Изменение работы внешних сил для всего тела

$$dW = \int_V dA^{(e)} dv = \int_V \sigma^{ij} d\varepsilon_{ij} dv = V \sigma^{ij} d\varepsilon_{ij}.$$

Работа внешних сил для всего тела на рассматриваемом контуре

$$W = \oint V\sigma^{ij} d\varepsilon_{ij} = V\oint\left(\sigma^{11}d\varepsilon_{11} + 2\sigma^{12}d\varepsilon_{12}\right) =$$

$$= V\int_0^{2\pi}\left(-\left(A\varepsilon_0 \cos\varphi + 2\mu_0\varepsilon_0 \sin\varphi\right)\varepsilon_0 \sin\varphi d\varphi +\right.$$

$$\left.+2\left(-\mu_0\varepsilon_0 \cos\varphi + C\varepsilon_0 \sin\varphi\right)\varepsilon_0 \cos\varphi d\varphi\right) = -4\pi V\mu_0\varepsilon_0^{\,2}$$

Как видим, в классической теории ($\mu_0 = 0$) работа внешних сил по замкнутому контуру равна нулю, а в асимметричной теории не равна нулю и может быть как положительной, так и отрицательной в зависимости от направления обхода контура и от знака $\mu_0$. Это указывает на то, что закон сохранения энергии не выполняется.

Невыполнение закона сохранения энергии в асимметричной теории упругости вызывает недоверие к результатам, полученным на ее основе, и указывает на необходимость тщательной экспериментальной проверки теории.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бытев В.О., Слезко И.В., Николаев Д.Е. // Точные решения некоторых задач плоской асимметричной теории упругости // Вестник ТюмГУ. 2007. № 5. С. 32-43.
2. Бытев В.О., Наук О.Е. // Асимметричная упругость. Математическое и информационное моделирование: Сб. научных тр. Вып. 9. Тюмень: Изд-воТюмГУ, 2007. С. 23-30.
3. Пальмов Н.А. // Фундаментальные уравнения теории асимметричной упругости // ПММ. № 28. 1964.
4. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
5. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1976. 535 с.

***Александр Владимирович СТРЕКАЛОВ —***
***доцент кафедры разработки и эксплуатации нефтяных месторождений***
***Тюменского государственного нефтегазового университета***
***кандидат технических наук***
***darlex77@mail.ru***

**УДК 622.323**

# *МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПОТОКОРАСПРЕДЕЛЕНИЯ В СЕТЕВЫХ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ*

# *METHOD OF THE NUMERICAL SOLUTION OF LOAD FLOW IN HYDRAULIC SYSTEMS NETWORK*

*АННОТАЦИЯ. Статья посвящена проблемам адаптации метода численного решения систем нелинейных алгебраических уравнений для решения задачи потокораспределения произвольных по сложности гидравлических систем.*

*SUMMARY. The article is devoted to adaptation problems of a numerical solution method of nonlinear algebraic equations systems for the problem solution of load flow in hydraulic systems of any complexity.*

*КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА. Гидравлические сети, нелинейные уравнения.*
*KEY WORDS. Hydraulic networks, nonlinear.*

Задача потокораспределения[1] сводится к нахождению неизвестных объемных или массовых расходов, а также давлений во всех элементах гидравлической системы. В зависимости от математической формализации потокораспределение описывается нелинейной системой алгебраических уравнений (СНАУ) относительно величин расходов в звеньях (ветвях) или давлений в транзитивных узлах [2]. Наиболее простым с точки зрения подготовки основной матрицы является метод «узловой увязки давлений», так как в нем не требуется предварительный анализ структуры сети и выявления матрицы, отражающей систему *с* линейно-независимых путей. Для данного метода формализация СНАУ относительно давлений в узлах выглядит следующим образом

$$\begin{cases} F_1(p_1, p_2, .., p_j, p_m) = 0 \\ \vdots \\ F_j(p_1, p_2, .., p_j, p_m) = 0, \\ \vdots \\ F_t(p_1, p_2, .., p_j, p_m) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

где $F_j\left(p_1, p_2, .., p_j, .., p_m\right)$ — функции зависимости суммы массовых или объемных расходов потоков, сходящихся в транзитивном узле $j$ от давлений в смежных с ним узлах, рассчитываемые суммированием расходов потоков жидкости, сходящихся в каждом узле $j$; $p_1$, $p_2$, …, $p_j$ — элементы вектора $\overline{P}$ размерностью $m$ неизвестных давлений в транзитивных узлах.

Основной сложностью при решении системы (1) является адаптация метода численного решения, который бы надежно сходился к решению при нулевом или определенном для всех систем приближении. Типовой метод Ньютона для решения СНАУ и его известные модификации не удовлетворяют надежности сходимости при решении (1): при включении в структуру кустовых насосных станций с множеством петель и зацикленных участков; при точном описании гидравлических характеристик насосных агрегатов с учетом аварийных режимов работы; при участии в структуре сети многопластовых скважин; при наличии самодействующей запорной арматуры и т.д.

Здесь рассматривается модификация метода Ньютона для СНАУ, которая подразумевает надежную сходимость решения системы (1) при нулевом начальном приближении. Предполагается единственность решения или нахождение ближайшего решения, удовлетворяющего точности.

Методом Ньютона итерационный процесс решения (1) строится посредством линеаризации функций $F_j$ из (1) на каждом шаге для текущего приближения давлений транзитивных узлов. На каждом шаге строится матрица Якобиан (частных производных) которая в системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) умножается на вектор неизвестных приращений $\overline{\Delta p}^{(I)}$ и приравнивается вектору текущих значений функций $F_j$. Ниже приводится СЛАУ относительно приращения $\overline{\Delta p}^{(I+1)}$ для итерации $I$+1.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1(p_1^{(l)},p_2^{(l)},..,p_j^{(l)},p_m^{(l)})}{\partial p_1}\Delta p_1^{(l+1)}+..+\dfrac{\partial F_1(p_1^{(l)},p_2^{(l)},..,p_j^{(l)},p_m^{(l)})}{\partial p_j}\Delta p_j^{(l+1)}+..+ \\ +\dfrac{\partial F_1(p_1^{(l)},p_2^{(l)},..,p_j^{(l)},p_m^{(l)})}{\partial p_t}\Delta p_t^{(l+1)}=F_1(p_1^{(l)},p_2^{(l)},..,p_j^{(l)},p_m^{(l)}) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial F_j(p_1^{(l)},p_2^{(l)},..,p_j^{(l)},p_m^{(l)})}{\partial p_1}\Delta p_1^{(l+1)}+..+\dfrac{\partial F_j(p_1^{(l)},p_2^{(l)},..,p_j^{(l)},p_m^{(l)})}{\partial p_j}\Delta p_j^{(l+1)}+..+ \\ +\dfrac{\partial F_j(p_1^{(l)},p_2^{(l)},..,p_j^{(l)},p_m^{(l)})}{\partial p_t}\Delta p_t^{(l+1)}=F_j(p_1^{(l)},p_2^{(l)},..,p_j^{(l)},p_m^{(l)}) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial F_t(p_1^{(l)},p_2^{(l)},..,p_j^{(l)},p_m^{(l)})}{\partial p_1}\Delta p_1^{(l+1)}+..+\dfrac{\partial F_t(p_1^{(l)},p_2^{(l)},..,p_j^{(l)},p_m^{(l)})}{\partial p_j}\Delta p_j^{(l+1)}+..+ \\ +\dfrac{\partial F_t(p_1^{(l)},p_2^{(l)},..,p_j^{(l)},p_m^{(l)})}{\partial p_t}\Delta p_t^{(l+1)}=F_t(p_1^{(l)},p_2^{(l)},..,p_j^{(l)},p_m^{(l)}) \end{cases} \qquad (2)$$

Таким образом, для последовательных решений (2) начальные значения давлений $p_j^{(0)}$ к первому — $l$=0 приближению должны быть заданы, а предыдущие $p_j^{(l)}$ будут рассчитываться. Величины давлений в активных узлах (границ гидравлической сети) являются константами на всех итерациях

Характер способа нахождения частных производных фактически полностью определяет скорость и качество сходимости метода Ньютона при нулевом начальном приближении. Здесь частные производные лучше находить в конечно-разностном виде, так как в этом случае процессом сходимости можно управлять:

$$\frac{\partial F_j(p_1^{(l)},p_2^{(l)},..,p_j^{(l)},p_m^{(l)})}{\partial p_j}\approx$$

$$\approx\frac{F_j(p_1^{(l)},p_2^{(l)},..,p_j^{(l)}+h_j^{(l)},p_m^{(l)})-F_j(p_1^{(l)},p_2^{(l)},..,p_j^{(l)},p_m^{(l)})}{h_j^{(l)}} \qquad (3)$$

Решив (2), получаем приращения к текущим приближениям неизвестных, а затем их складываем

$$p_j^{(l+1)}=p_j^{(l)}+\Delta p_j^{(l)}. \qquad (4)$$

После переходим к формированию новой СЛАУ — ($l$+1).

Так до тех пор, пока не выполнятся условия точности: абсолютного материального баланса

$$\left|\sum_{i\in j}S_i(\Delta p_i)\right|<absQ,\ j=1,2,...t, \qquad (5)$$

и относительного материального баланса в транзитивных узлах

$$\frac{\left|\sum_{i\in j} S_i(\Delta p_i)\right|}{\sum_{i\in j}\left|S_i(\Delta p_i)\right|} < \varepsilon,\ j = 1,2,\ldots t \tag{6}$$

где $S_i(\Delta p_i)$ — замыкающие отношения (зависимости расхода жидкости по звену $i$ от перепада давления на концах); $absQ$ — величина расхода, принимаемая в качестве допущения, как ноль (абсолютная погрешность); $\varepsilon$ — допустимая относительная погрешность; $\Delta p_i$ — перепады давлений в звеньях смежных с узлом $j$.

Здесь суммирование ведется для каждого узла $j$ по всем звеньям $i$, инцидентных данному узлу.

Здесь также следует отметить, что выбор величины $h_j^{(1)}$ для вычисления частных производных определяет скорость и надежность сходимости.

Вычислять величины $h_j^{(1)}$ на каждой итерации по следующей известной формуле

$$h_j^{(1)} = \left|p_j^{(1)}\right| \cdot \varepsilon \tag{7}$$

в большинстве случаев эффекта не дает.

При всей кажущейся простоте описанного метода решения далеко не всегда можно получить хорошо сходящийся или вообще сходящийся к решению итерационный процесс.

Важным моментом для расчета потокораспределения является описание замыкающих отношений, входящих в ту или иную формы записи системы уравнений потокораспределения.

Теоретический расчет (моделирование) любого объекта (элемента) гидросистемы сводится к определению перепада давления между входом в объект и выходом из него в зависимости от внутренних свойств объекта. Иначе говоря, целью такого расчета является нахождение зависимости между величиной расхода текучей среды сквозь объект $q_i$ и перепадом давления на его концах, зависящим от свойств объекта — $\Delta p_i' = f_i(q_i)$. Перепад давления $\Delta p_i'$, зависящий от внутренних свойств объектов — это та часть общего перепада давления, которая имеет зависимость от расхода. Остальная составляющая — $\Delta z_i$ перепада $\Delta p_i$ не имеет зависимости от расхода, поэтому далее перепад $\Delta p_i'$ будем обозначать просто $\Delta p_i$. Итак, $\Delta p_i$ есть разность между давлением на входе в звено и давлением на выходе из него, то есть знак $\Delta p_i$ строго зависит от ориентации объекта в структуре гидросистемы, его влияния на энергию потока текучей среды и направления течения потока.

К виду функций $f_i(q_i)$ во всех существующих методах численного решения потокораспределения предъявляются достаточно жесткие требование

1. $f_i(0) = 0$.

2. Первая производная: $f_i'(q) \neq 0$ на всей области определения функции.

3. $f_i(-q) = -f_i(q)$, то есть должна быть нечетной.

Такие условия невозможно соблюсти для большинства моделируемых элементов гидросистем: труб (в автомодельной области течения, насосов на всех режимах, скважин, запорной арматуры, штуцеров, зон пласта с квадратичным законом фильтрации и т.п.).

В связи с этим в большинстве существующих моделей это ограничение обходится фиктивным учетом таких объектов: описание насосов фиксированным давлением, скважин постоянным оттоком или притоком текучей среды. Все эти допущения уводят нас от главной цели — адекватной имитации гидросистемы.

Такие принимаемые допущения связаны прежде всего с недостаточной универсальностью математических методов решения систем нелинейных уравнений.

Как уже отмечалось, основным методом решения систем нелинейных алгебраических уравнений является метод Ньютона, который имеет ряд существенных недостатков.

1. Сходимость метода определяется точностью начального приближения, то есть при недостаточно точном (трудно заранее сказать, какой точности будет достаточно) определении начального приближения метод даже «не пытается» сходиться.

2. Линеаризация функций, имеющих экстремумы в районе текущего приближения, приводит к бесконечному итерационному процессу.

3. Для надежной сходимости метода необходим достаточно точный алгоритм выбора шага *h* при численном определении частных производных замыкающих отношений (3).

4. Невозможно получить сходящийся к решению процесс, если существует большой разброс условных проводимостей звеньев.

5. Невозможно получить сходящийся к решению процесс, если в структуре гидросистемы имеются элементы с замыкающими отношениями, функции которых по-разному ведут себя при $q<0$ и $q>0$ (например, обратные клапаны).

6. Несовместимо с решением наличие закрытых задвижек (со сверхбольшим сопротивлением) на выкидной линии насосных агрегатов.

Наиболее распространенные формы замыкающих отношений — гидравлических характеристик элементов гидросистем показаны на рис. 1.


*Рис. 1.* Типовые гидравлические характеристики (замыкающие отношения) элементов гидросистем: *а* — трубопровод; *б* — элемент пласта (ячейка); *в* — обратный клапан; *г* — электроцентробежный насос

Как видно из рис. 1, функции гидравлических характеристик по большей части нелинейны, а например, для трубопроводов $f'(0)=0$. Особенно сложными для решения являются характеристики обратных клапанов (рис. 1в), знак первых производных которых изменяется многократно в районе $q$=0.

При решении (1) необходим поиск функций $F_j\left(p_1, p_2,..., p_j,..., p_t\right)$, сложенных функциями $S_i\left(\Delta p_i\right)$, которые в свою очередь являются решением уравнений $f_i\left(q_i\right)-\Delta p_i=0$ относительно $q_i$ в том или ином виде.

На рис. 3 показан характер функций $F_j\left(p_1, p_2,..., p_j,..., p_t\right)$ при изменении $p_2$ и постоянных остальных давлениях: $p_5=const=0$, $p_4=const=0$, $p_6=const=0$ (рис. 2).

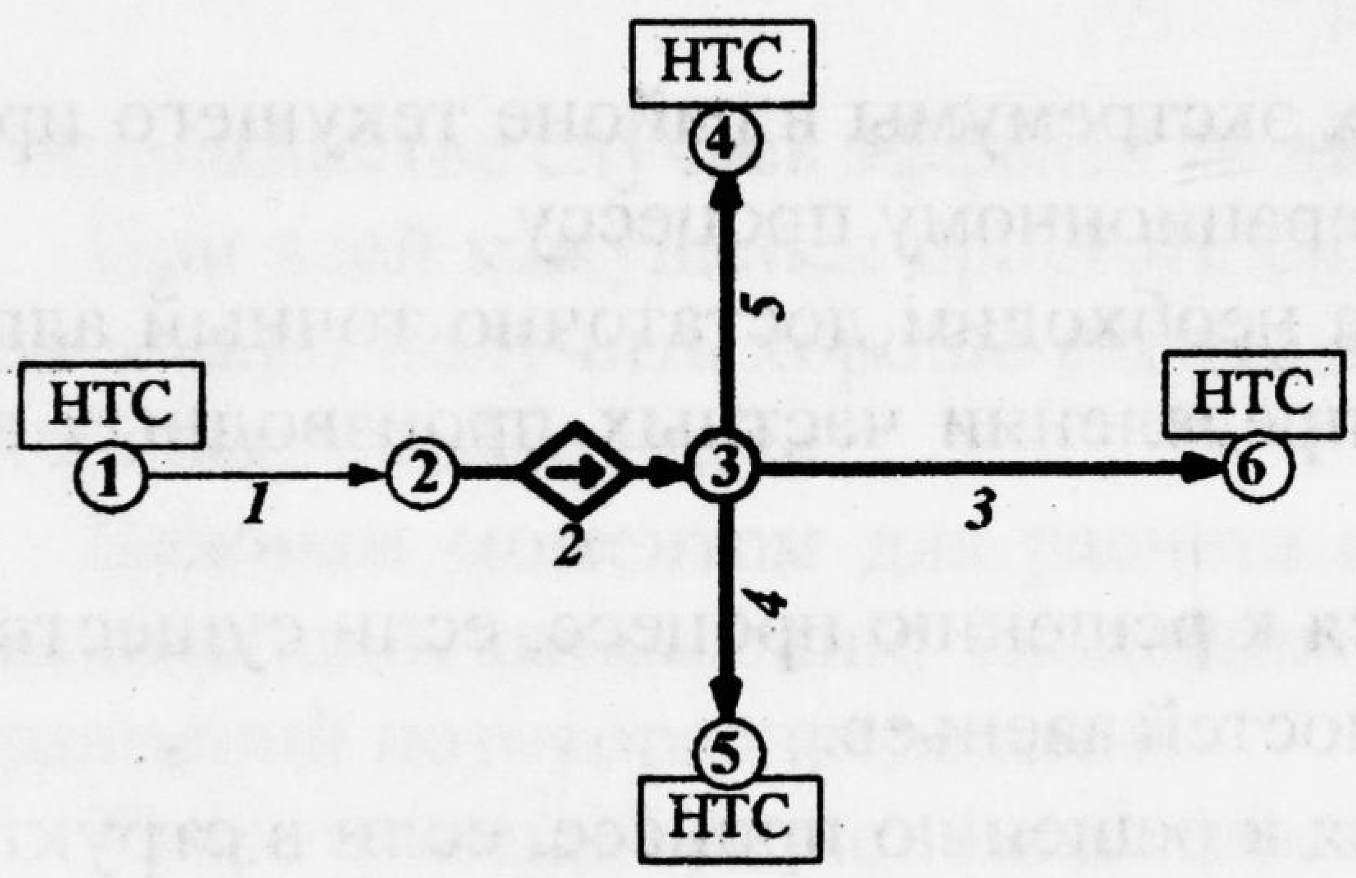


*Рис. 2.* Схема определения функции $F_3(p_3, p_2, P_4, P_5, P_6)$

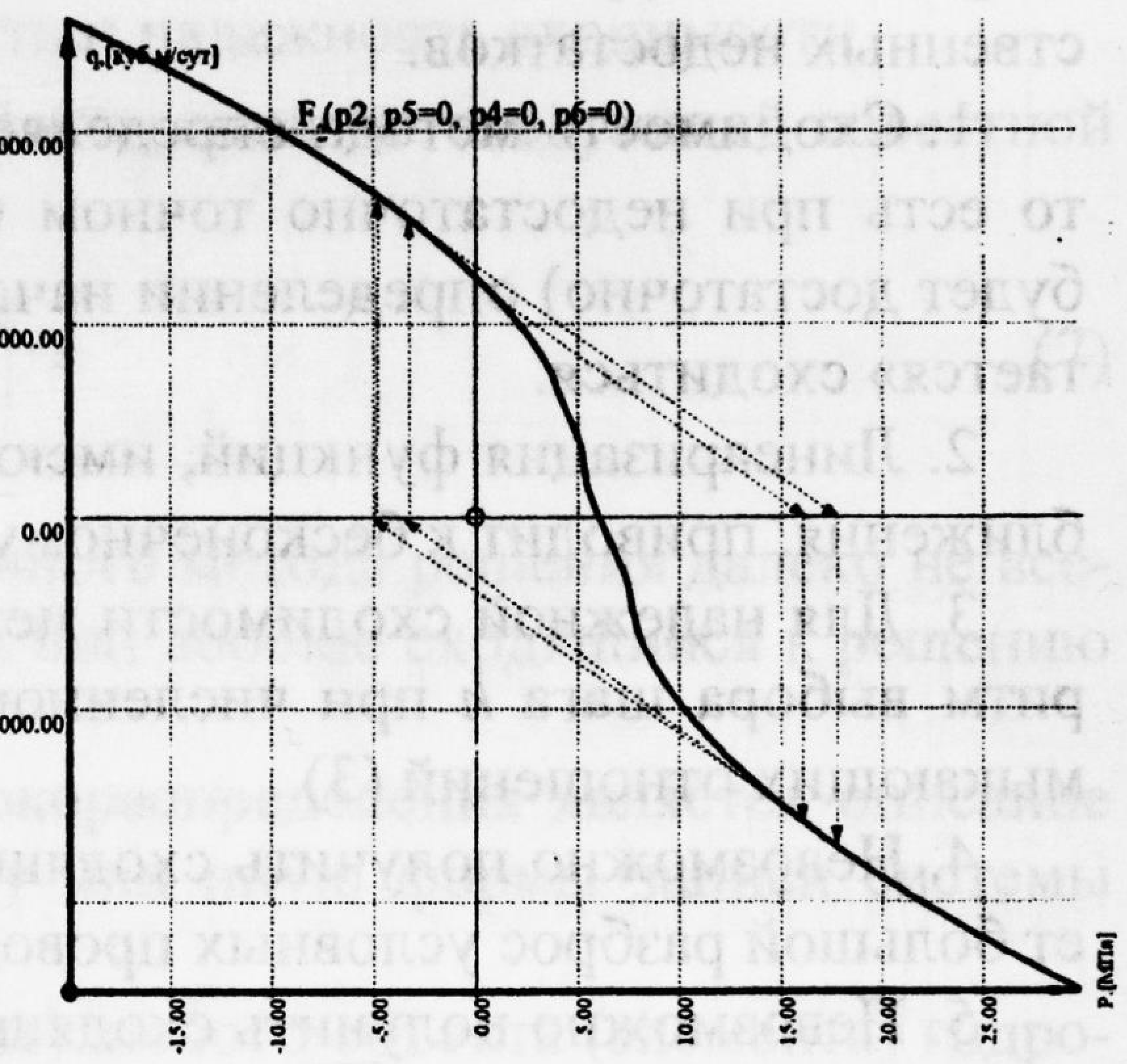


*Рис. 3.* Гидравлическая характеристика узла 2

Данный распространенный вид для функций $F_j(p...)$ вызывает у хорошо известного метода Ньютона «трудности» в сходимости при произвольном начальном приближении величин давлений транзитивных узлов. На рис. 3 также показан пример проблемы сходимости метода Ньютона для подобных функций, при нулевом начальном приближении, из которого видно, что при попадании текущего приближения в зоны кривой с близкими или равными значениями первой производной решение не может быть достигнуто. В дополнение к вышеописанному недостатку метода Ньютона, следует также отметить, что при нахождении частных производных локально, то есть в соответствии с величиной конечного приращения аргумента $h$ или алгебраически (что не всегда возможно), текущее приближение к корню, получаемое на их основе, может оказаться дальше, чем предыдущее.

В работах [2, 3] была предложена модификация метода Ньютона — «адаптивная линеаризация». Суть метода сводится к использованию при расчете вместо частных производных $\dfrac{\partial f_i(q_i^{(I)})}{\partial q_i}$, их конечные выражения вида $\dfrac{f_i(q_i^{(I)}+H^{(I)})-f_i(q_i^{(I)}-H^{(I)})}{2H^{(I)}}$ (хорды с перемещающимися концами), где $H^{(I)}$ — величина, задаваемая для всех неизвестных константой (для теку-

**щей итерации), которая охватывает область определения всех неизвестных в районе текущего приближения каждой.**

**Вместо функций $f_i(q_i)$ на каждой итерации $I$ при формировании и численном решении СНАУ (1), используется их линейное преобразование $f_i^L(q_i^{(I)})$:**

$$f_i^L(q_i^{(I)}) = \frac{f_i(q_i^{(I)} + H^{(I)}) - f_i(q_i^{(I)} - H^{(I)})}{2H^{(I)}} q_i^{(I)} + f_i(0). \qquad (8)$$

**Причем $H^{(I+1)} = H^{(I)} / D$, где $D$ — параметр сходимости (чем он больше, тем меньше скорость сходимости, но больше стабильность). Оптимальными значениями $D$, с точки зрения автора статьи, является $D \in [1.5,\ 3]$.**

**Так как для задачи (1) в любом случае используются функции $f_i(q)$, то они, будучи линеаризованными, используются на следующих этапах вычислений текущей итерации в виде (8).**

**Применение такого рода линеаризации позволяет избежать постоянного решения (на каждой итерации) нелинейных уравнений $f(q) - \Delta p = 0$ для нахождения функций $q = S(\Delta p)$, они будут описываться линейным соотношением**

$$S_i^{(I)}(\Delta p_i) = \frac{\Delta p_i - f_i(0)}{1} \frac{2H^{(I)}}{f_i(q_i^{(I)} + H^{(I)}) - f_i(q_i^{(I)} - H^{(I)})}. \qquad (9)$$

**Особенно важно, что для решения задачи (1) после нахождения нового приближения, необходимо рассчитать соответствующие ему значения расходов $q_i$, для того чтобы провести линеаризацию (8) и (9) к началу следующей итерации.**

**Таким образом, для решения (1) адаптивная линеаризация необходима лишь для основных замыкающих отношений, то есть гидравлических характеристик $f_i(q)$. Начальное приближение данного метода лучше выбрать нулевым, то есть $p_j^{(0)} = 0$.**

**На рис. 4 показан пример решения одного нелинейного уравнения $f(q)=0$ с использованием адаптивной линеаризации с параметром $D=3$.**

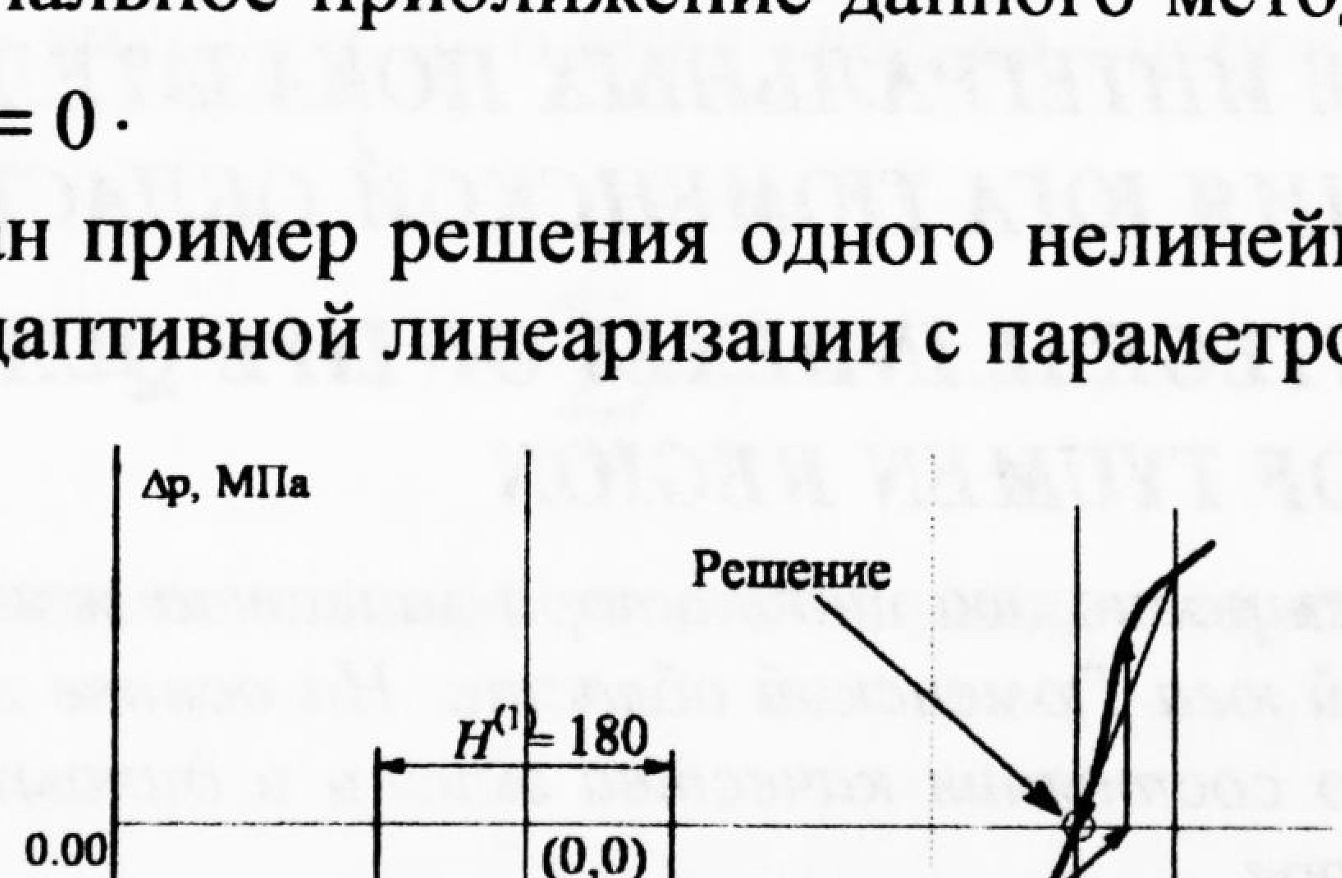


***Рис. 4.* Сходимость метода адаптивной линеаризации для примера решения нелинейного уравнения $f(q)=0$**

Как показал опыт, метод адаптивной линеаризации сочетает в себе высокую скорость сходимости метода Ньютона и высокую надежность сходимости при нулевом первом приближении, аналогично методу деления отрезка пополам («бисекций») с исключением требования к охвату области корня величиной $H^{(l)}$.

Описанный метод решения задачи потокораспределения лег в основу расчетного модуля программного комплекса Hydra'Sym [4].


**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Меренков А.П., Хасилев В.Я. Теория гидравлических цепей. М.: Наука, 1985, 276 с.
2. Стрекалов А.В. Системный анализ и моделирование гидросистем поддержания пластового давления. Тюмень: ИФ «Слово», 2002. 324 с.
3. Стрекалов А.В. Математические модели гидравлических систем для управления системами поддержания пластового давления. Тюмень: ОАО Тюменский дом печати, 2007. 664 с.
4. Стрекалов А.В. Свидетельство № 2002611864 о регистрации программы для ЭВМ «Комплекс универсального моделирования технических гидравлических систем поддержания пластового давления (Hydra'Sym)», 2002.



***Инна Владимировна ГАЙДАМАК —***
***ст. преподаватель кафедры***
***математического анализа и теории функций***

***Алексей Григорьевич ХОХЛОВ —***
***доцент кафедры математического анализа и теории функций,***
***кандидат физико-математических наук***

***gaydamakiv@mail.ru***

***Институт математики и компьютерных наук***
***Тюменский государственный университет***


**УДК 519.2 (075.8)**

## *МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КАЧЕСТВА ЖИЗНИ НАСЕЛЕНИЯ ЮГА ТЮМЕНСКОЙ ОБЛАСТИ*

## *MODELLING OF INTEGRAL INDEXES OF LIFE QUALITY FOR THE SOUTH OF TYUMEN REGION*


*АННОТАЦИЯ. Построено два индикатора качества жизни населения для муниципальных образований юга Тюменской области. На основе полученных данных проведен анализ текущего состояния качества жизни и динамики рассмотренных интегральных индикаторов.*

*SUMMARY. Two indicators of life quality were obtained for municipal formations of the south of Tyumen region. Current state of life quality and the evolution of examined integral indicators were analyzed on the basis of the received data.*



*КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА. Интегральный показатель качества жизни населения, метод модифицированной главной компоненты, инструментальные переменные, межрегиональная динамика, автодинамика.*

*KEY WORDS. Integral index of life quality modified main component method, instrumental variables, interregional dynamics, autodynamics.*


За последние десятилетия увеличился поток публикаций, посвященных количественным оценкам качества жизни населения и построению так называемых интегральных индикаторов (показателей) [1], [2], [3]. Однако лишь