фазы. Высокая температура начала замерзания капель указывает на гетерогенный механизм нуклеации льда в «сухой воде». Замерзание-оттаивание «сухой воды» приводит к укрупнению микрокапель воды дисперсной фазы в результате их коалесценции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Binks, B.P., Murakami, R. // Nature Materials. 2006. V. 5. № 11. P. 865-869.

2. Wang, W.X., Bray, C.L., Adams, D.J., Cooper, A.I. // J. Am. Chem. Soc. 2008. V. 130. № 35. P. 11608-11609.

3. Carter, B.O., Wang, W.X., Bray, C.L., Adams, D.J., Cooper, A.I. // Langmuir. 2010. V. 26. № 5. P. 3186-3193.

4. Gudmundson, J.S., Andersson, V., Levik, O.I., Mork, M. // Annals of the New York Academy of Sciences. 2000. V. 912. P. 403-410.

5. Kanda, H., Uchida, K., Nakamura, K., Suzuki, T. // In: Proceedings of the 5-th International Conference on Gas Hydrates. Trondheim, Norway, June 13-16, 2005. V. 4. P. 1276-1283.

6. Watanabe, S., Takahashi, S. Mizubayashi, H., Murata1, S., Murakami, H. // In: Proceedings of the 6-th International Conference on Gas Hydrates, Vancouver, Canada, July 6-10, 2008.

7. Истомин В.А., Якушев В.С., Махонина Р.А., Квон В.Г., Чувилин Е.М. // Газовая промышленность. 2006. Спецвыпуск. С. 36-46.

8. Дербиш В. Динамика воды в гетерогенных системах: Особенности при температурах ниже 0°C // Вода и водные растворы при температурах ниже 0°C / Под ред. Ф. Франка. Киев, 1985. С. 277-345.

9. Манк В.В., Лебовка Н.И. Спектроскопия ядерного магнитного резонанса воды в гетерогенных системах. Киев: Наукова думка, 1988. С. 204.

10. Provencher, S.W. // Comput. Phys. Commun., 1982. V. 27 P. 229-242.

11. Dunn, K.J., Bergman, D.J., LaTorraca, G.A. Nuclear Magnetic Resonance. Petrophysical and Logging Applications, New York: Pergamon, 2002.

12. Скрипов В.П., Коверда В.П. Спонтанная кристаллизация переохлажденных жидкостей. Зарождение кристаллов в жидкостях и аморфных твердых телах. М.: Наука, 1984. 232 с.

13. Аникин Г.В., Поденко Л.С. // Журнал физической химии. 2008. № 12. С. 2005-2009.

14. Киреева Е.Д., Поповичева О.Б., Персианцева Н.М., Хохлова Т.Д., Шония Н.К. // Коллоидный журнал. 2009. Т. 71. № 3. С. 355-362.

Эдуард Абрамович АРИНШТЕЙН —
профессор кафедры моделирования
физических процессов и систем
Тюменского государственного университета,
доктор физико-математических наук
earin@utmn.ru

УДК 536.2

ПРОМЕРЗАНИЕ ВЛАЖНОГО ГРУНТА

DAMP GROUND FREEZING

АННОТАЦИЯ. Рассмотрено уравнение теплопроводности в среде с теплоемкостью и теплопроводностью, зависящими от температуры, что моделирует размытый фазовый переход.

SUMMARY. The article offers consideration of the equation for heat conductivity in medium where heat capacity and heat conductivity are dependent on temperature, which helps to simulate dim phase transition.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА. Теплопроводность, теплоемкость, локальное время, функция Грина.

KEY WORDS. Heat conductivity, heat capacity, local time, Green function.

Процесс промерзания влажного грунта только в первом приближении сводится к задаче Стефана. Проблема осложняется тем обстоятельством, что связанная и дисперсная влага не имеет определенной точки замерзания, этот процесс охватывает довольно значительный интервал температур. Этот и другие процессы во влажном грунте можно моделировать переменными, зависящими от температуры теплопроводностью и теплоемкостью.

Уравнение теплопроводности имеет вид $c\frac{\partial T}{\partial t_0}-\frac{\partial}{\partial x}\lambda\frac{\partial}{\partial x}T=0$, где λ — теплопроводность и c — теплоемкость, постоянные в однородных средах, но в рассматриваемом случае зависящие от температуры, x — совокупность пространственных координат и t_0 – время в обычных единицах. В случае постоянных λ и c это уравнение приводится к каноническому виду $\frac{\partial T}{\partial t}-\Delta T=0$ заменой $t=\frac{\lambda}{c}t_0$ — выбором специальных единиц измерения времени. В случае параметров, зависящих от температуры, при условии, что пространственные производные теплопроводности $\frac{\partial\lambda}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x}$ и теплоемкости $\frac{dc}{dT}\frac{\partial T}{\partial x}$ малы (это условие рассмотрено ниже), уравнение теплопроводности можно привести к каноническому виду заменой $t=t\left(t_0,x\right)=\int\limits_0^{t_0}\frac{\lambda\left(T\left(x,t_0'\right)\right)dt_0'}{c\left(T\left(x,t_0'\right)\right)}$, что означает введение локального временного масштаба, зависящего и от координат, и от предыдущих значений температуры. Переменную t будем для краткости называть локальным временем. Такую замену необходимо произвести не только в уравнении, но и в граничных условиях $T(\Gamma,t_0)=f(\Gamma,t_0)$: $t\left(x\in\Gamma\right)=t\left(t_0,\Gamma\right)=\int\limits_0^{t_0}\frac{\lambda\left(f\left(t_0'\right)\right)dt_0'}{c\left(f\left(t_0'\right)\right)}$ (локальное время может быть различным в разных точках границы Γ). При известной зависимости $\lambda(T)$, $c(T)$ и $f(\Gamma,t_0)$ получим однозначную связь $t\left(x\in\Gamma\right)=t\left(\Gamma,t_0\right)$, что позволяет представить граничные условия в виде $f\left(\Gamma,t_0\left(t\right)\right)=f\left(\Gamma,t\right)$. Такое представление граничных условий приводит к канонической формулировке задачи. Решение этой задачи зависит не от обычного, а от локального времени.

Используя найденное решение $T\left(x,t\right)$, получим явную зависимость $t_0=\int\limits_0^{t}\frac{c\left(T\left(x,t'\right)\right)}{\lambda\left(T\left(x,t'\right)\right)}dt'$, что определяет параметрическое представление решения. Исключая параметр t (в каждой точке свой), найдем температуру в зависимости от обычного времени (и от координат).

Таким образом, решение задачи состоит из трех этапов: переход к локальному времени в граничных условиях, вычисление температуры в зависимости от локального времени, переход к стандартному времени в решении (в достаточном числе точек, или в характерных точках).

Точность метода, возможность пренебречь членами, включающими $\frac{d\lambda}{dT}\frac{\partial T}{\partial x}$ и $\frac{dc}{dT}\frac{\partial T}{\partial x}$, оценим, исходя из того, что при замене $t_0 \to t$ следует произвести также замену $\frac{\partial T}{\partial x} \to \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}$. Должно выполняться условие $\left|\frac{\partial T}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}\right| << \left|\frac{\partial T}{\partial x}\right|$, при этом $\frac{\partial t}{\partial x} = \int\limits_0^{t_0} \frac{d}{dT}\left(\frac{\lambda\left(T\left(x,t_0'\right)\right)}{c\left(T\left(x,t_0'\right)\right)}\right)\frac{\partial T}{\partial x}dt_0'$. Таким образом, возникают нелинейные члены, содержащие произведение $\frac{\partial T}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial x}$, и члены более высокого порядка при рассмотрении вторых производных. Так как исходное линейное уравнение теплопроводности справедливо при малости нелинейных вкладов, то это оправдывает используемое приближение. Если в результате расчета окажется, что возникающие нелинейные члены недостаточно малы, то их вклад можно учесть методом последовательных приближений, рассматривая уравнения с нелинейными членами, как неоднородные, причем нелинейные члены содержат решение линейной задачи в зависимости от локального времени. Эта процедура достаточно отработана и ее реализация не встречает принципиальных трудностей.

В качестве примера рассмотрим одномерную задачу — промерзание однородного грунта с плоской границей, когда температура зависит от одной (вертикальной) координаты.

Функция Грина для уравнения $\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$ на полупрямой имеет вид

$$G(x,t;\xi,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4(t-\tau)}}\right),$$

что при граничном условии $T(0,t)=f(t)$ и начальном условии $T(x,0)=g(x)$ дает решение задачи в виде

$$T(x,t) = \int\limits_0^t f(\tau)e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}}\frac{xd\tau}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} + \int\limits_0^\infty g(\xi)\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4t}}\right)\frac{d\xi}{2\sqrt{\pi t}} =$$

$$= \int\limits_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^\infty f\left(t - \frac{x^2}{4z^2}\right)e^{-z^2}\frac{dz}{\sqrt{\pi}} + \int\limits_{-\frac{x}{2\sqrt{t}}}^\infty g\left(2z\sqrt{t}+x\right)e^{-z^2}\frac{dz}{\sqrt{\pi}} - \int\limits_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^\infty g\left(2z\sqrt{t}-x\right)e^{-z^2}\frac{dz}{\sqrt{\pi}}.$$

Для иллюстрации метода положим $\lambda=const$, $c(T) = c_0 + c_1e^{\gamma T}$, $(T<0)$, $f(t)=T_0=const<0$, $g(x)=0$ и получим решение в параметрической форме

$$T(x,t) = \frac{T_0}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^\infty e^{-z^2}dz,$$

$$t_0 = \frac{c_0 t}{\lambda}\left(1 + \frac{c_1}{c_0}\varphi\left(\frac{x^2}{4t}\right)\right); \varphi(y) = y\int_{\sqrt{y}}^{\infty} \exp\left(\frac{\gamma T_0}{\sqrt{\pi}}\int_u^{\infty} e^{-z^2} dz\right)\frac{du}{u^3}.$$

Вспомогательным параметром является локальное время t.

В общем случае аналитические расчеты будут весьма громоздкими, однако численная реализация предлагаемой схемы достаточно проста.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М.: ИЛ, 1957.

2. Физические величины: Справочник / Под ред. И.С. Григорьева, Е.З. Михайлова. М.: Энергоатомиздат, 1991.

Александр Борисович ШАБАРОВ —
зав. кафедрой механики многофазных систем Тюменского государственного университета, доктор технических наук, профессор

Павел Юрьевич МИХАЙЛОВ —
ст. преподаватель кафедры механики многофазных систем Тюменского государственного университета

Людмила Александровна ПУЛЬДАС —
ст. преподаватель кафедры теплогазоснабжения и вентиляции Тюменского государственного архитектурно-строительного университета, кандидат технических наук

Александр Александрович ВАКУЛИН —
аспирант кафедры механики многофазных систем Тюменского государственного университета

УДК 536.4

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЕЙ ТЕМПЕРАТУРЫ И ЛЬДИСТОСТИ В МЕРЗЛЫХ ГРУНТАХ ВОКРУГ ЗАГЛУБЛЕННОГО ТРУБОПРОВОДА

PHYSICAL-MATHEMATICAL MODELLING OF TEMPERATURE AND ICE CONTENT FIELDS IN THE FROZEN SOIL AROUND THE BURIED PIPELINE

АННОТАЦИЯ. Разработаны теплофизическая модель, алгоритм и компьютерная программа расчета процессов нестационарного тепломассопереноса в мерзлых и талых грунтах вблизи заглубленного трубопровода. Установлено существенное влияние миграции влаги на поля льдистости вблизи заглубленного трубопровода.

SUMMARY. The article shows the developed thermo-physical model, algorithm and computer program for calculating the unsteady heat and mass transfer processes in frozen and thawed soil near the buried pipeline. A significant effect of moisture migration on the field of ice content near the buried pipeline is determined.