис. 1. Асинхронный альтернирующий поток с непродлевающимся мертвым временем (а — без лишних событий; б — лишние события при переходе из второго состояния в первое; в — лишние события при переходе из первого состояния во второе; г — лишние события при переходе из состояния в состояние):

1, 2 — состояния случайного процесса $\lambda(t)$; черные прямоугольники — периоды мертвого времени длительности T ; черные кружки — ненаблюдаемые события, белые кружки — наблюдаемые события; t_1, t_2, \dots — моменты наступления наблюдаемых событий

Рассматриваются четыре разновидности потока: без лишних событий (рис. 1а) и с тремя схемами инициирования лишних событий: 1) лишнее событие инициируется только в первом состоянии при переходе процесса $\lambda(t)$ из второго состояния в первое (рис. 1б); 2) лишнее событие инициируется только во втором состоянии при переходе процесса $\lambda(t)$ из первого состояния во второе (рис. 1в); 3) при переходе процесса $\lambda(t)$ из первого состояния во второе (из второго в первое) инициируется лишнее событие во втором (в первом) состоянии, то есть сначала осуществляется переход, а затем инициируется лишнее событие (рис. 1г). Очевидно, что в сделанных предпосылках $\lambda(t)$ — марковский процесс.

Так как процесс $\lambda(t)$ является принципиально ненаблюдаемым, то различить лишние события и события пуассоновского потока интенсивности λ невозможно. С другой стороны, так как длительность мертвого времени является постоянной величиной, достоверно известно, на каких отрезках времени

события потока не наблюдаются. Требуется по наблюдениям моментов наступления событий оценить состояние процесса $\lambda(t)$ в момент окончания наблюдений. Рассматривается стационарный режим функционирования потока, то есть переходными процессами на интервале наблюдений (t_0, t) , где t_0 — начало наблюдений, t — окончание наблюдений, пренебрегаем. Тогда без потери общности можно положить $t_0=0$. Для вынесения решения о состоянии процесса $\lambda(t)$ (то есть о состоянии потока событий) в момент t необходимо определить апостериорную вероятность $w(\lambda|t_1, \dots, t_m)$ того, что в момент t имеем $\lambda(t)=\lambda$ (m — количество наблюдаемых событий за время t), при этом апостериорная вероятность того, что в момент t имеем $\lambda(t)=0$ очевидно есть $w(0|t_1, \dots, t_m)=1-w(\lambda|t_1, \dots, t_m)$. Решение о состоянии процесса $\lambda(t)$ выносится путем сравнения апостериорных вероятностей: если $w(\lambda|t_1, \dots, t_m) \geq w(0|t_1, \dots, t_m)$, или, что то же самое, $w(\lambda|t_1, \dots, t_m) \geq 1/2$, то оценка состояния процесса есть $\hat{\lambda}(t)=\lambda$; в противном случае $\hat{\lambda}(t)=0$.

2. Оптимальная оценка состояний потока. Вывод уравнений для $w(\lambda|t_1, \dots, t_m)$ осуществим, используя известную методику [8]: сначала рассмотрим дискретные наблюдения через равные достаточно малые промежутки времени Δt , а затем совершим предельный переход при стремлении Δt к нулю. Пусть время меняется дискретно с шагом Δt : $t=k\Delta t$, $k=0, 1, \dots$. Введем двумерный процесс $(\lambda^{(k)}, r_k)$, где $\lambda^{(k)}=\lambda(k\Delta t)$ — значение процесса $\lambda(t)$ в момент времени $k\Delta t$ ($\lambda^{(k)}=\lambda_i$, $i=1, 2$, $\lambda_1=\lambda$, $\lambda_2=0$); $r_k=r_k(\Delta t)=r(k\Delta t)-r[(k-1)\Delta t]$ — число событий, наблюдаемых на временном интервале $((k-1)\Delta t, k\Delta t)$ длины Δt , $r_k=0, 1, \dots$; $r(k\Delta t)$ — число событий, наблюдаемых за время $k\Delta t$, $r(k\Delta t)=0, 1, \dots$. Обозначим $\lambda^{(m)}=(\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(m)})$ — последовательность неизвестных (ненаблюдаемых) значений процесса $\lambda(k\Delta t)$ в моменты $k\Delta t$, $k=0, \dots, m$; $\mathbf{r}_m=(r_0, r_1, \dots, r_m)$ — последовательность наблюдаемых событий за время от 0 до $m\Delta t$ на интервалах $((k-1)\Delta t, k\Delta t)$ длины Δt , $k=0, \dots, m$ (значение r_0 можно задавать произвольно, например $r_0=0$, так как промежуток $(-\Delta t, 0)$ находится за пределами интервала наблюдения $(0, m\Delta t)$).

Из исходных предпосылок и конструкции процесса $(\lambda^{(k)}, r_k)$ следует, что он является марковским. Отметим также, что потоки второго и третьего типов являются рекуррентными [10], а потоки первого и четвертого — коррелированными [4, 13]. Для асинхронного потока с двумя состояниями в [12] получена рекуррентная формула для апостериорной вероятности:

$$w(\lambda^{(m+1)}|\mathbf{r}_{m+1}) = \frac{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)}|\mathbf{r}_{m+1})p(\lambda^{(m+1)}|\lambda^{(m)})p(r_{m+1}|\lambda^{(m)})}{\sum_{\lambda^{(m)}=\lambda_1}^{\lambda_2} \sum_{\lambda^{(m+1)}=\lambda_1}^{\lambda_2} w(\lambda^{(m)}|\mathbf{r}_{m+1})p(\lambda^{(m+1)}|\lambda^{(m)})p(r_{m+1}|\lambda^{(m)})}. \quad (1)$$

Совершим предельный переход при $\Delta t \rightarrow 0$ в (5). Имеем

$$w(\lambda^{(m+1)}|\mathbf{r}_{m+1}) = w(\lambda^{(m+1)}|\mathbf{r}_{m+1}(t+\Delta t)) = w(\lambda^{(m+1)}|t+\Delta t),$$

$$w(\lambda^{(m)}|\mathbf{r}_m) = w(\lambda^{(m)}|\mathbf{r}_m(t)) = w(\lambda^{(m)}|t).$$

Отметим, что на интервале $(t, t+\Delta t)$ длины Δt в силу ординарности потока событий может произойти либо ноль событий, либо одно событие (осуществление двух и более событий имеет вероятность $o(\Delta t)$).

Рассмотрим полуинтервал $[t_i, t_{i+1})$ длительности $\tau < T$ между соседними наблюдаемыми событиями. Рассматриваемый полуинтервал состоит из двух полуинтервалов: $[t_i, t_i + T)$ — полуинтервал, началом которого является момент наступления события в наблюдаемом потоке, на протяжении которого имеет место мертвое время, и события потока недоступны наблюдению; $[t_i + T, t_{i+1})$ — полуинтервал, началом которого является момент окончания периода мертвого времени, на протяжении которого событий потока не произошло, а в момент $t = t_{i+1}$ наблюдалось событие потока. Вид апостериорных вероятностей состояний для этих двух полуинтервалов будет различаться.

Построим апостериорную вероятность $w(\lambda|t)$ для $t \in [t_i, t_i + T)$. Так как события на данном полуинтервале не наблюдаются, и поток $\lambda(t)$ — поток типа Пальма, апостериорная вероятность $w(\lambda|t)$ зависит только от апостериорной вероятности $w(\lambda|t_i)$ в момент наступления события и параметров управляющей цепи Маркова α_1, α_2 . Составив и решив систему дифференциальных уравнений для апостериорных вероятностей состояний, получили

$$w(\lambda|t) = \pi_1 + (w(\lambda|t_i) - \pi_1)e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)(t - t_i)}, \quad t \in (t_i, t_i + T), \quad (2)$$

где $\pi_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$, $\pi_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}$.

Апостериорная вероятность первого состояния процесса в момент наступления наблюдаемого события для потоков 1-го и 2-го типов есть $w(\lambda|t_i) = 1$,

для потока 3-го типа $w(\lambda|t_i) = \frac{\lambda}{\lambda + \alpha_1}$ [10]. Таким образом, для потоков 1-го и

2-го типов имеем

$$w(\lambda|t) = \pi_1 + \pi_2 e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)(t - t_i)}, \quad t \in [t_i, t_i + T), \quad (3)$$

для потока 3-го типа

$$w(\lambda|t) = \pi_1 + \pi_2 \frac{\lambda - \alpha_2}{\lambda + \alpha_1} e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)(t - t_i)}, \quad t \in [t_i, t_i + T). \quad (4)$$

Поскольку поток 4-го типа является коррелированным, и события происходят как в первом, так и во втором состояниях процесса $\lambda(t)$, вероятность $w(\lambda|t_i)$ для него зависит от вероятности $w(\lambda|t_i - 0)$ и будет получена позже. Заметим, что функция (3) является монотонно убывающей по t , а (4) — монотонной при $t > t_i$. Причем (4) монотонно возрастает при $\lambda < \alpha_2$ и монотонно убывает при $\lambda > \alpha_2$.

Рассмотрим теперь полуинтервал $[t_i + T, t_{i+1})$. Апостериорная вероятность $w(\lambda|t_i + T)$ при этом определена выражениями (2), (3), (4).

Положим $t \in [t_i + T, t_{i+1})$ и воспользуемся формулой (1). Рассмотрим вариант, когда на интервале $(t, t + \Delta t)$ нет событий потока.

Вычислим вероятности $p(\lambda^{(m+1)} | \lambda^{(m)})$ в (1). Для всех четырех типов потоков эти вероятности будут одинаковы, так как зависят не от схемы наступления событий потока, а только от параметров случайного процесса $\lambda(t)$. Имеем $p(\lambda|\lambda) = e^{-\alpha_1 \Delta t} = 1 - \alpha_1 \Delta t + o(\Delta t)$ — вероятность того, что процесс $\lambda(t)$ в момент t находился в 1-ом состоянии и за время Δt не перешел во 2-ое; $p(\lambda|0) = 1 - e^{-\alpha_2 \Delta t} = \alpha_2 \Delta t + o(\Delta t)$ — вероятность того, что процесс $\lambda(t)$ в момент t находился во 2-ом состоянии и за время Δt перешел в 1-ое;

$p(0|\lambda)=1-e^{-\alpha_1\Delta t}=\alpha_1\Delta t+o(\Delta t)$ — вероятность того, что процесс $\lambda(t)$ в момент t находился в 1-ом состоянии и за время Δt перешел во 2-ое; $p(0|0)=e^{-\alpha_2\Delta t}=1-\alpha_2\Delta t+o(\Delta t)$ — вероятность того, что процесс $\lambda(t)$ в момент t находился во 2-ом состоянии и за время Δt не перешел в 1-ое.

Для вероятностей $p(r_{m+1}|\lambda^{(m)})$ для потока 1-го типа в (1), при $r_{m+1}=0$, имеем $p(r_{m+1}=0|\lambda)=e^{-\lambda\Delta t}=1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)$ — вероятность того, что за время $(t, t+\Delta t)$ новое событие не наступило, при условии, что процесс $\lambda(t)$ в момент t находился в первом состоянии; $p(r_{m+1}=0|0)=1$ — вероятность того, что за время $(t, t+\Delta t)$ новое событие не наступило, при условии, что процесс $\lambda(t)$ в момент t находился во втором состоянии. Подставляя полученные вероятности в (1), выполняя необходимые преобразования и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dw(\lambda|t)}{dt} = \lambda(w(\lambda|t))^2 - (\lambda + \alpha_1 + \alpha_2)w(\lambda|t) + \alpha_2. \quad (5)$$

Для уравнения (5) из (3) при $t=t_i+T$ получаем начальные условия $w(\lambda|t_i+T)=\pi_1+\pi_2\exp\{-(\alpha_1+\alpha_2)T\}$. Решая (5) с этими начальными условиями, имеем для потока первого типа

$$w(\lambda|t) = b_2 + \frac{d}{\lambda} \cdot \frac{\pi_1 + \pi_2 e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T} - b_2}{\pi_1 + \pi_2 e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T} - b_2 - (\pi_1 + \pi_2 e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T} - b_1) e^{d(t-(t_i+T))}}, \quad (6)$$

где $b_{1,2} = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \lambda) \pm d}{2\lambda}$, $d = \sqrt{(\alpha_1 + \alpha_2 + \lambda)^2 - 4\alpha_2\lambda}$, $t \in [t_i+T, t_{i+1})$.

Заметим, что функция (6) является убывающей для всех $t > t_i+T$, и асимптотически сверху стремится к b_2 .

Вычисляя вероятности в (1) для потока 2-го типа и выполняя над (1) преобразования, аналогичные преобразованиям для потока 1-го типа, имеем

$$\frac{dw(\lambda|t)}{dt} = -(\lambda - \alpha_2)w(\lambda|t) \left[\frac{\lambda + \alpha_1 - \alpha_2}{\lambda - \alpha_2} - w(\lambda|t) \right]. \quad (7)$$

Начальные условия (7) аналогичны таковым для потока первого типа и вытекают из (3). Решая дифференциальное уравнение (7) с начальными условиями для $t=t_i+T$, получим в случае $\lambda > \alpha_2$ и в случае $\alpha_2 - \alpha_1 < \lambda < \alpha_2$

$$w(\lambda|t) = \frac{(\lambda + \alpha_1 - \alpha_2)w(\lambda|t_i+T)e^{-(\lambda+\alpha_1-\alpha_2)(t-(t_i+T))}}{(\lambda + \alpha_1 - \alpha_2) - (\lambda - \alpha_2)w(\lambda|t_i+T)[1 - e^{-(\lambda+\alpha_1-\alpha_2)(t-(t_i+T))}]}, \quad (8)$$

где $w(\lambda|t_i+T)=\pi_1+\pi_2\exp\{-(\alpha_1+\alpha_2)T\}$, $t \in [T, t_{i+1})$, $i=1, 2, \dots$

Заметим, что в случаях $\lambda > \alpha_2$ и $\alpha_2 - \alpha_1 < \lambda < \alpha_2$, $w'(\lambda|t) < 0$, и $w(\lambda|t)$ есть убывающая функция переменной t , причем при $\lambda > \alpha_2$ $\lim_{t \rightarrow \infty} w(\lambda|t) = 0$, а при $\alpha_2 -$

$\alpha_1 < \lambda < \alpha_2$, $\lim_{t \rightarrow \infty} w(\lambda|t) = \frac{\lambda + \alpha_1 - \alpha_2}{\lambda - \alpha_2}$. Для прочих случаев соотношения параметров

для потока второго типа решение уравнения (7) также не представляет сложности, поэтому здесь не приводится. Отметим только, что $w(\lambda|t)$ для любых значений параметров потока второго типа монотонны и имеют горизонтальные асимптоты при $t \rightarrow \infty$.

Рассмотрим поток 3-го типа. Вычисляя вероятности в (1) и выполняя необходимые преобразования, приходим к дифференциальному уравнению для апостериорной вероятности первого состояния

$$\frac{dw(\lambda|t)}{dt} = (\lambda + \alpha_1) [1 - w(\lambda|t_i + T)] \left[\frac{\alpha_2}{\lambda + \alpha_1} - w(\lambda|t_i + T) \right]. \quad (9)$$

Начальные условия уравнения (9) получаются из (4) путем замены в них $t-t_i$ на T . Решением (9) для случая $\lambda + \alpha_1 > \alpha_2$ будет

$$w(\lambda|t) = \frac{\frac{\alpha_2}{\lambda + \alpha_1} [1 - w(\lambda|t_i + T)] - \left[\frac{\alpha_2}{\lambda + \alpha_1} - w(\lambda|t_i + T) \right] e^{-(\lambda + \alpha_1 - \alpha_2)(t - (t_i + T))}}{1 - w(\lambda|t_i + T) - \left[\frac{\alpha_2}{\lambda + \alpha_1} - w(\lambda|t_i + T) \right] e^{-(\lambda + \alpha_1 - \alpha_2)(t - (t_i + T))}},$$

$$w(\lambda|t_i + T) = \pi_1 + \pi_2 \frac{\lambda - \alpha_2}{\lambda + \alpha_1} e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)T}, \quad t \in [t_i + T, t_{i+1}). \quad (10)$$

Заметим, что (10) в случае $\lambda + \alpha_1 > \alpha_2$ есть монотонная (возрастающая или убывающая в зависимости от соотношения параметров $\lambda, \alpha_1, \alpha_2$) функция, и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w(\lambda|t) = \frac{\alpha_2}{\lambda + \alpha_1}.$$

Наконец, рассмотрим поток 4-го типа. В случае отсутствия событий на интервале $(t, t + \Delta t)$ из (1) получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dw(\lambda|t)}{dt} = (\lambda + \alpha_1 - \alpha_2) w(\lambda|t_i + T) [w(\lambda|t_i + T) - 1]. \quad (11)$$

Начальное условие уравнения (11) есть $w(\lambda|t_i + T) = \pi_1 + (w(\lambda|t_i) - \pi_1) e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)T}$ и получено из (2) заменой t на $t_i + T$. Решая (11) с данным начальным условием, получим

$$w(\lambda|t) = \frac{\pi_1 + (w(\lambda|t_i) - \pi_1) e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)T}}{1 + (\pi_2 - (w(\lambda|t_i) - \pi_1) e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)T}) (e^{(\lambda + \alpha_1 - \alpha_2)(t - (t_i + T))} - 1)}, \quad (12)$$

$$t \in [T, t_{i+1}).$$

Определим выражение для вероятности $w(\lambda|t_i)$ для потока 4-го типа. Для этого рассмотрим вариант, когда на интервале $(t, t + \Delta t)$ наступило событие потока в момент t_i ($t < t_i < t + \Delta t$). Тогда имеем два смежных интервала (t, t_i) , $(t_i, t + \Delta t)$. Длительность первого: $t_i - t = \Delta t'$, длительность второго: $t + \Delta t - t_i = \Delta t''$. Положим в (1) $\lambda^{(m+1)} = \lambda$. Тогда учитывая, что $w(\lambda^{(m)}|t) = w(\lambda^{(m)}|t_i - \Delta t')$ и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$ ($\Delta t'$ и $\Delta t''$ одновременно стремятся к нулю), получаем

$$w(\lambda|t_i) = \frac{\alpha_2 + (\lambda - \alpha_2) w(\lambda|t_i - 0)}{\alpha_2 + (\lambda + \alpha_1 - \alpha_2) w(\lambda|t_i - 0)}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (13)$$

Таким образом, в точке t_i (момент наблюдения события) апостериорная вероятность $w(\lambda|t)$ претерпевает разрыв (имеет место конечный скачок).

В качестве начального значения $w(\lambda|t_1)$ для момента наступления первого события t_1 можно выбрать $\tilde{\pi}_1(T) = \frac{\lambda/\alpha_1 + \pi_2 + \pi_1 e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}}{\lambda/\alpha_1 + 1 + e^{-(\alpha_1+\alpha_2)T}}$ — апостериорную финальную вероятность первого состояния процесса $\lambda(t)$, полученную в [14].

3. Алгоритм оптимального оценивания состояний потока. Формулы (3), (4), (6), (8), (10) позволяют сформулировать алгоритм расчета апостериорной вероятности $w(\lambda|t)$ в любой момент времени $t \in [t_i, t_{i+1})$ для потока первого (второго, третьего) типов:

1) в момент t_i задается $w(\lambda|t_i)=1$ (для потока 3-го типа $w(\lambda|t_i)=\lambda/(\lambda+\alpha_1)$), где t_i — момент наблюдения i -го события потока ($i=1,2,\dots$);

2) по формуле (3) (для потока 3-го типа — по формуле (4)) рассчитывается $w(\lambda|t)$ в любой момент t ($t_i \leq t < t_i+T$);

3) по формуле (6) (для потока 2-го типа — по формуле (8), для потока 3-го типа — по формуле (10)) рассчитывается $w(\lambda|t)$ для любого t ($t_i+T \leq t < t_{i+1}$), где t_{i+1} — момент наблюдения следующего ($i+1$ -го) события потока.

4) если $w(\lambda|t) \geq 0,5$, то принимаем оценку $\hat{\lambda}(t)=\lambda$, иначе $\hat{\lambda}(t)=0$.

Для потока четвертого типа (коррелированного) алгоритм оценивания включает в себя пересчет апостериорных вероятностей состояний для каждого момента наступления события в наблюдаемом потоке. Формулы (2), (12), (13) позволяют сформулировать алгоритм расчета апостериорной вероятности $w(\lambda|t)$ в любой момент времени t :

1) в момент t_1 задается $w(\lambda|t_1) = \tilde{\pi}_1(T)$, где t_1 — момент наблюдения первого события потока;

2) по формуле (2) рассчитывается $w(\lambda|t)$ в любой момент t ($t_1 \leq t < t_1+T$);

3) по формуле (12) рассчитывается $w(\lambda|t)$ в любой момент t ($t_1+T \leq t < t_2$), затем по формуле (13) с использованием вероятности $w(\lambda|t_1-0)$ производится пересчет апостериорной вероятности в точке $t=t_2$, при этом $w(\lambda|t_2+0)$ является начальным значением для $w(\lambda|t)$ на следующем шаге алгоритма;

4) по формуле (2) рассчитывается $w(\lambda|t)$ для любого t ($t_2 \leq t < t_2+T$), где t_2 — момент наблюдения второго события потока и т.д.

5) если $w(\lambda|t) \geq 0,5$, то принимаем оценку $\hat{\lambda}(t)=\lambda$, иначе $\hat{\lambda}(t)=0$.

4. Численные результаты (вариант 1). Для получения численных результатов реализован в виде программы алгоритм вычисления апостериорной вероятности $w(\lambda|t)$ для потока первого типа (без лишних событий) по формулам (3), (6). Первый этап расчета предполагает имитационное моделирование потока событий. Описание алгоритма имитационного моделирования не приводится, так как принципиальных трудностей алгоритм не содержит. Второй этап расчета — непосредственное вычисление $w(\lambda|t)$ по формулам (3), (6) и определение оценки $\hat{\lambda}(t)$. Расчеты произведены для следующих значений параметров: $\lambda=0,2$, $\alpha_1=0,125$, $\alpha_2=0,075$, $T=2$ и времени моделирования 35 ед.вр. В качестве иллюстрации на рис. 2 приведена траектория апостериорной вероятности $w(\lambda|t)$.

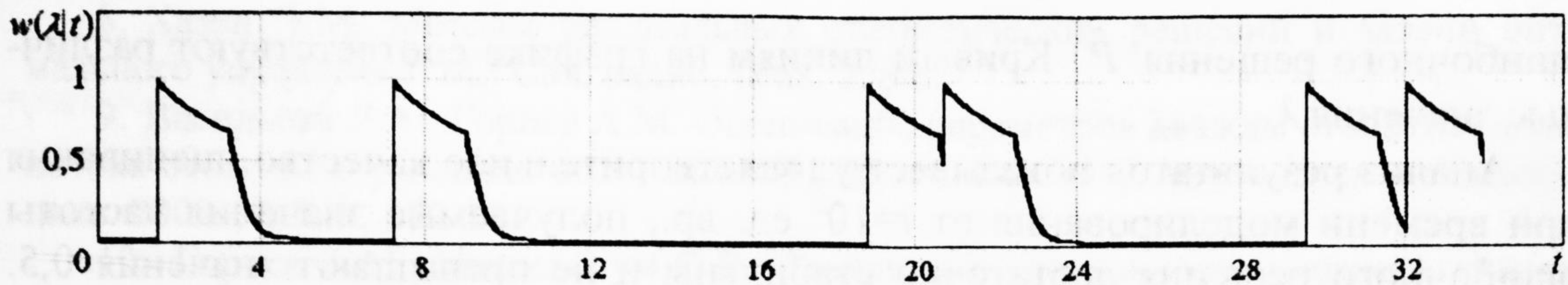


Рис. 2. Траектория апостериорной вероятности $w(\lambda|t)$

На рис. 3 приведена траектория (низ рисунка) процесса $\lambda(t)$, полученная путем имитационного моделирования, и траектория (верх рисунка) оценки $\hat{\lambda}(t)$, соответствующие траектории вероятности $w(\lambda|t)$. На рис.3 штриховкой обозначены области ошибочных решений. Аналогичные результаты получены для потоков второго, третьего и четвертого типов.

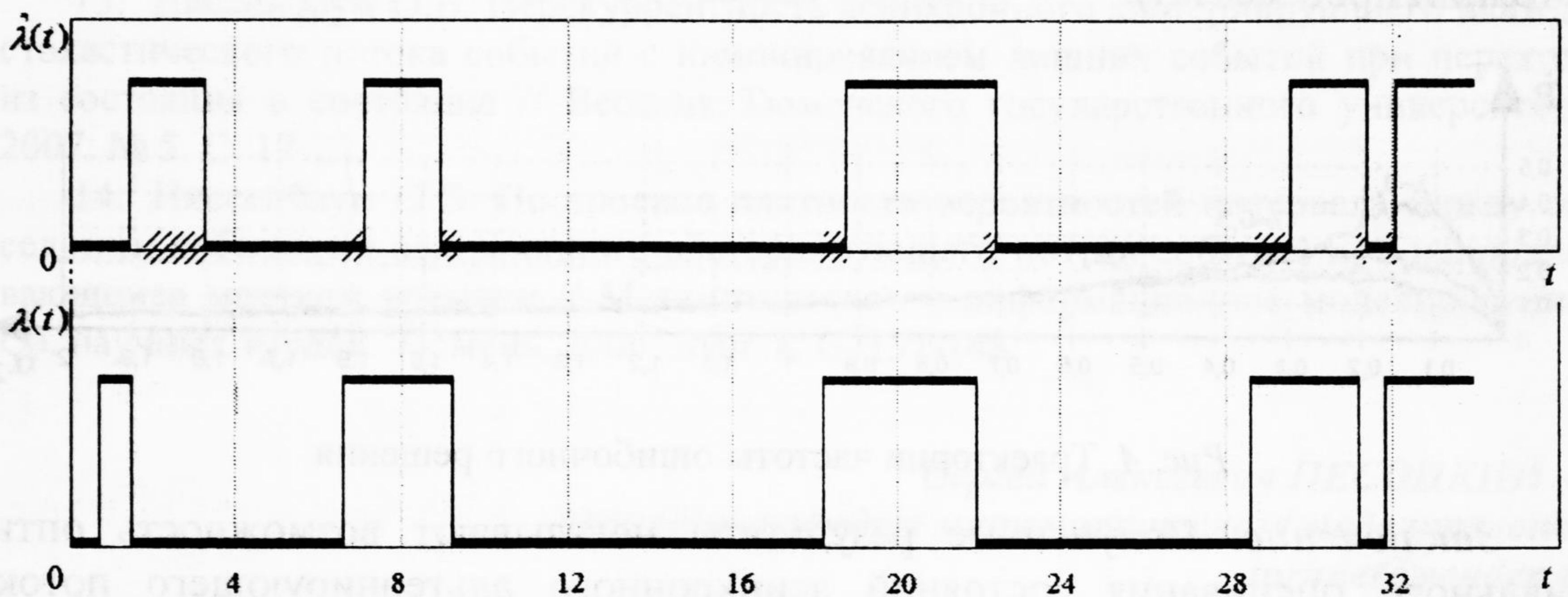


Рис. 3. Траектории процесса $\lambda(t)$ и оценки $\hat{\lambda}(t)$

Отметим, что полученный алгоритм оценки состояний обеспечивает минимум вероятности ошибочного решения при условии, что решение в момент t выносится на основании моментов наступления событий до момента t . Таким свойством алгоритм обладает благодаря принципу максимума апостериорной вероятности, с использованием которого он построен [8]. В этом смысле оценка состояния, получаемая в этом алгоритме, является оптимальной.

С целью определения частоты ошибочных решений проведен статистический эксперимент. Для длительности времени моделирования потока $t=10^5$ единиц времени при различных значениях параметров имитировалась реализация потока. Для каждой реализации на интервале $(0, t)$ рассчитывались апостериорные вероятности $w(\lambda|t)$, $w(0|t)$ и по критерию максимума апостериорной вероятности выносилось решение о том или ином состоянии процесса $\lambda(t)$. После этого проводилось сравнение полученного решения с истинным состоянием процесса $\lambda(t)$ в момент t , известным из результата имитационного моделирования. Затем подсчитывалась частота ошибочных решений по каждой реализации: $\hat{P} = (t_{12} + t_{21}) / t$, где t_{ij} — суммарная продолжительность отрезков времени в эксперименте, на которых имеет место $\lambda(t) = \lambda_i$ и $\hat{\lambda}(t) = \lambda_j$, $i, j = 1, 2$. В качестве иллюстрации результаты статистического эксперимента для потока первого типа приведены на рис. 4 для следующих значений параметров: $\lambda = 0, 1; 0, 5; 1; \alpha_1 = 0, 3; T = 2; \alpha_2$ изменяется от 0,01 до 2 с шагом 0,01. По оси абсцисс отложены значения параметра α_2 , по оси ординат — частота

ошибочного решения \hat{P} . Кривым линиям на графике соответствуют различные значения λ .

Анализ результатов показывает удовлетворительное качество оценивания при времени моделирования от $t=10^2$ ед. вр., получаемые значения частоты ошибочного решения достаточно стабильны и не превышают значения 0,5. Качество оценивания повышается (частота \hat{P} уменьшается) при уменьшении длительности мертвого времени T , что естественно, так как при уменьшении T больше событий становятся доступными наблюдению, а значит, увеличивается количество информации о потоке. Частота \hat{P} уменьшается при увеличении λ , что также естественно, так как состояния потока становятся лучше различимы. Сами значения \hat{P} являются приемлемыми при оценивании состояний процесса $\lambda(t)$.

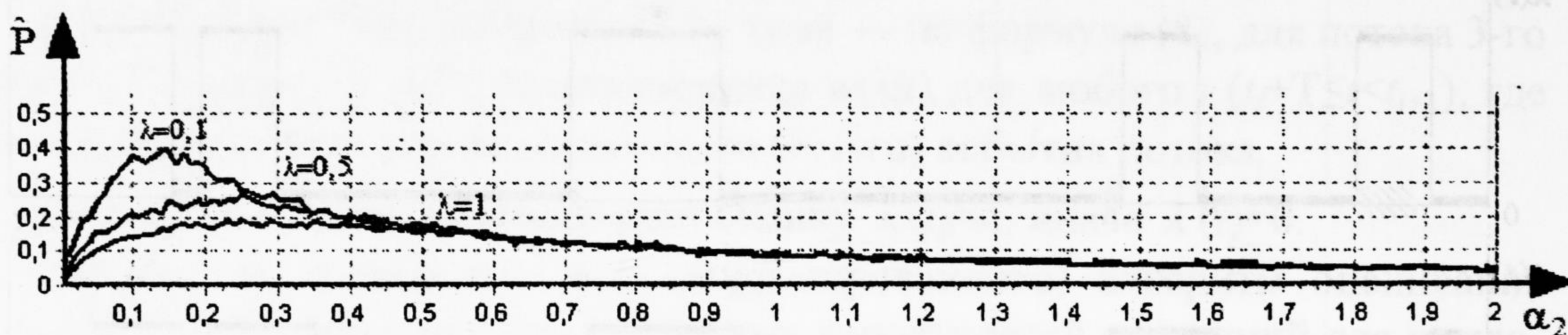


Рис. 4. Траектории частоты ошибочного решения

Заключение. Полученные результаты показывают возможность оптимального оценивания состояний асинхронного альтернирующего потока с инициированием лишних событий и непродлевающимся мертвым временем по результатам текущих наблюдений за моментами наступления событий.

Частота ошибки принятия решения для алгоритма оптимальной оценки состояний \hat{P} , полученная в численном эксперименте, показывает достаточно высокое качество оценивания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1979. № 6. С. 92-99.
2. Башарин Г.П., Кокотушкин В.А., Наумов В.А. О методе эквивалентных замен расчета фрагментов сетей связи // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1980. № 1. С. 55-61.
3. Neuts, M.F. A versatile Markov point process // J. of Applied Probability. 1979. Vol. 16. P. 764-779.
4. Васильева Л.А., Горцев А.М. Оценивание длительности мертвого времени асинхронного дважды стохастического потока событий в условиях его неполной наблюдаемости // Автоматика и телемеханика. 2003. № 12. С. 69-79.
5. Головкин Н.И., Каретник В.О., Танин В.Е., Сафонюк И.И. Исследование моделей систем массового обслуживания в информационных сетях // Сибирский журнал индустриальной математики. 2008. Т. XI. №2(34). С. 50-58.
6. Беккерман Е.Н., Катаев С.Г., Катаева С.С., Кузнецов Д.Ю. Аппроксимация МС-потокком реального потока событий // Вестник Томского государственного университета. 2005. № 14. С. 248-253.
7. Ниссенбаум О.В., Пахомов И.Б. Аппроксимация сетевого трафика моделью альтернирующего потока событий // Прикладная дискретная математика. 2009. Прил. № 1. С. 78-79.

8. Хазен Э.М. Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления. М.: Сов. радио, 1968. 256 с.

9. Васильева Л.А., Горцев А.М. Оценивание параметров дважды стохастического потока событий в условиях его неполной наблюдаемости // Автоматика и телемеханика. 2002. № 3. С. 179-184.

10. Горцев А.М., Ниссенбаум О.В. Оценивание длительности мертвого времени и параметров асинхронного альтернирующего потока событий при непродлеваемом мертвом времени // Известия вузов. Физика. 2005. № 10. С. 35-49.

11. Горцев А.М., Ниссенбаум О.В. Оценивание длительности мертвого времени и параметров асинхронного альтернирующего потока событий с иницированием лишнего события // Вестник Томского государственного ун-та. 2004. № 284. С. 137-145.

12. Горцев А.М., Ниссенбаум О.В. Оптимальная оценка состояний асинхронного альтернирующего потока с иницированием лишних событий // Вестник Тюменского государственного университета. 2008. № 6. С. 107-119.

13. Ниссенбаум О.В. Нерекуррентность асинхронного альтернирующего дважды стохастического потока событий с иницированием лишних событий при переходе из состояния в состояние // Вестник Тюменского государственного университета. 2007. № 5. С. 17-22.

14. Ниссенбаум О.В. Построение плотности вероятностей интервала между соседними событиями асинхронного альтернирующего потока событий при непродлеваемом мертвом времени // Математическое и информационное моделирование: Сб. научных трудов. Тюмень, 2006. Вып. 8. С. 137-148.

*Сергей Алексеевич ПЕСОЦКИЙ —
аспирант кафедры математического моделирования
inrunet@yandex.ru*

*Алексей Викторович ТАТОСОВ —
профессор кафедры математического моделирования,
доктор физико-математических наук*

*Институт математики и компьютерных наук
Тюменский государственный университет*

УДК 543.327

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ВЫТЕСНЕНИЯ НЕФТИ НЕ СМЕШИВАЮЩИМСЯ С НЕЙ ГАЗОМ

INVESTIGATION OF OIL DISPLACEMENT BY IMMISCIBLE GAS

АННОТАЦИЯ. Рассмотрена задача о несмешивающемся вытеснении нефти газом в пористой среде при отсутствии в ней подвижной водной фазы. Исследованы особенности процессов фильтрации в системе «нефть-газ», не характерные для классической модели фронтального вытеснения Бакли-Левретта.

SUMMARY. The article reviews a problem of immiscible oil displacement by gas in porous media in the absence of mobile water. Some features of filtration processes of gas-oil systems uncommon for classical Buckley-Leveret fractional flow model are investigated.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА. Многофазная фильтрация, моделирование, численные методы.

KEY WORDS. Multiphase flow in porous media, modelling, numerical methods.

Как показывает многолетний мировой опыт, закачка газа в нефтяной пласт является эффективным методом стимуляции нефтедобычи. В связи с наблюдающимся в отечественной нефтегазовой отрасли ростом доли трудноизвлекаемых запасов, а также необходимостью утилизации попутного газа